Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 3

Aufgabe 1

Wenden Sie das gesamte Verfahren von Aufgabe 2 auf Blatt 1 auf das freie relativistische Punktteilchen an, dessen Lagrange-Funktion $L : \mathbb{R}^4 \times V_+ \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $L(q,v) = -mc^2\sqrt{-\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu}$, mit $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Hier bezeichnet $V_+ = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \eta(v,v) < 0, \, , v^0 > 0\}$ den Vorwärtslichtkegel.

Zeigen Sie insbesondere, dass die Hamiltonfunktion auf der Constraint-Fläche verschwindet. Wie interpretieren Sie das?

Aufgabe 2

In der gewöhnlichen klassischen Mechanik sei die Wirkung eines Punktteilchens gegeben durch

$$S = \int dt\, L(\vec{x}(t), \vec{x}'(t))\,, \tag{1}$$

wobei ein Strich die Ableitung nach t bezeichnet. Dieser Wirkung kann man eine reparametrisierungsinvariante Form geben indem man neben den drei Raumkordinaten auch t als neue, vierte dynamische Variable einführt. Die Weltlinie des Teilchens ist dann gegeben durch $\lambda \mapsto \big(t(\lambda), \vec{x}(\lambda)\big) = x^\mu(\lambda)$.

Zeigen Sie, dass die Wirkung nun folgende Form hat

$$S = \int d\lambda\, \hat{L}(x^\mu(\lambda), \dot{x}^\mu(\lambda)) \tag{2a}$$

mit

$$\hat{L}(x^\mu(\lambda), \dot{x}^\mu(\lambda)) = \dot{t}(\lambda) \cdot L\big(\vec{x}(\lambda), \dot{\vec{x}}(\lambda)/\dot{t}(\lambda)\big)\,, \tag{2b}$$

wobei ein Punkt die Ableitung nach λ bezeichnet, und in der Tat reparametrisierungsinvariant ist.

Wenden Sie erneut das gesamte Verfahren von Aufgabe 2 auf Blatt 1 an, bestimmen Sie die Constraints und zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion auf der Constraint-Fläche verschwindet.

Aufgabe 3

Für das speziell-relativistische Teilchen im Minkowskiraum seien die folgenden drei, einparametrigen Scharen (Scharparameter τ) von Phasenraumfunktionen definiert ($a = 1, 2, 3$):

$$
\begin{aligned}
x^a(\tau; q, p) &= -c\tau \frac{p_a}{p_0} - \frac{M_{0a}}{p_0} \\
&= q^a - (q^0 - c\tau) \frac{p_a}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}} \,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Hierbei ist $M_{\mu\nu} := q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu$ mit q^μ als affinen Koordinaten im Minkowskiraum und zugehörigen Linearimpulsen p_μ. (Es ist $q_\mu := \eta_{\mu\nu} q^\nu$.)

Zeigen (oder argumentieren) Sie, dass es sich bei den sechs Funktionen $(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3)$ um *Observable* handelt. Interpretieren Sie diese und berechnen Sie die Poisson-Klammern zwischen ihnen.

Hinweis: Mit der Poisson-Klammer als Lie-Produkt erhalten die 10 Funktionen p_μ und $M_{\mu\nu}$ die Struktur der Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe:

$$
\begin{aligned}
\{p_\mu, p_\nu\} &= 0 \,, \\
\{p_\mu, M_{\alpha\beta}\} &= -\eta_{\mu\alpha} p_\beta + \eta_{\mu\beta} p_\alpha \,, \\
\{M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}\} &= \eta_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} + \eta_{\nu\beta} M_{\mu\alpha} - \eta_{\mu\beta} M_{\nu\alpha} - \eta_{\nu\alpha} M_{\mu\beta} \,.
\end{aligned} \tag{4}
$$