Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei (M,g) eine Lorentz'sche Mannigfaltigkeit und $\Omega \subset M$ ein Gebiet mit stückweise glattem, nicht lichtartigem Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten das Funktional

$$F[g,\Omega] := \int_\Omega d\mu(g)\, R(g)\,, \tag{1}$$

wobei $d\mu(g)$ das zur Metrik g gehörige Volumenmaß und $R(g)$ die zu g gehörige skalare Krümmung (Ricci-Skalar) ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 auf Blatt 4, dass

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} F[g+sh,\Omega] := -\int_\Omega d\mu(g)\, G_{ab}h^{ab} + \int_{\partial\Omega} d\mu(\hat{g}) n_a V^a\,. \tag{2}$$

Hier ist $V^a = \nabla_b h^{ab} - \nabla^a(g^{bc}h_{bc})$, G_{ab} bezeichnen die Komponenten des Einstein-Tensors zur Metrik g, n^a die Komponenten des (nach außen weisenden) Normalenvektorfeldes auf $\partial\Omega$, wobei nach Voraussetzung $g(n,n) = \varepsilon = \pm 1$, und $d\mu(\hat{g})$ das von der auf dem Rand $\partial\Omega$ induzierten Metrik $\hat{g}$ (siehe unten) definierte Maß. [Für die Formen gilt $d\mu(\hat{g}) = i_n d\mu(g)$.] Der Rand $\partial\Omega$ ist Stückweise entweder raumartig ($\varepsilon = -1$) oder zeitartig ($\varepsilon = +1$). Im Folgenden betrachten wir eines dieser Stücke, das wir mit $\partial\Omega_*$ bezeichnen.

Zeigen Sie, dass das auf $\partial\Omega_*$ eingeschränkte Randintegral wie folgt geschrieben werden kann:

$$\int_{\partial\Omega_*} d\mu(\hat{g})\, \hat{g}^{ab} n^c (\nabla_a h_{bc} - \nabla_c h_{ab}). \tag{3}$$

Dabei ist

$$\hat{g}^{ab} := g^{ac} g^{bd} \hat{g}_{cd} \quad \text{mit} \quad \hat{g}_{ab} := g_{ab} - \varepsilon n_a n_b\,, \tag{4}$$

also $\hat{g}$ die von g auf der Hyperfläche $\partial\Omega_*$ induzierte Metrik und $d\mu(\hat{g})$ das bereits erwähnte durch sie definierte Maß auf $\partial\Omega_*$.

Wir schränken die Variationen h der Metrik g nun auf solche ein, die auf dem Rand $\partial\Omega_*$ verschwinden, dort also gilt

$$h\big|_{\partial\Omega_*} = 0\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass dann der erste Term in (3) verschwindet. Der zweite Term hat eine einfache geometrische Interpretation. Um diese zu sehen, betrachten wir das Randintegral

$$
\begin{aligned}
F'[g, \partial\Omega_*] :&= 2 \int_{\partial\Omega_*} d\mu(\hat{g})\, \hat{g}^{ab} \nabla_a n_b && \text{(6a)} \\
&= -2\varepsilon \int_{\partial\Omega_*} d\mu(\hat{g})\, \mathrm{Spur}_{\hat{g}}(K)\,, && \text{(6b)}
\end{aligned}
$$

wobei K die äußere Krümmung von $\partial\Omega_*$ in (M, g) ist. Beachten Sie die vielfältige Abhängigkeit von der Metrik g, die neben $\hat{g}$ sowohl in die kovariante Ableitung als auch die Definition der Normalen eingeht. Beachten Sie auch, dass zur Berechnung des Integranden die Ableitungen von n nur tangential zu $\partial\Omega_*$ eingehen (Ableitungen von n transversal zu $\partial\Omega_*$ kennen wir ja gar nicht, da n nur auf $\partial\Omega_*$ definiert ist). Zeigen Sie, dass für solche h die (5) genügen, gilt:

$$
\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} F'[g + sh, \partial\Omega_*] = \int_{\partial\Omega_*} d\mu(\hat{g})\, \hat{g}^{ab} n^c \nabla_c h_{ab}. \tag{7}
$$

[Tipp: Zur Ableitung von $\nabla_a^{(g+sh)}$ nach s können Sie einfach Gleichung (1) von Aufgabe 1 auf Blatt 4 verwenden. Ableitungen von h tangential zu $\partial\Omega_*$ verschwinden wegen (5).] Folgern Sie schließlich daraus, dass das Funktional

$$
\begin{aligned}
S[g, \Omega] :&= F[g, \Omega] + F'[g, \partial\Omega] \\
&= \int_\Omega d\mu(g) R(g) - 2 \sum_a \varepsilon_a \int_{\partial\Omega_a} \mathrm{Spur}_{\hat{g}_a}(K_a)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

bei Variationen die (5) genügen keine Oberflächenterme enthält. Dabei haben wir das Obberflächenintegral in eine Summe von Teilintegralen über Randgebiete geschrieben, die entweder raumartig ($\varepsilon_a = -1$) oder zeitartig ($\varepsilon_a = +1$) sind. K_a bezeichnet die äußere Krümmung des Randstücks $\partial\Omega_a$ und $\hat{g}_a$ die auf diesem Randstück induzierte Metrik (Riemann'sch für $\varepsilon_a = -1$ und Lorentz'sch für $\varepsilon_a = +1$).

Aufgabe 2

In der kanonischen ART gehört zu jeder 3-Mannigfaltigkeit Σ ein Phasenraum, der gegeben ist durch das Kotangentenbündel $T^*\,\mathrm{Riem}(\Sigma)$ über der Mannigfaltigkeit der Riemann'schen Metriken auf Σ. Sei $X \in ST\Sigma$ ein Vektorfeld auf Σ. Betrachten Sie die von X abhängige Phasenraumfunktion

$$P_X[h,\pi] = \int_\Sigma d^3x\,\pi^{ab}(L_X h)_{ab} = 2\int_\Sigma d^3x\,\pi^{ab}\nabla_a X_b\,. \tag{9}$$

Wieso steht hier scheinbar nur d^3x und nicht das durch die Riemann'sche Metrik h induzierte Maß $d\mu(h)$? Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Vektorfelder X, Y kompakten Träger besitzen (so dass keine Randintegrale auftreten) und zeigen sie dann

$$\{h, P_X\} = L_X h \quad \{\pi, P_X\} = L_X\pi \quad \{P_X, P_Y\} = P_{[X,Y]}\,. \tag{10}$$

Aufgabe 3

Sei (M, g) eine $n \geq 1$ dimensionale glatte Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Auf $\hat{M} := \mathbb{R}_{\geq 0} \times M$ sei eine Riemann'sche ($\varepsilon = +1$) bzw. Lorentz'sche ($\varepsilon = -1$) Metrik definiert durch

$$\hat{g} := \varepsilon\; dt \otimes dt + f^2(t) g\,, \tag{11}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$, t die kanonische Kartenabbildung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine noch unbestimmte aber mindestens zweimal stetig-differenzierbare Funktion ist.

Berechnen Sie die kovarianten Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors zum Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik $\hat{g}$ bezüglich der orthonotmierten Ko-Basis

$$\hat{\theta}^0 := dt\,, \quad \hat{\theta}^a := f\,\theta^a\,, \tag{12}$$

wobei $\{\theta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ eine orthonormierte Ko-Basis auf (M, g) ist. (Tipp: Hier bieten sich die Cartan'schen Strukturgleichungen an.)

Nehmen Sie an, dass $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$. Leiten Sie notwendige und/oder hinreichende Bedingungen ab, unter denen der Krümmungstensor von $\hat{g}$ bei $t = 0$ *nicht* divergiert. Zeigen Sie insbesondere die Notwendigkeit der Bedingung, dass (M, g) von konstanter Krümmung $\varepsilon f'^2(0)$ ist. [Zur Erinnerung: (M, g) ist von konstanter Krümmung k genau dann, wenn $R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$.]

Aufgabe 4

Betrachten Sie eine Abwandlung der Metrik G_λ von Aufgabe 5 auf Blatt 4, indem Sie diese mit der Wurzel aus $h = \det\{h_{nm}\}$ multiplizieren. In Komponenten ist die neue Metrik und ihr Inverses also gegeben durch

$$\hat{G}_\lambda^{ab\,cd} = \tfrac{\sqrt{h}}{2}\,\bigl(h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2\lambda\, h^{ab}h^{cd}\bigr)\,, \tag{13a}$$

$$\hat{G}^{-1}_{(\lambda)ab\,cd} = \tfrac{1}{2\sqrt{h}}\bigl(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - 2\mu\, h_{ab}h_{cd}\bigr)\,, \tag{13b}$$

wobei, wie zuvor, $\lambda + \mu = n\lambda\mu$.

Führen Sie nun in Abwandlung zu Gl. (21) von Blatt 4 neue Koordinaten ein durch

$$T := \sqrt{|n(1-\lambda n)|}\;\frac{4}{n}\,h^{1/4}\,, \quad r_{ab} := h_{ab}/\bigl[\det\{h_{nm}\}\bigr]^{1/n}\,. \tag{14}$$

Zeigen Sie, dass die Metrik $\hat{G}_\lambda$ und ihre Inverse dann folgende Formen annehmen:

$$\hat{G}_\lambda = \mathrm{sign}(1-n\lambda)\, dT\otimes dT \;+ aT^2\, r^{ac}r^{bd}\, dr_{ab}\otimes dr_{cd} \tag{15a}$$

$$\hat{G}_\lambda^{-1} = \mathrm{sign}(1-n\lambda)\,\frac{\partial}{\partial T}\otimes\frac{\partial}{\partial T} + \frac{1}{aT^2}\, r_{ac}r_{bd}\,\frac{\partial}{\partial r_{ab}}\otimes\frac{\partial}{\partial r_{cd}} \tag{15b}$$

wobei

$$a = \frac{1}{16}\;\frac{n}{|1-\lambda n|}\,. \tag{15c}$$

(Tipp: Übernehmen Sie die Resultate aus Aufgabe 5 von Blatt 4, dann ist die Rechnung sehr kurz.)

Interpretieren Sie die Metrik (15a) geometrisch. Was können Sie in Anbetracht von Aufgabe 3 über das Vorliegen von Singularitäten bei $T = 0$ aussagen?