Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1 (Orthogonale Transformationen als Spiegelungen)

Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ (hier steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) der Dimension n mit symmetrischer, nicht-ausgearteter Bilinearform $\eta : V \times V \to \mathbb{K}$. (Beachte: Im Allgemeinen ist η indefinit.) Wir schreiben $\eta(v, w) = v \cdot w$, $v^2 = v \cdot v$ und $v^\perp := \{x \in V \mid x \cdot v = 0\}$. Eine bezüglich η *orthogonale Transformation* ist ein linearer Isomorphismus $L : V \to V$, so dass $\eta(Lv, Lw) = \eta(v, w)$ für alle $v, w \in V$.

Sei $v \in V$ mit $v^2 \neq 0$; unter einer *Spiegelung* an der Hyperebene $v^\perp$ versteht man die Abbildung

$$\rho_v(x) := x - 2\,v\,\frac{v \cdot x}{v^2}\,. \qquad (1)$$

Zeigen Sie: ρ_v ist orthogonal und involutiv (d.h. genügt $\rho_v \circ \rho_v = \mathrm{id}$), so dass $\rho_v^{-1} = \rho_v$. Ist L orthogonal, so gilt $L \circ \rho_v \circ L^{-1} = \rho_{Lv}$

Beweisen Sie nun folgenden Satz: Jede orthogonale Transformation ist die Komposition von höchstens $2n - 1$ Spiegelungen.

[Anleitung: Sei L orthogonal, dann existiert $v \in V$ mit $v^2 \neq 0$ (warum?); wir setzen $w := Lv$. Wegen $(w + v) \cdot (w + v) + (w - v) \cdot (w - v) = 4\,v^2 \neq 0$ sind $v + w$ und $w - v$ nicht beide lichtartig. Sei also $(v \mp w)^2 \neq 0$, dann ist $\rho_{v \mp w}(v) = \pm w$ bzw. $\rho_{v \mp w}(w) = \pm v$. Also ist v Eigenvektor zum Eigenwert 1 der orthogonalen Transformation L', die definiert ist durch

$$L' = \begin{cases} \rho_{v-w} \circ L & \text{falls } (v - w)^2 \neq 0 \\ \rho_v \circ \rho_{v+w} \circ L & \text{falls } (v - w)^2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Betrachten Sie nun die orthogonale Transformation $L'\big|_{v^\perp}$ auf dem Unterraum $v^\perp$ mit Bilinearform $\eta\big|_{v^\perp}$ (diese ist nicht ausgeartet; warum?) und schließen Sie induktiv. Benutzen Sie dabei, dass sich jede orthogonale Transformation von $v^\perp$ kanonisch zu einer orthogonalen Transformation von $\mathrm{Span}\{v\} \oplus v^\perp$ fortsetzen lässt. Wieviel Spiegelungen brauchen Sie, wenn nur noch eine Dimension übrig ist?]

Anmerkung: Dieser Satz kann erheblich verschärft werden: Tatsächlich kommt man mit höchstens n Spiegelungen aus (Satz von Cartan-Dieudonné). Der Beweis ist aber etwas aufwendiger.

Aufgabe 2 (Polarzerlegung)

Beweisen Sie: Jede Matrix $A \in GL(n, \mathbb{C})$ ist auf eindeutige Weise das Produkt einer positiv-definiten Hermiteschen Matrix H und einer unitären Matrix U ($U^{-1} = U^\dagger := \overline{U}^\top$):

$$A = HU\,. \tag{3}$$

Ist $A \in GL(n, \mathbb{R})$ so sind auch H und U reell, wobei H positiv-definit und symmetrisch ist und U orthogonal bezüglich dem standard Euklidischen inneren Produkt des $\mathbb{R}^n$ (d.h. $U^{-1} = U^\top$).

Bemerkung: Der Satz gilt genauso mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren auf der rechten Seite von (3). Polarzerlegungen bezüglich unterschiedlicher Reihenfolgen unterscheiden sich im Hermiteschen Faktor, da $A = HU = UH'$ mit $H' = U^\dagger H U$.

[Anleitung: Gegeben $A \in GL(n, \mathbb{C})$, dann ist $\Delta := AA^\dagger$ Hermitesch und positiv-definit. Benutzen Sie nun den Satz, dass jede positiv-definite Hermitesche Matrix eine eindeutige positiv-definite Hermitesche Quadratwurzel hat (Beweis z.B. mit Hilfe des Spektralsatzes). Definieren Sie $H := \sqrt{\Delta}$ und zeigen Sie die Unitarität von $U := H^{-1}A$. Für die Eindeutigkeit nehmen Sie an, dass $A = H_1U_1 = H_2U_2$. Dann ist $H_1 = H_2U_3$ mit unitärem $U_3 = U_2U_1^\dagger$. Da $H_{1,2}$ Hermitesch sind, gilt $H_1^2 = H_1H_1^\dagger = H_2U_3U_3^\dagger H_2^\dagger = H_2^2$. Benutzen Sie erneut obigen Satz um auf $H_1 = H_2$ zu schließen und damit auf $U_1 = U_2$. Der reelle Fall ergibt sich nun einfach durch Einschränken auf reelle Matrizen.]

Aufgabe 3 (Punkte symmetrischer Gleichzeitigkeit)

Die Weltlinien zweier inertialer Beobachter im Minkowski-Raum seien gegeben durch

$$\begin{aligned} G_r(v) &= \{r + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, && (4)\\ G_{r'}(v') &= \{r' + \lambda' v' \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, && (5) \end{aligned}$$

wobei $v^2 = v'^2 = 1$. Wir setzen die Einsteinsche Gleichzeitigkeitsdefinition voraus. Zeigen Sie: Sind die Weltlinien nicht parallel, so gibt es genau ein Punktepaar $(q, q') \in G_r(v) \times G_{r'}(v')$, so dass q' gleichzeitig zu q bezüglich $G_r(v)$ und q gleichzeitig zu q' bezüglich $G_{r'}(v')$ ist.

[Tipp: Setzen Sie $q = r + \lambda v$ und $q' = r' + \lambda' v'$. Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 5 auf Blatt 2, nach dem alle zu $q \in G_r(v)$ gleichzeitigen Ereignisse durch die zu v orthogonale Hyperebene durch q gegeben sind. Leiten Sie damit die zwei linearen Bedingungsgleichungen $(q - q') \cdot v = 0 = (q - q') \cdot v'$ für die zwei Unbekannten λ und λ' an und zeigen Sie dessen eindeutige Lösbarkeit für $v \cdot v' \neq 1$. Was passiert im Fall $v \cdot v' = 1$?]

Aufgabe 4 (Relativgeschwindigkeit)

Zwei Teilchen T_1 und T_2 bewegen sich bezüglich des Inertialsystems K mit den Geschwindigkeiten $\vec{u}_1$ bzw. $\vec{u}_2$. (Wir schreiben $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$ etc.) Zeigen Sie, dass das eine Teilchen im Ruhesystem K' des jeweils anderen folgenden Geschwindigkeitsbetrag besitzt:

$$u = \frac{\sqrt{(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^2 - \left(u_1^2 u_2^2 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)^2\right)}}{1 - \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2} \tag{6}$$

[Tipp: Berechnen Sie das Minkowski-Skalarprodukt der Vierergeschwindigkeiten beider Teilchen, einmal bezüglich K und einmal bezüglich K'. Benutzen Sie nun die Invarianz des Skalarproduktes.]

Aufgabe 5 (Elastischer Stoß im Ruhesystem eines Teilchens)

Zwei Teilchen T_1 und T_2 gleicher Ruhemasse m stoßen im Ruhesystem von T_2 elastisch zusammen. Die Geschwindigkeit von T_1 vor dem Stoß sei $\vec{u}$, nach dem Stoß seien die Geschwindigkeiten von T_1 und T_2 durch $\vec{u}_1$ bzw. $\vec{u}_2$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Winkel θ zwischen $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ gegeben ist durch

$$\cos\theta = \frac{(1-\sqrt{1-u_1^2})(1-\sqrt{1-u_2^2})}{u_1 u_2}\,. \tag{7}$$

[Tipp: Benutzen Sie den Erhaltungssatz der Viererimpulse und quadrieren Sie den räumlichen und zeitlichen Anteil separat.]

Wir haben $c = 1$ gesetzt. Führen Sie c in (7) wieder ein und diskutieren Sie den Newtonschen Grenzfall.