Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1 (Allgemeines semidirektes Produkt)

Seien H und G Gruppen und $\alpha : G \to Aut(H)$, $g \mapsto \alpha_g$, ein Homomorphismus der Gruppe G in die Automorphismengruppe von H. Auf der Menge $H \times G$ betrachte man nun folgende Multiplikationsvorschrift

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 \alpha_{g_1}(h_2)\,,\, g_1 g_2)\,. \tag{1}$$

Machen Sie sich zunächst klar, dass die rechte Seite sinnvoll ist. (Welche Multiplikationen beziehen sich auf H, welche auf G?) Zeigen Sie, dass (1) eine Gruppenstruktur definiert. Die Menge $H \times G$ versehen mit dieser Struktur bezeichnet man mit $H \rtimes_\alpha G$ und nennt sie das semidirekte Produkt von H mit G bezüglich α. [Oft nennt man α nicht explizit, wenn es sich aus irgendwelchen Gründen von selbst versteht, welches α gemeint ist.]

Zeigen Sie weiter, dass H und G in natürlicher Weise Untergruppen von $H \rtimes_\alpha G$ sind, wobei H sogar invariant (d.h. normale Untergruppe) ist. Unter welchen Bedingungen an α ist auch G invariant?

Aufgabe 2 (Spezielles semidirektes Produkt)

Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei H die additive Gruppe $\mathbb{K}^n$ und $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Als Abbildung α nimmt man die Identität, was sinnvoll ist, da $Aut(\mathbb{K}^n) \cong GL(n, \mathbb{K})$. Wir schreiben $\alpha_A(a) =: A \cdot a$ (Multiplikation des Vektors a mit der Matrix A.) Das semidirekte Produkt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ ist nun gegeben durch

$$(a_1, A_1)(a_2, A_2) = (a_1 + A_1 \cdot a_2\,,\, A_1 \cdot A_2)\,. \tag{2}$$

Man nennt $\mathbb{K}^n \rtimes G$ auch oft die zu $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ gehörige inhomogene Gruppe IG.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{K} \rtimes G \to GL(n+1, \mathbb{K})$, gegeben durch

$$(a, A) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0^\top \\ a & A \end{pmatrix} \tag{3}$$

ein injektiver Homomorphismus (eine Einbettung) ist. Dabei ist die Matrix auf der rechten Seite 1+n zerlegt, wobei $0^\top$ der n dimensionale Null-Zeilenvektor ist.

Aufgabe 3 (Galilei Gruppe)

Die eigentliche orthochrone (keine Raum- und keine Zeitspiegelungen) inhomogene Galilei Gruppe $IGal_+^\uparrow$ ist das semidirekte-direkte Produkt der eigentlich orthochronen homogenen Galilei Gruppe $Gal_+^\uparrow$ mit der Gruppe $\mathbb{R}^4$ raumzeitlicher Translationen. $Gal_+^\uparrow \subset GL(4, \mathbb{R})$ wird parametrisiert durch räumliche Drehungen

$$R(\mathbf{D}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{D} \in SO(3) \tag{4}$$

und Geschwindigkeitstransformationen (engl. ,,Boosts“)

$$B(\vec{v}) := \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3 . \tag{5}$$

Die allgemeine Transformation in $Gal_+^\uparrow$ ist dann gegeben durch

$$G(\vec{v}, \mathbf{D}) := B(\vec{v}) \cdot R(\mathbf{D}) . \tag{6}$$

Berechnen Sie $G(\vec{v}_1, \mathbf{D}_1) \cdot G(\vec{v}_2, \mathbf{D}_2)$ und stellen Sie dadurch die Gruppenmultiplikation in den Parametern $\vec{v}$ und $\mathbf{D}$ dar. Zeigen Sie, dass

$$Gal_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^3 \rtimes SO(3) . \tag{7}$$

Welchen Transformationen entspricht hier der abelsche Normalteiler $\mathbb{R}^3$? Also gilt

$$IGal_+^\uparrow \cong \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)) . \tag{8}$$

Schreiben Sie ein allgemeines Element von $IGal_+^\uparrow$ anhand der Einbettung $IGal_+^\uparrow \hookrightarrow GL(5, \mathbb{R})$ als 5×5 Matrix an.