Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 6

Aufgabe 1

Sei V ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum mit nicht ausgearteter symmetrischer Bilinearform $h : V \times V \to \mathbb{R}$. Diese definiert in bekannter Weise einen Isomorphismus $V \to V^*$, $v \mapsto h(v, \cdot) := v^\flat$, mit Inversen $V^* \to V$, $\omega \mapsto h^{-1}(\omega, \cdot) := \omega^\sharp$. Außerdem definiert h einen Hodge-Dualitätsoperator $\star : \bigwedge^p V^* \to \bigwedge^{3-p} V^*$ in bekannter Weise.

Mit Hilfe dieser Operationen kann auf V eine bilineare Abbildung $V \times V \to V$, definiert werden durch

$$(v, w) \mapsto v \times w := \left[\star(v^\flat \wedge w^\flat)\right]^\sharp . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass diese folgende Relationen erfüllt:

$$\begin{aligned}
&v \times w = -w \times v \,, \\
&u \times (v \times w) = h(u, w)v - h(u, v)w \,, \\
&u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0 \,, \\
&h(u \times v, w) + h(v, u \times w) = 0 \,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $v \mapsto v\times \in \mathrm{End}(V)$ (mit $v\times$ ist hier die lineare Abbildung $w \mapsto v \times w$ gemeint) ein Isomorphismus zwischen V und der Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe von (V, h) ist.

Aufgabe 2

Sei (Σ, h) eine 3-dimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit und D die eindeutige torsionsfreie und bezüglich h metrische kovariante Ableitung (Levi-Civita-Zusammenhang). Sei $J \in ST^1_1\Sigma$ ein Feld von Endomorphismen die bezüglich h symmetrisch sind, d.h. $h(J(X), Y) = h(X, J(Y))$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{D}_X Y = D_X Y + J(X) \times Y \tag{3}$$

wieder eine metrische kovariante Ableitung definiert. Dabei ist $\times$ wie in Aufgabe 1 definiert. Berechnen Sie die Torsion von $\hat{D}$ und zeigen Sie, dass die Krümmung von $\hat{D}$ mit der von D wie folgt in Beziehung steht:

$$\begin{aligned}\hat{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z \\ &+ J^\flat(Z,X)J(Y) - J^\flat(Z,Y)J(X) \\ &+ \big((D_X J)(Y) - (D_Y J)(X)\big) \times Z\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist $J^\flat \in ST^0_2\Sigma$ definiert durch $J^\flat(X,Y) := h(X, J(Y))$.

Berechnen Sie auch die Ricci-Krümmung und zeigen Sie, dass die skalare Krümmung gegeben ist durch

$$\hat{R} = R + \mathrm{Spur}(J \circ J) - [\mathrm{Spur}(J)]^2\,. \tag{5}$$

Wenden Sie all dies auf die raumartigen Blätter einer Foliation der Raumzeit an und wählen Sie J proportional zur Weingarten Abbildung. Welchen Proportionalitätsfaktor aus $\mathbb{C}$ müssen Sie wählen, damit der Hamilton-Constraint äquivalent ist der Bedingung verschwindender skalarer Krümmung von $\hat{D}$? (In diesem Fall nennt man $\hat{D}$ *Ashtekar Zusammenhang*, für allgemeine komplexe Proportoionalitätskonstanten den *Ashtekar-Barbero Zusammenhang*.)

Aufgabe 3

Sei (V, h) ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum mit Euklidischer Metrik h. Sei $S \subset V \otimes V^*$ der lineare Unterraum der bezüglich h symmetrischen Endomorphismen von V. Auf S betrachten wir die folgende symmetrische Bilinearform $G : S \times S \to \mathbb{R}$,

$$G(J, J') := \mathrm{Spur}(J \circ J') - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(J)\mathrm{Spur}(J')\,. \tag{6}$$

Machen Sie sich klar, dass dies bei geeigneter Identifikation der Größen gerade dem inversen Wheeler-DeWitt Produkt für die Impulse (letztere aufgefasst als Endomorphismen) entspricht.

Zeigen Sie, dass $G(J,J) < 0$ genau dann, wenn die Eigenwerte $\vec{p} := (p_1, p_2, p_3)$ von J der Gleichung genügt

$$\vec{p}\cdot\vec{p} - \tfrac{3}{2}(\vec{n}\cdot\vec{p})^2 < 0 \tag{7}$$

wobei $\vec{n} := (1,1,1)/\sqrt{3}$. Charakterisieren Sie im $\mathbb{R}^3$ der Eigenwerte die Region, in der (7) erfüllt ist. Zeigen Sie damit insbesondere, dass die Eigenwerte sämtlich von Null verschieden sein müssen und das gleiche Vorzeichen besitzen.

Benutzen Sie dieses Ergebnis um die Impulse π^{mn} mit negativem Wheeler-DeWitt-Quadrat zu charakterisieren. Wie lautet das entsprechende Ergebnis für die äußere Krümmung K_{mn}?

Aufgabe 4

Sei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 +$ der gewöhnliche Laplace Operator im $(\mathbb{R}^3, \delta)$, wobei δ die gewöhnliche flache Euklidische Metrik ist. Sei $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\Sigma := \mathbb{R}^3 - \{\vec{c}\}$. Auf Σ betrachten wir den folgenden Diffeomorphismus

$$I_{(\vec{c},a)}(\vec{x}) := \vec{c} + (\vec{x} - \vec{c}) \frac{a^2}{\|\vec{x} - \vec{c}\|^2} \tag{8}$$

den man die *Inversion an der Sphäre vom Radius a um $\vec{c}$* nennt. Zeigen Sie, dass der Pull-Back der flachen Metrik δ unter dieser Inversion gegeben ist durch

$$I^*_{(\vec{c},a)}\delta = \frac{a^4}{d^4_{\vec{c}}}\, \delta\,, \tag{9}$$

wobei $d_{\vec{c}} : \vec{x} \to d_{\vec{c}}(\vec{x}) := \|\vec{x} - \vec{c}\|$ die Euklidische Distanzfunktion relativ zu $\vec{c}$ ist.

Auf $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ definieren wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} J_{(\vec{c},a)} : C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) &\to C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto J_{(\vec{c},a)}(f) := \frac{a}{d_{\vec{c}}} \left(f \circ I_{(\vec{c},a)}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Zeigen Sie, dass $J_{(\vec{c},a)} \circ J_{(\vec{c},a)}$ die Identität auf $C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ ist, und dass

$$I^*_{(\vec{c},a)}(\Phi^4\, \delta) = \left(J_{(\vec{c},a)}(\Phi)\right)^4\, \delta\,. \tag{11}$$

Zeigen Sie schließlich, dass bezüglich der Abbildung (10) der Laplace-Operator folgende Äquivarianzeigenschaft besitzt:

$$\Delta \circ J_{(\vec{c},a)} = \frac{a^4}{d^4_{\vec{c}}} \left(J_{(\vec{c},a)} \circ \Delta\right). \tag{12}$$

Diese ist Grundlage der aus der Elektrostatik bekannten *Methode der Spiegelladungen*. Erklären Sie warum! In der ART kann man all dies benutzen, um systematisch konform flache Metriken für das zeitsymmetrische Anfangswertproblem zu erzeugen, die sämtliche Inversionen zu einer endlichen Anzahl vorgegebener, nicht überlappender 2-Sphären als Isometrien besitzt. Wie muss man dazu vorgehen? [Tipp: Manchmal hilft nur Gewalt ...]