Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 2

Aufgabe 1

Wir betrachten die Maxwell-Gleichungen im Minkowski-Raum. Löst man die homogene Gleichungen $dF = 0$ durch $F = dA$, wobei das Viererpotential (1-Form) $A = A_\mu \, dx^\mu$ nur bis auf Eichtransformationen $A \mapsto A + d\Lambda$ bestimmt is, so können die verbleibenden inhomogenen Maxwell-Gleichungen, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$, (Bezeichnung wie in der Vorlesung) immer gelöst werden durch

$$\Box A^\mu = -\mu_0 J^\mu \,, \tag{1a}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \,. \tag{1b}$$

Zeigen Sie, dass die nach der partiellen Eichfixierung (1b) verbleibende Eichfreiheit durch

$$A \mapsto A' := A + d\Lambda \,, \quad \Box \Lambda = 0 \tag{2}$$

gegeben ist, und dass diese benutzt werden kann um $A(u) = 0$ überall außerhalb der Quellen (im Komplement des Trägers von J) zu erreichen, wobei u ein beliebiges konstantes (kovariant konstant bezüglich der Minkowski Metrik) zeitartiges Vektorfeld ist. Charakterisieren Sie die nach vollständiger Eichfixierung verbleibenden Freiheitsgrade des A-Feldes.

Anleitung: Betrachten Sie die Fourier-Transformierten der Felder A und Λ und drücken Sie sowohl (1b) *als auch* (2) *durch diese aus. Was bedeuten diese Bedingungen geometrisch? Zeigen Sie dann, dass die Fourier-Transformierte der Gleichung $A'(u) = 0$ eindeutig nach der Fourier-Transformierten von Λ gelöst werden kann, sofern u zeitartig ist. Was geht schief, wenn u nicht zeitartig ist? Für die Fourier-Transformierte des A Feldes lassen sich nun die nach Eichfixierung verbleibenden Freiheitsgrade bequem charakterisieren.*

Aufgabe 2

Wir betrachten wieder die Maxwell-Gleichungen im Minkowski-Raum, diesmal wie in der Vorlesung in Hamilton'scher Form und außerdem ohne Quellen (Vakuum-Elektrodynamik). Die kanonisch-konjugierten Feldvariablen sind $(\vec{A}, \vec{\pi})$, wobei der konjugierte Impuls $\vec{\pi}$ mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$

so zusammenhängt: $\vec{\pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}$. Der Konfigurationsraum Q kann also mit dem unendlich-dimensionalen reelle Vektorraum aller $\mathbb{R}^3$-wertigen Felder $\vec{A}$ über dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden. Dieser trägt eine Euklidische Struktur (symmetrische, positiv-definite Bilinearform)

$$G = \sum_{a,b} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \, \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}) \, \delta A^a(\vec{x}) \otimes \delta A^b(\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \delta \vec{A}(\vec{x}) \otimes \delta \vec{A}(\vec{x}) \,. \tag{3}$$

Dabei bezeichnet δ das äußere Differential auf Q.

Auf Q operiert die unendlich-dimensionale, abelsche Gruppe der Eichtransformationenen

$$\vec{A} \mapsto T_\lambda \vec{A} := \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \tag{4}$$

wobei die Funktionen λ in räumlich Unendlichen „hinreichend" schnell verschwinden. Insbesondere ist die einzige konstante Funktion λ identisch Null.

Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathcal{G}$ der Eichtransformationen isomorph zur additiven Gruppe der reellwertigen, glatten, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ ist, und dass diese Gruppe *frei* und *isometrisch* (letzteres bezüglich G) auf Q operiert. Dabei fassen wir Q als (unendlich-dimensionale) Mannigfaltigkeit auf und bezeichnen wie üblich mit $T_{\vec{A}}Q$ den Tangentialraum Punkt $\vec{A} \in Q$. Es gilt (geeignete topologische Abschlüsse vorausgesetzt und hier nicht näher bezeichnet)

$$T_{\vec{A}}Q = V_{\vec{A}} \oplus H_{\vec{A}} \,, \tag{5}$$

wobei $V_{\vec{A}}$ der zu den $\mathcal{G}$-Orbits in Q tangentiale oder *vertikale* Anteil und $H_{\vec{A}}$ der dazu bezüglich der Metrik G orthogonale oder *horizontale* Anteil ist.

Zeigen Sie, dass $V_{\vec{A}}$ von Vektoren der Form

$$X^V_\lambda = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \vec{\nabla}\lambda(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta \vec{A}(\vec{x})} \tag{6}$$

aufgespannt wird, und dass

$$X = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x X^a(\vec{x}) \frac{\delta}{\delta A^a(\vec{x})} \in H_{\vec{x}} \;\Leftrightarrow\; \nabla_a X^a = 0 \,. \tag{7}$$

Zeigen Sie auch, dass die orthogonale Projektion $P^\perp : T_{\vec{A}}Q \to H_{\vec{A}}$ auf den Komponenten bezüglich der Basis $\delta/\delta\vec{A}(\vec{x})$ gegeben ist durch

$$P^\perp = 1 - \vec{\nabla} \circ \frac{1}{\Delta} \circ \vec{\nabla} \,, \tag{8}$$

und dass die Verteilung der horizontalen Unterräume $\vec{A} \mapsto H_{\vec{A}}$ invariant ist unter der $\mathcal{G}$-Aktion, also gilt

$$(T_\lambda)_* H_{\vec{A}} = H_{T_\lambda \vec{A}} = H_{\vec{A} + \vec{\nabla}\lambda} \,. \tag{9}$$

Die Verteilung der horizontalen Unterräume definiert somit eine Zusammenhang (à la Ehresman) auf Q, wobei Q als $\mathcal{G}$-Prinzipalbündel über $Q/\mathcal{G}$ aufgefasst wird. Zeigen Sie, dass dieser Zusammenhang flach ist, d.h., dass der Kommutator je zweier horizontaler Vektorfelder auf Q wieder horizontal ist. (Das kann man anhand des Kriteriums (7) nachrechnen.)

Deuten Sie schließlich den Constraint $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ geometrisch und zeigen Sie damit, dass Vertikalbewegungen auf Q keinen Beitrag zur kinetischen Energie des elektromagnetischen Feldes liefern.

Aufgabe 3

Sei n ein zeitartiges und normiertes Vektorfeld auf der Lorentzmannigfaltigkeit (M, g). Dieses definiert an jedem Punkt $p \in M$ eine g-orthogonale Zerlegung

$$T_pM = T_p^{\perp}M \oplus T_p^{\|}M \tag{10}$$

mit othogonalen Projektoren

$$P_p^{\perp} : T_pM \to T_p^{\perp}M\,, \quad X \mapsto -n\, g(n, X)\,, \tag{11a}$$

$$P_p^{\|} : T_pM \to T_p^{\|}M\,, \quad X \mapsto X + n\, g(n, X)\,. \tag{11b}$$

$$\tag{11c}$$

Zeigen Sie, dass dies die entsprechenden zwei Projektionsabbildungen auf den Dualräumen T_p^*M induziert (geben Sie diese explizit an) und damit 2^n Projektionsabbildungen auf allgemeinen Tensoren n-ter Stufe. Unter diesen heiße der Projektor, der alle Tensorfaktoren mit $P^{\|}$ projeziert, einfach wieder $P^{\|}$. Zeigen Sie dann, dass für die Metrik g gilt

$$P^{\|}(g) = g + n^{\flat} \otimes n^{\flat}\,, \tag{12}$$

wobei $n^{\flat} := g(n, \cdot)$.

Aufgabe 4

Wie in der vorherigen Aufgabe sei n ein normiertes zeitartiges Vektorfeld von dem zusätzlich Hyperflächenorthogonalität vorausgesetzt sei, also dass

$$n^{\flat} \wedge dn^{\flat} = 0\,. \tag{13}$$

Das zu n gehörige Beschleunigungsfeld sei definiert durch $a := \nabla_n n$. Beweisen Sie (möglichst koordinatenfrei)

$$a^{\flat} = L_n n^{\flat} = i_n dn^{\flat} \tag{14}$$

und

$$n^{\flat} \wedge da^{\flat} = 0 = a^{\flat} \wedge dn^{\flat}\,. \tag{15}$$

Tipp: Um (15) *zu zeigen, wenden Sie* L_n *und* $i_n \circ d$ *auf* (13) *an.*