Ergänzungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Synchronisationsvorschriften

Die allgemeinen Transformationsformeln zwischen zwei Inertialsystemen K und K' seien gegeben durch (wir unterdrücken der Einfachheit halber zwei Raumdimensionen)

$$x' = b(v)(x - vt)\,, \tag{1}$$

$$t' = a(v)t + \varepsilon(v)x'\,. \tag{2}$$

Dabei ist absichtlich t' als Funktion von (t, x') und nicht (t, x) ausgrdrückt. Die Faktoren der Längenkontraktion bzw. Zeitdilatation sind durch $1/b(v)$ bzw. $1/a(v)$ gegeben. In der SRT sind sie wie folgt:

$$a_{\mathrm{SRT}}(v) = 1/b_{\mathrm{SRT}}(v) = \sqrt{1 - v^2}\,, \quad \varepsilon_{\mathrm{SRT}}(v) = -v\,. \tag{3}$$

Im Folgenden lassen wir diese Funktionen aber zunächst unbestimmt. Wir verabreden nur, dass die in K ruhenden Uhren Einstein synchronisiert werden. Dies bedingt die Isotropie der Lichtgeschwindigkeit in K. Wir wählen die Einheiten so, dass die Lichtgeschwindigkeit in K den Wert 1 hat. Man beachte, dass durch die Isotropie der Lichtausbreitung das System K ausgezeichnet ist. Ferner beachte man, dass die Transformationsformeln (1-2) in dieser Form nur zwischen K und anderen Inertialsystemen $K', K'', \cdots$ gelten, nicht jedoch zwischen K' und K'' etc. Das Transformationsgesetz zwischen K' und K'' bekommt man, indem man das Transformationsgesetz zwischen K und K' benutzt um im Transformationsgesetz zwischen K und K'' die Koordinaten (x, t) zugunsten von (x', t') zu eliminieren.

Wir wollen nun verschiedene Synchronisationsvorschriften in K' betrachten. Ein beliebiges, von v und x' abhängiges Verstellen der Uhren in K' ist von der allgemeinen Form $t' \to t' + f(v, x')$. Um mit der linearen Form (2) verträglich zu sein, muss f im zweiten Argument linear sein. Verschiedene Synchronisationsvorschriften in K' äußern sich also gerade in verschiedenen Funktionen $\varepsilon(v)$. Es gilt nun

Proposition 1. *Die Einsteinsche Synchronisationsvorschrift impliziert*

$$\varepsilon = \varepsilon_E := -\frac{v\,a(v)}{(1-v^2)\,b(v)}\,. \tag{4}$$

Beweis. Wir betrachten zwei in K' ruhende Uhren A und B bei $x' = x'_A$ und $x' = x'_B$. Uhr A sende bei Zeigerstellung t'_1 (Ereigniskoordinaten (x_1, t_1) in K) ein Lichtsignal zu Uhr B, was dort bei Zeigerstellung t'_2 (Ereigniskoordinaten (x_2, t_2) in K) ankommt und ohne Zeitverzögerung zu Uhr A zurückreflektiert wird, wo es bei Zeigerstellung t'_3 (Ereigniskoordinaten (x_3, t_3) in K) eintrifft.

Nun ist

in K die Lichtgeschwindigkeit nach rechts $= 1$	$\Rightarrow$	$x_2 - x_1 \;=\; t_2 - t_1$	(5)
in K die Lichtgeschwindigkeit nach links $= 1$	$\Rightarrow$	$x_3 - x_2 \;=\; t_2 - t_3$	(6)
die Uhr A mit der Geschwindigkeit v bewegt	$\Rightarrow$	$x_3 - x_1 \;=\; v(t_3 - t_1)$	(7)

Da die Summe der linken Seiten von (5) und (6) gleich ist der linken Seite von (7), folgt insbesondere

$$t_2 - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_3) = \tfrac{1}{2}v(t_3 - t_1) = \frac{v}{v+1}(t_2 - t_1)\,. \tag{8}$$

Darin folgt die zweite Gleichheit aus der ersten indem man dort die linke Seite in der Form $(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(t_1 - t_3)$ schreibt, was erlaubt $(t_3 - t_1)$ durch $(t_2 - t_1)$ auszudrücken.

Nach Einstein synchronisiert man nun Uhr B mit Uhr A indem man Uhr B so stellt, dass $t'_2 = \frac{1}{2}(t'_1 + t'_3)$. Aus dem Transformationsgesetz (2) folgt

$$\tfrac{1}{2}(t'_1 + t'_3) \;=\; \tfrac{1}{2}a(t_1 + t_3) + \varepsilon x'_A\,, \tag{9}$$

$$t'_2 \;=\; a t_2 + \varepsilon x'_B\,. \tag{10}$$

Die Einsteinsche Vorschrift bedingt nun die Gleichheit beider rechter Seiten. Dies führt auf

$$a\big[t_2 - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_3)\big] + \varepsilon(x'_B - x'_A) = 0\,. \tag{11}$$

Nach (1) gilt unter Benutzung von (5):

$$x'_B - x'_A = b(x_2 - x_1) - v b(t_2 - t_1) = b(1 - v)(t_2 - t_1)\,. \tag{12}$$

Ersetzt man nun in (11) den eckigen Klammerausdruck durch die rechte Seite von (8) und $(x'_B - x'_A)$ durch die rechte Seite von (12), so folgt (4). $\square$

Neben der Einstein-Synchronisation spielt auch das konzeptuell unmittelbar einleuchtende Verfahren des Uhrentransports eine Rolle. Um im System K' eine Uhr am Ort x'_A mit einer Uhr am Ort x'_B zu synchronisieren, nimmt man eine Transportuhr U_T gleichen Typs, synchronisiert sie zunächst am Punkte x'_A mit der dort befindlichen Uhr, transportiert sie dann an den Punkt x'_B und synchronisiert dann die dort befindliche Uhr mit U_T. Wir diskutieren nun diesen Vorgang anhand der Transformationsformeln (1-2).

Der Transport der Uhr U_T von x'_A nach x'_B gehe mit konstanter Geschwindigkeit u' relativ zu K' vonstatten. Setzt man $x' = u't'$ in (1-2) ein, so erhält man $x = ut$ mit einer Geschwindigkeit u von U_T relativ zu K, für die sich folgender Ausdruck ergibt:

$$u = v + u' \cdot \frac{a(v)/b(v)}{1 - \varepsilon(v)u'} . \tag{13}$$

Dies ist das zu (1-2) gehörige Gesetz der Geschwindigkeitsaddition. Wir betrachtet U_T als den Ursprung eines Inertialsystems K'' mit Koordinaten (x'', t''), dass sich mit der Geschwindigkeit u' relativ zu K' und mit der Geschwindigkeit u relativ zu K bewegt. Zwischen K'' und K gelten die (1-2) entsprechenden Transformationsformeln

$$x'' = b(u)(x - ut) , \tag{14}$$

$$t'' = a(u)t + \varepsilon(u)x'' . \tag{15}$$

Die zum Zeitpunkt t in K auf der Uhr U_T angezeigte Zeit t'' erhält man aus (15) durch Einsetzen von $x'' = 0$:

$$t'' = t \cdot a(u) . \tag{16}$$

Hingegen erhält man die zum Zeitpunkt t in K am Ort der Uhr U_T von den in K' ruhenden Uhren angezeigte Zeit, indem man $x' = u't'$ in (2) einsetzt und nach t' auflöst:

$$t' = t \cdot \frac{a(v)}{1 - \varepsilon(v)u'} . \tag{17}$$

Benutzt man nun (16) um aus (17) die Variable t zu eliminieren, so erhält man die von der Uhr U_T angezeigte Zeit t'' als Funktion der an ihrem Ort von den in K' ruhenden Uhren angezeigten Zeit t':

$$t'' = t' \cdot \frac{a(u)}{a(v)} \,(1 - \varepsilon(v)u') . \tag{18}$$

Hierin ist u gemäß (13) als Funktion von v und u' ausgedrückt zu denken, so dass der t' multiplizierende Faktor auf der rechten Seite von (18) eine Funktion von v und u' wird.

Während des Transports der Uhr U_T von x'_A nach x'_B über die Distanz $\Delta x' = |x'_B - x'_A|$ vergeht in K' die Zeit $\Delta t' = \Delta x'/u'$, auf der Uhr U_T hingegen nur die durch (18) gegebene Zeit:

$$\Delta t'' = \frac{\Delta x'}{u'} \cdot \frac{a(u)}{a(v)} \left(1 - \varepsilon(v)u'\right) . \tag{19}$$

Bei Ankunft der Uhr U_T weicht diese gegenüber der am Punkte x'_B ruhenden Uhr also um folgenden Betrag ab :

$$\tau'' := \Delta t'' - \frac{\Delta x'}{u'} = \frac{\Delta x'}{u'} \cdot \left[\frac{a(u)}{a(v)} \left(1 - \varepsilon(v)u'\right) - 1\right] . \tag{20}$$

Wir wollen nun die Bedingung stellen, dass dieser Betrag im Limes $u' \to 0$ verschwindet („unendlich langsamer Uhrentransport“ in K'). Wegen des Faktors $1/u'$ vor der eckigen Klammer in (20) ist dies gleichbedeutend damit, dass die Taylor-Entwicklung in u' des Klammerausdrucks mit quadratischen oder höheren Potenzen beginnt. Nun ist mit (13) (wir schreiben a' für die Ableitung von a)

$$a(u) = a(v) + u'\, a'(v)\, a(v)/b(v) + O\big(u'^2\big) \tag{21}$$

Eingesetzt in den Klammerausdruck ergibt sich, dass automatisch kein Term nullter Ordnung vorhanden ist, und dass der Term erster Ordnung verschwindet, wenn

$$\varepsilon(v) = \varepsilon_T(v) := a'(v)/b(v) . \tag{22}$$

Proposition 2. *Die Synchronisationsvorschrift durch den unendlich langsamen Transport von Uhren impliziert (22).*

Durch Gleichsetzen von $\varepsilon_E(v)$ aus (4) mit $\varepsilon_T(v)$ aus (22) folgt nun als Bedingung für das Übereinstimmen beider Vorschriften eine einfache Differentialgleichung für $a(v)$ ($b(v)$ hebt sich heraus!), die man mit der Forderung $a(v = 0) = 1$ sofort eindeutig lösen kann. Es ergibt sich $a(v) = \sqrt{1 - v^2} = a_{SRT}(v)$. Also gilt

Satz 3. *Die Synchronisationsvorschriften nach Einstein und mit Hilfe unendlich langsam, gleichförmig bewegter Uhren können nur dann übereinstimmen, wenn der Faktor $a(v)$ der Zeitdilatation durch a_{SRT} in (3) gegeben ist.*