Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei (M,g) eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $X,Y \in T_p(M)$ zwei Tangentialvektoren am Punkte $p \in M$ die eine nicht-entartetete zweidimensionale Ebene aufspannen. (Zur Erinnerung: „Nicht entartet" heißt, dass $g\big|_{\mathrm{Span\{X,Y\}}}$ nicht ausgeartet ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Ebene $\mathrm{Span}\{X,Y\}$ nicht lichtartig ist.) Die Schnittkrümmung am Punkte p parallel zu $\mathrm{Span}\{X,Y\}$ wurde in der Vorlesung definiert durch

$$K(X,Y) := \frac{\mathrm{Riem}(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-[g(X,Y)]^2}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie: $K(X',Y') = K(X,Y)$ falls $\mathrm{Span}\{X',Y'\} = \mathrm{Span}\{X,Y\}$.

Zeigen Sie weiter: Seien $W,X,Y,Z \in T_p(M)$ paarweise orthogonal und W nicht lichtartig, und bezeichnet G den Einstein-Tensor, dann

$$G(W,W) = -g(W,W)\Big[K(X,Y)+K(Y,Z)+K(Z,X)\Big]\,. \tag{2}$$

Aufgabe 2

Sei $L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(q,v)\mapsto L(q,v)$, eine Lagrange-Funktion eines dynamischen Systems mit n Freiheitsgraden. (Wir schreiben $q=(q^1,\cdots,q^n)$ und $v=(v^1,\cdots,v^n)$.) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen für eine Bahnkurve $(q,v)=\big(x(t),\dot{x}(t)\big)$ gegeben ist durch (Summenkonvention)

$$H_{ab}(x,\dot{x})\ddot{x}^b = V_a(x,\dot{x})\,, \tag{3a}$$

wobei

$$H_{ab}(x,\dot{x}) := \frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}\bigg|_{\substack{q=x(t)\\ v=\dot{x}(t)}}\,, \tag{3b}$$

$$V_a(x,\dot{x}) \;:= \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial q^b}\,v^b\right)\bigg|_{\substack{q=x(t)\\ v=\dot{x}(t)}}\,. \tag{3c}$$

Diese Gleichung kann in einer Umgebung eines Punktes $(q=x, v=\dot{x})$ nach $\ddot{q}$ aufgelöst werden, wenn die Matrix $H_{ab}(q,v)$ dort invertierbar ist.

Wir nehmen an, dass dies **nicht** der Fall sei und stattdessen in dem uns interessierenden Bereich $\mathrm{Rang}\{H_{ab}\}(q,v) = r < n$ mit konstantem r gilt. Zeigen Sie: Ist $x(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, dann verläuft $(x, \dot{x})$ auf der Untermenge

$$\Sigma = \big\{(q,v) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \phi_\alpha(q,v) := K^a_\alpha(q,v) V_a(q,v) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, n-r\big\} \tag{4}$$

von der wir voraussetzen, dass sie eine Untermannigfaltigkeit ist. Hierbei spannen die $n-r$ Vektoren $K_\alpha(q,v) = \big(K^1_\alpha(q,v), \cdots K^n_\alpha(q,v)\big)$ gerade den Kern der Matrix $H_{ab}(q,v)$ auf.

Wir wollen nun zur Hamilton'schen Formulierung übergehen und betrachten dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} &F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \\ &F(q,v) = \left(q\,,\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) =: (q,p)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dabei haben wir wie üblich die 2. ($\mathbb{R}^n$-wertige) Komponente dieser Abbildung den Impuls genannt,

$$p_a(q,v) = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a}\,. \tag{6}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial p_a(q,v)}{\partial v^b} = H_{ab}(q,v)\,. \tag{7}$$

Da $\{H_{ab}\}$ Rang $r < n$ besitzt hat auch die Jacobi-Matrix von F nicht Höchstrang sondern Rang $n + r$. Also ist (unter geeigneten Regularitätsannahmen, die wir als erfüllt annehmen wollen) $\mathcal{C} := \mathrm{Bild}(F) \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $n-r$. Diese nennt man üblicherweise die *Constraint-Fläche*.

Zeigen Sie, dass die Energiefunktion

$$E(q,v) := p_a(q,v) v^a - L(q,v) \tag{8}$$

nur über $p(q,v)$ von v abhängt, es also eine Funktion $H_0 : \mathbb{R}^{2n} \supset \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $E(q,v)|_{\mathcal{C}} = H_0\big(q, p(q,\dot{q})\big)$.

Jede glatte Fortsetzung H von H_0 auf ganz $\mathbb{R}^{2n}$ (oder zumindest eine offene Umgebung von $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{2n}$) kann man Hamiltonfunktion nennen. Um die Willkür dieser Fortsetzung und deren Implikationen zu verstehen, gehen wir wie folgt vor: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Kodimension $s := n - r$. Dann gibt es (zumindest lokal) s glatte Funktionen $\phi_m(q,p)$, $m \in \{1, \cdots, s\}$, so dass $\mathcal{C} = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \phi_1(q,p) = \cdots = \phi_s(q,p) = 0\}$.

Zeigen Sie: Jede glatte Funktion $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ mit $f|_{\mathcal{C}} \equiv 0$ besitzt lokal eine Darstellung (Summenkonvention)

$$f(q,p) = \lambda^m(q,p)\phi_m(q,p)\,, \tag{9}$$

wobei die λ_m $(m = 1, \cdots, s)$ glatte lokale Funktionen sind die nun f relativ zu den gewählten ϕ_m charakterisieren.

Zeigen Sie weiter: Die allgemeinste Hamiltonfunktion hat die Form

$$H = H_0 + \lambda^m \phi_m \tag{10}$$

wobei hier H_0 irgendeine, fest gewählte glatte Fortsetzung des obigen H_0 sein möge. Stellen die Bewegungsgleichungen zu dieser Hamiltonfunktion auf. Wie interpretieren Sie die in den λ^m liegende Willkür?