Ergänzungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Die Exponentialabbildung

Bezeichne wie gewohnt $\mathrm{End}(V)$ die Algebra aller Endomorphismen (linearer Abbildungen auf sich) des Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Die Multiplikation in der Algebra ist die Komposition von Abbildungen, so dass für $X \in \mathrm{End}(V)$ etwa $X^n = X \circ \cdots \circ X$ (n-fache Komposition) gilt.

Sei exp : $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ die durch ihre Potenzreihe definierte Exponentialabbildung:

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \tag{1}$$

Die Reihe konvergiert absolut, wenn man $\mathrm{End}(V)$ mit irgendeiner der Standardnormen versieht.

Ist $X \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in GL(V)$, und sei $\mathrm{Ad}_A : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ die Abbildung $\mathrm{Ad}_A(X) := A \circ X \circ A^{-1}$. Trivialerweise gilt $\mathrm{Ad}_A(X^n) = (\mathrm{Ad}_A(X))^n$ und deshalb auch

$$\mathrm{Ad}_A \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_A \qquad \forall A \in GL(V)\,. \tag{2}$$

Spur und Determinante

Determinante und Spur sind die bekannten $\mathbb{K}$-wertige Funktionen auf $\mathrm{End}(V)$, die wir mit 'det' und 'spur'. bezeichnen. Für sie gilt

Proposition 1.

$$\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{spur}\,. \tag{3}$$

Beweis. Sei $X \in \mathrm{End}(V)$; ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so betrachte man den komplexifizierten Vektorraum $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$ und setze X $\mathbb{C}$-linear fort. Über $\mathbb{C}$ existiert dann eine Basis $\{e_a\}_{a=1\cdots n}$ von $V_{\mathbb{C}}$ bzw. V (falls es schon komplex war) aus Eigenvektoren von X. (In Matrixsprechweise ist dies äquivalent der Aussage, dass X triangularisierbar ist.) Diese sind auch die Eigenvektoren der Abbildung $\exp(X)$ zu den exponentierten Eigenwerten. Nun ist die Spur einer Abbildung die Summe, die Determinante das Produkt der Eigenwerte. Natürlich gilt, dass das Produkt der exponentierten Eigenwerte von X gleich ist ihrer exponentierten Summe. Das besagt aber gerade (3). □

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V) &:= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \det(f) \neq 0\}\,, && (4)\\ \mathrm{GL}^+(V) &:= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \det(f) > 0\}\,. && (5)\\ & && (6) \end{aligned}$$

Dann zeigt (3), dass das Bild von exp in $\mathrm{GL}^+(V)$ enthalten ist.

Wichtige Spezialfälle

Sei ω eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V und $G \subset \mathrm{GL}(V)$ die Lie-Gruppe der ω-erhaltenden Abbildungen. Wie in Übung 3 von Blatt 6 gezeigt, kann sie und ihre Lie-Algebra wie folgt charakterisiert werden:

$$\begin{aligned} G &= \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid \omega^{\downarrow} \circ A \circ \omega^{\uparrow} = (A^{\top})^{-1}\}\,, && (7)\\ \mathrm{Lie}(G) &= \{X \in \mathrm{End}(V) \mid \omega^{\downarrow} \circ X \circ \omega^{\uparrow} = -X^{\top}\}\,. && (8) \end{aligned}$$

Daraus sieht man sofort, dass $\exp(X) \in G$ falls $X \in \mathrm{Lie}(G)$, denn $\omega^{\downarrow} \circ \exp(X) \circ \omega^{\uparrow} = \exp(\omega^{\downarrow} \circ X \circ \omega^{\uparrow})$, da $\omega^{\uparrow} = (\omega^{\downarrow})^{-1}$.

Einparametrige Untergruppen

Insbesondere verläuft also für jedes $X \in \mathrm{Lie}(G)$ die Kurve $\gamma(t) := \exp(tX)$ in G und verbindet die Gruppenidentität $\gamma(0) = \exp(0) = \mathbf{1}$ mit $g = \exp(X)$. Die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \to G\,, \quad t \mapsto \exp(tX) \tag{9}$$

ist ein Homomorphismus der Abelschen Gruppe $(\mathbb{R},+)$ in die Gruppe $(G,\circ)$; d.h es gilt

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \mathbf{1} && \text{wobei } \mathbf{1} = \text{Identität in } G\,, && (10) \\ \gamma(t+s) &= \gamma(t)\circ\gamma(s) && \forall\, t,s\in\mathbb{R}\,. && (11) \end{aligned}$$

Allgemein nennt man eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to G$ die (10-11) genügt eine *einparameter Untergruppe* von G.

Proposition 2. *Jeder einparameter Untergruppe γ ist von der Form $\gamma(t) = \exp(tX)$, wobei $\dot\gamma = X \in \mathrm{End}(V)$. (Wir setzen $\dot\gamma(t)$ die Ableitung der Funktion γ an der Stelle t und $\dot\gamma := \dot\gamma(0)$.)*

Beweis. Sei $\beta(t) := \gamma(X)\circ\exp(-tX)$, dann ist $\dot\beta(t) = \dot\gamma(t)\circ\exp(-tX) - \gamma(t)\circ X\circ\exp(-tx)$. Differenziert man $\gamma(t+s) = \gamma(t)\circ\gamma(s)$ nach s bei $s=0$, so folgt $\dot\gamma(t) = \gamma(t)\circ X$. Dies zeigt $\dot\beta(t) = 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$; also ist $\beta(t) = \beta(t=0) = \mathbf{1}$. □

Identifikation mit Matrixgruppen

Oft ist es günstig, V mit $\mathbb{K}^n$ und $\mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})$, der Algebra der $n\times n$ – Matrizen zu identifizieren. Dazu einige Bemerkungen: Eine Basis $b := \{e_a\}_{a=1\cdots n}$ von V kann als Isomorphismus $b : V \to \mathbb{K}^n$ aufgefasst werden, der wir folgt charakterisiert ist: Sei $v = v^a e_a$, dann $b(v) := (v^1,\cdots,v^n)$, d.h. b ordnet jedem Vektor seine Komponenten bezüglich sich selbst (der Basis) zu. Dieser Isomorphismus induziert einen Algebren-Isomorphismus wie folgt:

$$M_b : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})\,,\quad f \mapsto M_b(f) := b\circ f\circ b^{-1}\,. \tag{12}$$

Somit können wir *nach Wahl von* b die Vektorräume V und $\mathbb{K}^n$ und die Algebren $\mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})$ identifizieren. Da kein b in der Menge aller Basen von sich aus ausgezeichnet ist, ist auch keine der zugehörigen Identifikationen $V \leftrightarrow \mathbb{K}^n$ bzw. $\mathrm{End}(V) \leftrightarrow \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})$ ausgezeichnet. Man sagt, eine solche Identifikation sei *nicht kanonisch*.

Wir betrachten also zunächst die Abbildung

$$\exp : \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K}) \to GL(n,\mathbb{K})\,. \tag{13}$$

$GL(n,\mathbb{K})$ ist eine offene Untermenge von $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})$, denn sie ist Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}-\{0\}\subset\mathbb{R}$ bezüglich der stetigen Determinantenfunktion, d.h. $GL(n,\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$.

Injektivität und Surjektivität

Im Allgemeinen ist exp weder injektiv noch surjektiv. Ein einfaches Beispiel für fehlende Injektivität ist $G = U(1)$, parametrisiert durch die komplexen Zahlen z mit $|z| = 1$, und $\mathrm{Lie}(G) = i\mathbb{R}$ (imaginären Zahlen), so ist $\exp^{-1}(1) = \{in2\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dies lässt sich auf alle höherdimensionalen Drehgruppen verallgemeinern. Allgemein kann exp nicht injektiv sein wenn G kompakt ist ($\mathrm{Lie}(G)$ ist als Vektorraum nie kompakt.)

Für fehlende Surjektivität führen wir folgendes, für die SRT relevantes Beispiel an. Wir betrachte die Gruppe

$$SL(2,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}\,, \tag{14}$$

und darin Matrizen der Form

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \qquad a \in \mathbb{C} - \{0\}\,. \tag{15}$$

Beachte, dass alle diese Elemente durch eine stetige Kurve mit der Identität verbunden werden können, denn $SL(2,\mathbb{C})$ ist zusammenhängend. (Für lokal wegezusammenhängende topologische Räume sind 'Zusammenhang' und 'Wegezusammenhang' äquivalent). Zum Beispiel verbindet die Kurve

$$A_a(t) = \begin{pmatrix} \exp(t\pi i) & ta \\ 0 & \exp(-t\pi i) \end{pmatrix} \tag{16}$$

die Matrix A_a innerhalb $SL(2,\mathbb{C})$ stetig mit der Identität.

Proposition 3. *Keine Matrix der Form (15) liegt im Bild der Exponentialfunktion.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, also das gälte $\exp(X) = A_a$. Damit $\exp(X) \in SL(2,\mathbb{C})$ muss wegen (3) $\mathrm{spur}(X) = 0$ gelten. Die Eigenwerte von X sind also $\pm\lambda$ und genügen $\exp(\pm\lambda) = -1$, da -1 der Eigenwert von A_a ist. Also ist $\lambda = i\pi$. Insbesondere ist X diagonalisierbar da ihre Eigenwerte verschieden sind. Es existiert also ein $T \in GL(2,\mathbb{C})$, so dass $T \cdot D \cdot T^{-1} = X$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda)$. Dann muss wegen $\exp(\pm\lambda) = -1$ gelten $A_a = \exp(X) = T \cdot \exp(D) \cdot T^{-1} = T \cdot \mathrm{diag}(-1,-1) \cdot T^{-1} = \mathrm{diag}(-1,-1)$, was ein Widerspruch ist. □

Trotz des Fehlens globaler in- und Surjektivität gelten beide lokal. Differenzieren wir die Abbildung $\exp : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ an der Stelle $0 \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$, so erhalten wir die Identitätsabbildung $\mathrm{id} \in \mathrm{End}(\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}))$: $\exp'(0) = \mathrm{id}$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert also eine offene Umgebung $U \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ der Nullmatrix und eine offene Umgebung $V \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ der Einheitsmatrix, so dass $\exp|_U : U \to V$ ein eine glatte (unendlich differenzierbare) Bijektion mit glatter Umkehrung ist. Schränkt man exp auf die Lie-Unteralgebra $\mathrm{Lie}(G) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}$ so erhält man die entsprechenden Aussagen mit $U' = U \cap \mathrm{Lie}(G)$ und $V' = V \cap G$. Außerdem gilt:

Proposition 4. *Ist G zusammenhängende Lie-Gruppe, so ist jedes $A \in G$ das Produkt endlich vieler Exponentialbilder, d.h. es existieren $X_i \in \mathrm{Lie}(G)$, $i = 1, \cdots, n$, so dass*

$$A = \exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \cdots \exp(X_n)\,. \tag{17}$$

Beweis. Sei $G' \subset G$ die Menge der Elemente der Form (17). Diese Menge ist zusammenhängend, denn jedes ihrer Elemente kann durch einen stetigen Pfad mit der Gruppenidentität verbunden werden (ersetze in (17) alle X_i durch tX_i). Außerdem ist klar, das G' eine offene Umgebung der Gruppenidentität enthält, denn das trifft, wie bereits gezeigt, schon für das Bild von exp zu, das ja in G' enthalten ist. Letztlich ist klar, dass G' eine Untergruppe ist, denn das Inverse eines Ausdruckes der Form (17) sowie endliche Produkte solcher Ausdrücke sind wieder von dieser Form. Wir schließen nun wie folgt: Sei $V \subset G'$ eine offene Umgebung V der Gruppenidentität und $g \in G'$, dann ist $V_g := g \cdot V \subset G'$ eine Umgebung von g. In einer topologischen Gruppe G ist aber die Linksmultiplikation mit einem Element g ein Homöomorphismus auf G, denn sie besitzt die stetige Inverse die durch Linksmultiplikation mit g^{-1} gegeben ist. Insbesondere ist die Linksmultiplikation mit g also eine offene Abbildung (bildet offene Mengen in offene Mengen ab). Also ist $g \cdot V$ offene Umgebung von g in G' und damit G' selbst offen in G. G' ist aber auch abgeschlossen, denn die Nebenklassen $g \cdot G'$ sind wie gerade gesehen offen, und G' ist das Komplement der Vereinigung aller von G' verschiedenen Nebenklassen. Da G zusammenhängend ist und $G' \subseteq G$ offen und angeschlossen ist, gilt also $G' = G$. □

Homomorphismen von Lie-Gruppen und ihren Lie-Algebren

Seien $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und $G' \subseteq \mathrm{GL}(n', \mathbb{K})$ Matrixgruppen und $\phi : G \to G'$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus. Sei $X \in \mathrm{Lie}(G)$ und $t \mapsto \gamma_X(t) :=$

$\exp(tX)$ die zugehörige einparametrige Untergruppe in G. Dann ist $t \mapsto \phi \circ \gamma_X$ eine einparametrige Untergruppe von G. Nach Proposition 2 existiert ein $X' \in \mathrm{Lie}(G')$, so dass $\phi \circ \exp(tX) = \exp(tX')$. Ableiten nach t bei $t = 0$ zeigt $X' = \dot{\phi}(X)$, wobei $\dot{\phi} \in \mathrm{Lin}(\mathrm{Lie}(G)\,,\, \mathrm{Lie}(G'))$ die Ableitung der Abbildung ϕ an der Identität $\mathbf{1}_n \in G$ ist. Also gilt

$$\phi \circ \exp = \exp \circ \dot{\phi}\,. \tag{18}$$

In Aufgabe 3 des Übungsblattes 3 wurde bereits gezeigt, dass $\dot{\phi} : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$ ein Lie-Homomorphismus ist.

Somit gehört zu jedem Gruppenhomomorphismus ϕ ein eindeutig bestimmter Lie-Homomorphismus $\dot{\phi}$ der (18) genügt. Sei nun umgekehrt ein Lie-Homomorphismus $f : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$ gegeben. Was kann über Existenz und Eindeutigkeit eines Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to G'$ mit $f = \dot{\phi}$ gesagt werden? Zunächst dies: Existiert ϕ und ist G zusammenhängend, dann ist ϕ eindeutig. Das folgt direkt aus Proposition 4; denn seien ϕ_1 und ϕ_2 so dass $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2$, so stimmen nach (18) und Proposition 4 die Homomorphismen ϕ_1 und ϕ_2 auf allen Elementen der Form (17) überein, also auf ganz G sofern G zusammenhängend ist. Hinsichtlich der Existenz gilt folgendes Resultat, das wir hier aber nicht Beweisen können: Ist G einfach zusammenhängend, so existiert ϕ. Zusammenfassend haben wir

Proposition 5. *Seien* G *und* G' *Lie-Gruppen und* $f : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$ *ein Lie-Homomorphismus. Ist* G *zusammenhängend so existiert höchstens ein Gruppenhomomorphismus* $\phi : G \to G'$*, so dass* $f = \dot{\phi}$*. Ist* G *einfach zusammenhängend, so existiert* ϕ*. Insbesondere gilt: Sind* G *und* G' *Zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so sind die Lie-Gruppen* G *und* G' *genau dann isomorph, wenn ihre Lie-Algebren* $\mathrm{Lie}(G)$ *und* $\mathrm{Lie}(G')$ *es sind.*

Darstellungen

Unter einer (linearen) *Darstellung* der Gruppe G auf dem Vektorraum V versteht man einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \mapsto GL(V)\,. \tag{19}$$

Die Darstellung heisst endlichdimensional wenn V endlichdimensional ist. Unter einer Darstellung einer Lie-Algebra L auf dem Vektorraum V versteht man einen

Lie-Homomorphismus

$$\sigma : L \mapsto \mathrm{End}(V)\,. \tag{20}$$

Allgemein heissen Darstellungen auf V (von Gruppen, Lie-Algebren oder sonstwas) *reduzibel*, wenn es einen (unter der Wirkung der Gruppe, Lie-Algebra oder sonstwas) invarianten Teilraum $V' \subset V$ mit $V' \neq V$ und $V' \neq \{0\}$ gibt. Andernfalls heissen sie irredizibel. Darstellungen heissen *vollreduzibel* oder *zerfällbar*, wenn es zu jedem invarianten Teilraum auch einen invarianten Komplementärraum gibt. Zwei Darstellungen (von Gruppen, Lie-Algebren, etc) ρ_1, ρ_2 auf V_1 bzw. V_2 heissen *verschränkt* (engl. 'intertwined'), wenn es einen linearen Isomorphismus $f : V_1 \to V_2$ gibt, so dass $\rho_2 \circ f = f \circ \rho_1$ (im Englischen heisst solche eine Abbildung f ein 'intertwiner'). Zwei Darstellungen heissen *äquivalent*, wenn sie verschränkt bezüglich eines Isomorphismus' f sind.

Aus Aufgabe 3 von Blatt 5 folgt sofort, dass jede Darstellung einer Lie-Gruppe eine Darstellung ihrer Lie-Algebra induziert, nämlich $\sigma = \dot{\rho}$ (Ableitung an der Identität). Proposition 5 zeigt nun, dass auch die Umkehrung gilt, sofern G zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Also gilt:

Proposition 6. *Ist die Lie-Gruppe G zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so existiert eine Bijektion zwischen den Darstellungen von G auf V und den Darstellungen von L auf V. Ist ρ die Darstellung von G auf V, so ist die Bijektion gegeben durch $\rho \mapsto \dot{\rho}$. Diese Bijektion respektiert alle Reduzibilitäts- und Äquivalenzverhältnisse.*