Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 10

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Quantenmechanik eines Punktteilchen im Raum $\mathbb{R}^n$, der jedoch eine allgemeine Riemann'sche Metrik g_{ab} trage. x^a und p_a $(a = 1, \cdots, n)$ seien die Standardkoordinaten auf $T^*\mathbb{R}^n$. Der Hilbertraum ist $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ mit dem Maß $d\mu(x) = \sqrt{g(x)}\, d^n x$, wobei $g = \det\{g_{ab}\}$. Die Hamiltonfunktion des freien Teilchen ist gegeben durch $H(q,p) = \frac{1}{2m} g^{ab}(x) p_a p_b$.

Zeigen Sie: Die Operatoren

$$\hat{x}^a := x^a\,, \qquad \hat{p}_a := -i\hbar g^{-1/4}\,\partial_a\, g^{1/4} \tag{1}$$

(Achtung: Im Impulsoperator wirkt die Ableitung ∂_a auf alles rechts von ihr stehende, also nicht nur auf $g^{1/4}$.) sind symmetrisch (formal selbstadjungiert) und erfüllen die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\hat{x}^a, \hat{x}^b] = [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0\,, \quad [\hat{x}^a, \hat{p}_b] = i\hbar\, \delta^a_b\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie weiter, dass folgender Hamiltonoperator

$$\hat{H} := \frac{1}{2m}\, g^{-1/4} \hat{p}_a g^{ab} g^{1/2} \hat{p}_b\, g^{-1/4} + \lambda\, \hbar^2 R \tag{3}$$

ebenfalls symmetrisch ist. (Tipp: Zeigen Sie, dass der erste Term gleich ist $\frac{1}{2m}\Delta_g$, wobei $\Delta_g := g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ der Laplace-Operator für die Levi-Civita kovariante Ableitung ∇ zur gegebenen Metrik ist.) Hier ist R der Ricci-Skalar der Metrik g_{ab} und λ eine Konstante. Argumentieren Sie, dass dieser Hamiltonoperator im Limes $\hbar \to 0$ in die klassische Hamiltonfunktion übergeht. Welchen Effekt hat der Krümmungsterm?

Aufgabe 2

Sei (Σ, g) eine zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit und $p \in \Sigma$. Wir definieren

$$D_F(\Sigma) := \left\{\phi \in \mathit{Diff}(\Sigma) : \phi(p) = p\,, \quad \phi_{*p} = \mathrm{id}_{T_p\Sigma}\right\}. \tag{4}$$

Zeigen Sie: Ist $\phi \in D_F(\Sigma)$ eine Isometrie bezüglich g, also gilt $\phi^* g = g$, dann ist ϕ die Identität. (Tipp: Benutzen Sie folgende Eigenschaft der Exponentialabbildung $\exp_q : T_q\Sigma \supseteq U \to \Sigma$: Ist ϕ Isometrie und $\phi(q) = q$, dann gilt $\phi \circ \exp_q = \exp_q \circ \phi_{*q}$. Zeigen Sie damit, dass die Fixpunktmenge einer Isometrie $\phi \in D_F(\Sigma)$ offen und abgeschlossen in Σ ist.) Folgern Sie daraus, dass die Wirkung von $D_F(\Sigma)$ auf $\mathrm{Riem}(\Sigma)$ (welche?) frei ist.