Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 4

Aufgabe 1

Seien g und $\hat{g}$ zwei (semi-)Riemann'sche Metriken auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 2$. Die zugehörigen Levi-Civita kovarianten Ableitungen auf Vektorfeldern seien $\hat{\nabla}$ und ∇. Ihr Differenztensor ist $\hat{\nabla} - \nabla =: \Delta \in ST^1_2(M)$. Zeigen Sie, dass in Komponenten mit $h := \hat{g} - g$ gilt

$$\Delta^c_{ab} = \tfrac{1}{2}\hat{g}^{cd}\big(-\nabla_d h_{ab} + \nabla_b h_{da} + \nabla_a h_{bd}\big)\,, \tag{1}$$

und dass die Komponenten der Krümmungstensoren folgender Beziehung genügen:

$$\hat{R}^a{}_{b\,cd} = R^a{}_{b\,cd} + \nabla_c \Delta^a_{db} - \nabla_d \Delta^a_{cb} + \Delta^a_{cn}\Delta^n_{db} - \Delta^a_{dn}\Delta^n_{cb}\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie die entsprechenden Ausdrücke zu (1) und (2) in linearer Ordnung in h. Zeigen Sie, dass in linearer Ordnung die Differenz der skalaren Krümmungen (Ricci Skalare) gegeben ist durch

$$\hat{R} - R = -h^{ab}R_{ab} + \nabla_a V^a \tag{3}$$

mit

$$V^a = \nabla_b h^{ab} - \nabla^a h\,, \quad h^{ab} = g^{ac}g^{bd}h_{cd}\,, \quad h = g^{ab}h_{ab}\,. \tag{4}$$

Aufgabe 2

Seien h und k zwei symmetrische kovariante Tensoren vom Rang 2 über einem Vektorraum der Dimension n. Aus ihnen kann man mit Hilfe des *Kulkarni-Nomizu-Produktes* $\owedge$ einen kovarianten Tensor vom Rang 4 bilden gemäß

$$(h \owedge k)_{\alpha\beta\mu\nu} := h_{\alpha\mu}k_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}k_{\alpha\mu} - h_{\alpha\nu}k_{\beta\mu} - h_{\beta\mu}k_{\alpha\nu}\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass dieser alle Symmetrien des Riemann-Tensors besitzt.

Auf dem Raum der Tensoren vom Rang 4 definiert man mit Hilfe der Metrik g eine lineare Abbildung, genannt *Weyl-Projektion*, durch

$$P_W(Riem) = Riem - \frac{g}{n-2} \owedge \left(Ric - \frac{g\,R}{2(n-1)}\right)\,. \tag{6}$$

Dabei steht hier *Riem* zunächst für einen beliebigen Tensor vom Rang 4 (Komponenten $R_{\alpha\beta\mu\nu}$), *Ric* für dessen erste Spur (Komponenten $R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta}$) und R für dessen zweite Spur ($R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$). Zeigen Sie, dass die Tensoren im Bild von P_W vollständig Spurfrei sind und dass der Kern der Abbildung P_W genau durch Tensoren der Form $g \owedge k$ gegeben ist. Zeigen Sie damit $P_W \circ P_W = P_W$ und $\dim \mathrm{Bild}(P_W) = \frac{1}{12}n(n+1)\big[n(n-1)-6\big]$.

Aufgabe 3

Zwei Metriken g und $\tilde{g}$ sind *konform äquivalent*, wenn es eine glatte, reellwertige Funktion Ω gibt, mit

$$\tilde{g} = \exp(2\Omega)\, g\,. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass die zu $\tilde{g}$ bzw. g gehörigen Christoffelsymbole wie folgt in Beziehung stehen:

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \left(-g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\Omega_{,\nu} + \delta^{\mu}_{\alpha}\Omega_{,\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\Omega_{,\alpha}\right). \tag{8}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Normalkoordinaten folgende Relation der Riemann-Tensoren

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \exp(2\Omega)\Big[R_{\alpha\beta\mu\nu} + (g \owedge K)_{\alpha\beta\mu\nu}\Big], \tag{9}$$

mit

$$K_{\alpha\beta} = -\nabla_\alpha\nabla_\beta\Omega + \nabla_\alpha\Omega\nabla_\beta\Omega - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}\, g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Omega\nabla_\nu\Omega\,. \tag{10}$$

Der *Weyl-Tensor* ist definiert als das Bild des Riemann-Tensors unter der in (6) definierten Weyl-Projektion. Man bezeichnet seine Komponenten mit $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. Zeigen Sie, dass sich diese unter konformen Transformationen wie folgt verhalten:

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \exp(2\Omega)\, C_{\alpha\beta\mu\nu}\,, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{C}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = C^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\,. \tag{11}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie aus (9) die Relation der skalaren Krümmungen (Ricci-Skalare). Zeigen Sie, dass diese durch Setzung von

$$\exp(\Omega) = \Phi^{\frac{2}{n-2}} \tag{12}$$

in einer Form geschrieben werden kann, die keine in den ersten Ableitungen von Φ quadratischen Terme mehr enthält und folgende einfache Form hat:

$$R_{\hat{g}} = -\tfrac{4(n-1)}{n-2}\,\Phi^{-\frac{n+2}{n-2}}D_g\Phi\,. \tag{13}$$

Dabei ist D_g der von der Metrik g abhängige, lineare Differentialoperator

$$D_g := \Delta_g - \frac{n-2}{4(n-1)}\, R_g\,. \tag{14}$$

Hier ist $\Delta_g = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ den Laplace-Operator (bzw. Wellenoperator bei Indefinitem g) bezüglich der Metrik g und R_g den Ricci-Skalar zu g.

Zeigen Sie mit Hilfe von (13), dass der Operator D_g folgende Transformationseigenschaft unter konformen Änderungen der Metrik besitzt:

$$D_{\Phi^{\frac{4}{n-2}}g} = M\big(\Phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\big) \circ D_g \circ M(\Phi)\,. \tag{15}$$

Dabei ist $M(\Psi)$ der lineare Operator der Multiplikation mit Ψ.

Bemerkung: In der kanonischen Formulierung der ART ist im Zusammenhang mit der Lösung des Hamilton-Constraints der Fall $n = 3$ relevant.

Aufgabe 5

Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer positiv-definiten symmetrischen Bilinearform $h \in W := V^* \vee V^*$ (hier bezeichnet $\vee$ das symmetrische Tensorprodukt). Mit Hilfe von h kann man nun auf W eine einparametrige Schar $G_\lambda \in W^* \vee W^*$ (der Parameter heiße $\lambda \in \mathbb{R}$) von symmetrischen Bilinearformen definieren:

$$G_\lambda(k,\ell) = Sp(k^\sharp \circ \ell^\sharp) - \lambda Sp(k^\sharp) Sp(\ell^\sharp)\,. \tag{16}$$

Dabei ist $k^\sharp \in V \otimes V^*$ der durch h zu k assoziierte Endomorphismus, der definiert ist durch $h\big(k^\sharp(v), w\big) = k(v,w)$ für alle $v, w \in V$, und $Sp : V \otimes V^* \to \mathbb{R}$ ist die übliche Spurfunktion.

Zeigen Sie: Ist $\{e_1, \cdots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ die zugehörige Dualbasis. Dann gilt für die diesbezüglichen Komponenten

$$G_\lambda(k,\ell) = G_\lambda^{ab\,cd}\, k_{ab}\, \ell_{cd} = \tfrac{1}{2}\big(h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2\lambda\, h^{ab}h^{cd}\big)\, k_{ab}\, \ell_{cd}\,. \tag{17}$$

Sei nun $\lambda \neq 1/n$. Zeigen Sie, dass entsprechend die Komponenten der inversen Metrik $G_\lambda^{-1} \in W \vee W$ gegeben sind durch

$$G^{-1}_{(\lambda)ab\,cd} = \tfrac{1}{2}\big(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - 2\mu\, h_{ab}h_{cd}\big) \tag{18}$$

mit

$$\lambda + \mu = n\,\lambda\mu\,, \quad \text{d.h.} \quad \mu = \frac{\lambda}{n\lambda - 1}\,, \tag{19}$$

dass also gilt:

$$G_{(\lambda)}^{ab\,nm}\, G^{-1}_{(\lambda)\,nm\,cd} = \tfrac{1}{2}\big(\delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_d\delta^b_c\big)\,. \tag{20}$$

Der Vektorraum W ist eine Mannigfaltigkeit, auf der die Basis $\{\theta^a \vee \theta^b\}_{a\leq b=1,\cdots,n}$ eine globale Karte $W \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ definiert. Auf der Untermannigfaltigkeit der *positiv-definiten* symmetrischen Bilinearformen führen wir neue Koordinaten ein durch

$$\tau := \ln\Big(\big[\det\{h_{nm}\}\big]^{1/n}\Big)\,, \quad r_{ab} := h_{ab}/\big[\det\{h_{nm}\}\big]^{1/n}\,. \tag{21}$$

Zeigen Sie, dass in diesen die Metrik (16) ausgedrückt werden kann durch

$$G_\lambda = G_\lambda^{ab\,cd}\, dh_{ab} \otimes dh_{cd} = n(1-\lambda n) d\tau \otimes d\tau + r^{ac} r^{bd}\, dr_{ab} \otimes dr_{cd}\,, \tag{22}$$

wobei $r^{an} r_{bn} = \delta^a_b$. Schließen Sie daraus, dass die Metriken G_λ für $\lambda < 1/n$ Riemann'sch, für $\lambda > 1/n$ Lorentz'sch (mit Signatur $(-,+,+,+,+,+)$) und für $\lambda = 1/n$ entartet sind.

Bemerkung: In der kanonischen Formulierung der ART ist im Zusammenhang mit dem Hamilton-Constraint der Fall $n = 3$ und $\lambda = 1$ relevant.