Übungen zur Vorlesung

Kanonische Formulierung der ART

von Domenico Giulini

Blatt 8

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie mit Hilfe der *konformen Methode* Anfangsdaten (h_{nm}, K_{nm}) konstruiert werden können, die den vier Constraint-Gleichungen genügen. Dazu setzt man zunächst

$$h_{nm} = \Phi^4 \bar{h}_{nm}\,, \tag{1}$$

$$K_{nm} = \Phi^{-2}\bar{\mu}_{nm} + \Phi^4 \bar{h}_{nm}\tau\,. \tag{2}$$

Im materiefreien Fall werden die Vektor-Constraints dann erfüllt, falls

$$\bar{h}_{nm}\bar{\mu}^{nm} = 0 \qquad \text{(Spurfreiheit)} \tag{3a}$$

$$\bar{\nabla}_n \bar{\mu}^{nm} = 0 \qquad \text{(Transversalität)} \tag{3b}$$

und τ eine Konstante ist (diese Methode funktioniert also nur, wenn die mittlere äußere Krümmung $K^n_n = \tau$ konstant ist).

Der skalare Constraint bestimmt dann den konformen Faktor durch eine quasilineare elliptische Differentialgleichung (siehe Vorlesung).

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $\bar{h} = \delta$ (flache Metrik) und $\tau = 0$. Dafür wurde in der Vorlesungen gezeigt, dass folgende Felder Lösungen von (3) auf der Mannigfaltigkeit $\Sigma = \mathbb{R} - \{\vec{0}\}$ sind:

$$\bar{\mu}^{(1)}_{nm}(\vec{x}) = r^{-2}\big(\nu_n A_m + \nu_m A_n - (\delta_{nm} - \nu_n\nu_m)\nu_k A_k\big)\,, \tag{4a}$$

$$\bar{\mu}^{(2)}_{nm}(\vec{x}) = r^{-3}\,(\nu_n \varepsilon_{mab} + \nu_m \varepsilon_{nab}) B_a \nu_b\,. \tag{4b}$$

Sei $I := I_{(\vec{0},a)}$ die Inversion an der Sphäre mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius a. Zeigen Sie, dass sich die Tensorfelder $\bar{\mu}^{(1,2)}$ aus (4) wie folgt transformieren:

$$(I^*\bar{\mu}^{(1)})_{nm}(\vec{x}) = -\frac{1}{r^2}\Big(\nu_n A_m + \nu_m A_n + (\delta_{nm} - 5\,\nu_n\nu_m)\nu_k A_k\Big)\,, \tag{5a}$$

$$(I^*\bar{\mu}^{(2)})_{nm}(\vec{x}) = \frac{1}{a^2 r}\,(\nu_n \varepsilon_{mab} + \nu_m \varepsilon_{nab}) B_a \nu_b = \frac{r^2}{a^2}\bar{\mu}^{(2)}_{nm}\,. \tag{5b}$$

Tipp: Benutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 5 auf Blatt 7

Zeigen Sie weiter: Ist die Inversion I eine Isometrie von h, ist also Φ invariant unter $J := J_{(\vec{0},a)}$, dann gilt

$$I^*K = \pm K \iff \frac{a^2}{r^2} I^*\bar{\mu} = \pm\bar{\mu}\,. \tag{6}$$

(Hier haben wir der Einfachheit halber die Distanzfunktion relativ zum Ursprung, also $d_{\vec{0}}$, einfach gleich r genannt.)

Aufgabe 2

Die Bezeichnungen sind wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Beweisen Sie folgenden Beziehung für $\hat{\mu} := \frac{a^2}{r^2}\, I^*\bar{\mu}$:

$$\partial_b \hat{\mu}_{ab}(\vec{x}) = \frac{2a^6}{r^7}\left[-n_a \bar{\mu}_{bb}(I(\vec{x})) + \frac{a^2}{r^2} R_{ab}\partial_c \bar{\mu}_{bc}(I(\vec{x}))\right]\,. \tag{7}$$

und folgern Sie als Korrolar, dass $\bar{\mu}$ genau dann die beiden Gleichungen (3) erfüllt, wenn dies für $\hat{\mu}$ zutrifft.

Erklärung und Hinweise: Es ist

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{ab}(\vec{x}) &= \frac{a^2}{r^2} I_{an}(\vec{x}) I_{bm}(\vec{x}) \bar{\mu}_{nm}(I(\vec{x}))\\ &= \frac{a^6}{r^6} R_{an}(\vec{x}) R_{bm}(\vec{x}) \bar{\mu}_{nm}(I(\vec{x}))\end{aligned} \tag{8}$$

mit $I_{ab}(\vec{x})$ *der Jacobi-Matrix der Abbildung* I *am Punkte* $\vec{x}$

$$I_{ab}(\vec{x}) = \frac{a^2}{r^2}(\delta_{ab} - 2n_a n_b) =: \frac{a^2}{r^2}\, R_{ab}\,, \tag{9}$$

wobei $n_a := x_a/r$. *Es gilt* $R_{ab}n_b = -n_a$ *und* $\partial_a R_{bc} = (-1/r)(P_{ab}n_c + P_{ac}n_b)$, *wobei* $P_{ab} := \delta_{ab} - n_a n_b$ *Projektor* $\perp$ *auf* n. *Es ist z.B.* $P_{ac}R_{cb} = P_{ab}$.

Beweisen Sie damit, dass Inversionsinvariante Lösungen von (3) gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\bar{\mu}^{(1)}_{nm}(\vec{x}) \;&=\; \frac{1}{r^2}\Big(\nu_n A_m + \nu_m A_n - (\delta_{nm} - \nu_n\nu_m)\nu_k A_k\Big)\\ &\;-\; \frac{a^2}{r^4}\Big(\nu_n A_m + \nu_m A_n + (\delta_{nm} - 5\,\nu_n\nu_m)\nu_k A_k\Big)\,,\end{aligned} \tag{10a}$$

$$\bar{\mu}^{(2)}_{nm}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{r^3}\,(\nu_n\varepsilon_{mab} + \nu_m\varepsilon_{nab})B_a\nu_b\,. \tag{10b}$$

Was sind deren Impuls- und Drehimpulswerte an den beiden Enden $r \to \infty$ und $r \to 0$? Was können Sie über die ADM-Massen an beiden Enden sagen?