Ergänzungen zur Vorlesung

Mehr zur Speziellen Relativitätstheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Vetriefendes zum Begriff der Relativgeschwindigkeit

Einleitung

In der durch die Invarianz unter der Galileigruppe gekennzeichneten kinematischen Struktur der Newtonschen Raumzeit, ist der Begriff der Relativgeschwindigkeit zweier bewegter Objekte oder zweier weiterer Inertialsysteme besonders einfach. Ist K ein Inertialsystem bezüglich dem sich zwei weitere Inertialsysteme K_1 und K_2 mit den Geschwindigkeiten $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ bewegen, so ist die von K aus beurteilte Relativgeschwindigkeit zwischen K_1 und K_2 gegeben durch $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$.

Präziser ist damit folgendes gemeint: $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ bezeichnen die (in K gemessenen) Geschwindigkeiten von K_1, K_2 relativ zu K. Das bedeutet, dass K_1, K_2 aus K durch reine Geschwindigkeitstransformationen (genannt 'Boosts') mit den genannten Geschwindigkeiten aus K hervorgehen. Dann ist der Geschwindigkeitsparameter eines Boosts in K, der K_1 in K_2 überführt, durch $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ gegeben.

Der Punkt ist nun, dass die so definierte Relativgeschwindigkeit zwischen K_1 und K_2 *nicht* vom Referenzsystem K abhängt: Sind $\vec{u}'_1$ und $\vec{u}'_2$ die Geschwindigkeiten von K_1 und K_2 in Bezug auf K', dann ist die von K' aus beurteilte Relativgeschwindigkeit zwischen diesen beiden Systemen durch $\Delta\vec{u}' = \vec{u}'_2 - \vec{u}'_1$ gegeben, was aber gleich ist $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$, denn $\vec{u}'_{1,2} = \vec{u}_{1,2} - \vec{v}$, wenn $\vec{v}$ die (von K aus beurteilte) Geschwindigkeit von K' gegenüber K ist.

Letzteres ist natürlich das 'einfache' Vektoradditionsgesetz der Geschwindigkeiten in der Kinematik der Galileigruppe, das also den absoluten Charakter der Relativgeschwindigkeiten impliziert. Nun wird aber in der Kinematik der Lorenzgruppe das Additionsgesetz der Geschwindigkeiten durch ein Komplizierteres ersetzt, und es erhebt sich die Frage, was nun aus dem Begriff der Relativgeschwindigkeit wird. Die Antwort ist, dass Relativgeschwindigkeiten zwischen gegebenen Objekten, die ja grundsätzlich auf ein Referenzsystem bezogen werden müssen, von diesem auch abhängen, die Relativgeschwindigkeit also selbst relativiert wird.

Relativgeschwindigkeiten in der SRT

Sei V ein $n > 2$ – dimensionaler reeller Vektorraum und $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Minkowskimetrik, d.h. eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform der Signatur $(1, -1, \cdots, -1)$. Wir schreiben $\eta(v, w) = v \cdot w$, $v^2 = v \cdot v$, $\|v\| := \sqrt{|v^2}$ und $v^\perp := \{x \in V \mid x \cdot v = 0\}$.

Eine bezüglich η *orthogonale Transformation* (Lorentztransformation) ist ein linearer Isomorphismus $L : V \to V$, so dass $\eta(Lv, Lw) = \eta(v, w)$ für alle $v, w \in V$.

In Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3 wurde gezeigt, dass jede Lorentztransformation die Komposition endlich vieler Spiegelungen an raum- oder zeitartigen Hyperebenen ist. Ist $n \in V$ ein normierter zeit- oder raumartiger Vektor, d.h. ist $n^2 = +1$ bzw. -1, dann ist die Hyperebene $n^\perp$ raum- bzw. zeitartig und die Spiegelung an $n^\perp$ gegeben durch

$$\rho_n := \mathrm{id} - 2\,\frac{n \otimes n^\flat}{n^2}\,. \tag{1}$$

wobei $n^\flat := \eta(v, \cdot\,) \in V^*$ der durch den Isomorphismus $\eta^\downarrow : V \to V^*$ ‘duale Vektor’ (Vektor im Dualraum) zu v ist.

Für zwei normierte zeitartige Vektoren $n \neq m$, die nicht notwendig von gleicher Zeitorientierung sind, gilt

$$\rho_{m-n}(n) = m\,. \tag{2}$$

Dies ist die *eindeutige* Spiegelung die n mit m verbindet: denn gilt gleichzeitig $\rho_x n = m$ und $\rho_y n = m$ so folgt sofort durch gleichsetzen der entsprechenden Ausdrücke nach (1) die lineare Abhängigkeit von x und y und damit die Gleichheit $\rho_x = \rho_y$.

Durch ρ_n wird die Orientierung von V immer invertiert, die Zeitorientierung hingegen genau dann, wenn n zeitartig ist. Die Komposition $\rho_m \circ \rho_n$ erhält damit sowohl die globale als auch die Zeitorientierung, wenn n und m zeitartig sind, ist also Element der Identitätskomponente $\mathcal{L}_+^\uparrow$ der Lorentzgruppe (eigentlich orthochrone Lorentzgruppe). Auch ist leicht zu sehen, dass $\rho_m \circ \rho_n$ die durch n und m aufgespannte Ebene in sich transformiert. Da diese Ebene klarerweise zeitartig ist, handelt es sich bei $\rho_m \circ \rho_n$ also um einen Boost.

Sei umgekehrt $L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ ein Boost dessen zeitartige Ebene die Vierergeschwindigkeit u enthält. Das Bild von u unter L sei v, d.h. $Lu = v$. Dann kann L durch zwei Spiegelungen wie folgt ausgedrückt werden:

$$L(v,u) := \rho_{v+u} \circ \rho_u\,. \tag{3}$$

Beweis: Da sowohl u als auch v zeitartige Vektoren gleicher Zeitorientierung sind ist auch $u+v$ zeitartig und damit $L(v,u) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$. Außerdem transformiert $L(v,u)$ die durch u und v aufgespannte Ebene in sich und fixiert die dazu orthogonalen Vektoren. Also ist $L(v,u)$ ein Boost. Dieser transformiert aber auch u in v, denn $\rho_u(u) = -u$ und $\rho_{v+u}(-u) = v$, wie aus (2) durch setzen von $m = v$ und $n = -u$ folgt. Durch diese Eigenschaften ist aber $L(v,u)$ eindeutig bestimmt.

Benutzt man (1) in (3), so ergibt sich für die lineare Abbildung $L(v,u)$ der folgende Ausdruck:

$$L(v,u) = 1 - \frac{(v+u)\otimes(v+u)^\flat}{1+v\cdot u} + 2\,v\otimes u^\flat \tag{4}$$

Aus dem bisher Gesagten folgt, dass jeder Boost L in einer Ebene, die die Vierergeschwindigkeit u enthält, in der Form $L = \rho_z \circ \rho_u$ geschrieben werden kann. Wegen $\rho_z = L \circ \rho_u$ (ρ_u ist involutiv, d.h. selbstinvers) ist ρ_z eindeutig bestimmt und somit auch der von z erzeugte Strahl. Wie in (3) gesehen, wäre eine mögliche Wahl durch $z = u + Lu$ gegeben.

Sind nun u, v und w drei Vierergeschwindigkeiten, so können wir nach der Klassifikation aller Boosts L fragen, deren Ebene w enthält und u auf v abbildet. Diese Boosts können also alle in der Form $\rho_z \circ \rho_w$ geschrieben werden. Die Kenntnis aus (3), dass $z = w + Lw$, nützt uns hier nichts, denn wir wollen ja z als Funktion der drei gegebenen Vierergeschwindigkeiten u, v und w ausdrücken, so dass auch L als Funktion von ihnen bestimmt wird. Dies gelingt aber sofort mit Hilfe der Bedingung $Lu = v$, denn diese ergibt

$$\rho_z\big(\rho_w(u)\big) = v\,. \tag{5}$$

Da es sich bei $\rho_w(u)$ und v um normierte zeitartige Vektoren (gegensätzlicher Zeitorientierung) handelt, kennen wir nach (2) bereits eine Lösung für z:

$$z = v - \rho_w(u)\,. \tag{6}$$

Dieses z ist zeitartig und hat die gleiche Zeitorientierung wie u, v und w. Die eindeutig bestimmte Spiegelung ρ_z ist also gegeben durch

$$L(w \mid v,u) = \rho_{(v-\rho_w(u))} \circ \rho_w\,. \tag{7}$$

Für $w = u$ reduziert sich dies auf (3), wie es sein muss. Bei festen u, v gibt die durch die Vierergeschwindigkeit w parametrisierte Schar $L(w \mid v, u)$ alle Boosts an, die u auf v abbilden. Allerdings ist die Parametrisierung durch w nicht treu, d.h. die Abbildung $w \mapsto L(w \mid v, u)$ nicht injektiv. So sind etwa alle $L(w \mid v, u)$ gleich, in denen w in der von u und v aufgespannten Ebene liegt. Gilt also $w \in \mathrm{Span}\{u, v\}$, so ist $L(w \mid v, u) = L(v, u)$. Das folgt ohne Rechnung sofort aus der Bemerkung, dass in diesem Falle die rechte Seite von (7) neben der Identität nur Linearkombinationen von $u \otimes u^\flat$, $v \otimes v^\flat$, $u \otimes v^\flat$ und $v \otimes u^\flat$ enthält, so dass $L(w \mid v, u)$ das orthogonale Komplement zu $\mathrm{Span}\{u, v\}$ punktweise fest lässt. Also ist $L(w \mid v, u)$ und $L(v, u)$ Boosts in der uv–Ebene die u auf v abbilden. Boosts in einer gegebenen Ebene sind aber durch das Bild eines einzigen zeitartigen Vektors aus dieser Ebene eindeutig bestimmt.

Es sei nochmals betont, dass es nicht möglich ist einer Lorentztransformation auf dem abstrakten Vektorraum V eindeutig einen Boost-Anteil zuzuordnen. Dies ist nur nach Auszeichnung eines „Beobachters“, also eines Vierergeschwindigkeitsvektors w möglich, *relativ* zu dem die Aufspaltung in Boost -und Rotationsanteil etwa durch Polarzerlegung möglich ist. Diese Polarzerlegung erfolgt dann relativ zu der Euklidischen Struktur $g_w := 2w^\flat \otimes w^\flat - \eta$.

Die durch (7) eindeutig bestimmte Relativgeschwindigkeit von v gegenüber u relativ zu w ist ein Vektor $\vec{\Delta}$ im dreidimensionalen Ruheraum zu w, also in $w^\perp \subset V$. Wählt man eine angepasste Basis in der $w = (1, \vec{0})$, und $u = (u^0, \vec{u})$, $v = (v^0, \vec{v})$, dann ist

$$\vec{\Delta}(w \mid v, u) = (\vec{v} - \vec{u})\, \frac{2(v^0 + u^0)}{(v^0 + u^0)^2 + \|\vec{v} - \vec{u}\|^2}\,, \tag{8}$$

wobei natürlich wegen $u^2 = v^2 = 1$ gilt

$$u^0 = \sqrt{1 + \|\vec{u}\|^2} \quad \text{and} \quad v^0 = \sqrt{1 + \|\vec{v}\|^2}\,. \tag{9}$$

Diese Formel ist noch ein bisschen irreführend, da $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht die relativen Geschwindigkeiten von u und v gegenüber w relativ zu w sind. Letztere sind gegeben durch $\vec{u}_* := \vec{u}/u^0$ und $\vec{v}_* := \vec{v}/v^0$, durch die man (8) leicht ausdrücken kann. Der interessante Punkt dabei ist, dass $\vec{\Delta}(w \mid v, u)$ dann *nicht* mehr proportional zur Differenz $(\vec{v}_* - \vec{u}_*)$ ist. Denkt man sich die Geschwindigkeiten u, v zu Massenpunkten gleicher Ruhemasse gehörig, so sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ proportional zu den jeweiligen Impulsen relativ zu w, so dass die Relativgeschwindigkeit nach (8) proportional zur Impulsdifferenz ist.