Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1 (Anisotrope Lichtgeschwindigkeiten)

Sei K ein Inertialsystem mit Koordinaten $(t, \vec{x})$, in dem die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen den Wert besitzt, so dass insbesondere die Uhren in K nach der Einsteinschen Vorschrift synchronisiert sind. Die Transformationsformeln auf ein neues Inertialsystem K' mit Koordinaten $(t', \vec{x}')$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} t' &= a(v)t + \varepsilon(v)x' \,, \\ x' &= b(v)(x - vt) \,, \\ y' &= d(v)\, y \,, \\ z' &= d(v)\, z \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Uhren in K' werden nun ebenfalls nach der Einsteinschen Vorschrift synchronisiert, so dass (siehe Vorlesung)

$$\varepsilon(v) = -\frac{va(v)}{(1 - v^2)b(v)} \,. \tag{2}$$

Zeigen Sie: Ein Lichtstrahl, der in K' unter dem Winkel θ' (gemessen in K') zur x'–Achse verläuft, hat die (in K' gemessene) Lichtgeschwindigkeit

$$c'(\theta', v) = \frac{b(v)(1 - v^2)}{a(v)\sqrt{\cos^2\theta' + b^2(v)d^{-2}(v)(1 - v^2)\sin^2\theta'}} \,. \tag{3}$$

[Anleitung: Nach Voraussetzung genügt in K die Lichtausbreitung der Gleichung:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta t)^2 \,. \tag{4}$$

Leiten Sie aus (1) die Transformationen ab, die die ungestrichenen Koordinaten als Funktion der gestrichenen darstellen und übersetzen Sie damit (4) in eine quadratische Bedingung an die gestrichenen Koordinatendifferenzen. Setzen Sie darin $\Delta x' = \Delta t' \, c' \cos\theta'$, $\Delta y' = \Delta t' \, c' \sin\theta'$ und $\Delta z' = 0$ (letzteres is wegen der Rotationssymmetrie um die x'–Achse o.B.d.A. möglich) und lösen Sie die entstehende quadratische Gleichung für c'.]

Aufgabe 2 (Der Thomaswinkel)

In der SRT sind reine ,,Boosts" (Geschwindigkeitstransformationen) gegeben durch

$$B(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\vec{\beta}^\top \\ \gamma\vec{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma - 1)\vec{\beta} \otimes \vec{\beta}^\top \end{pmatrix} , \tag{5}$$

wobei $\beta := \vec{v}/c = \vec{n}\beta$ mit $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ und $\gamma = \gamma(\beta) := 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Betrachten Sie nun die Polarzerlegung der Komposition zweier Boosts:

$$B(\vec{\beta}_1) \circ B(\vec{\beta}_2) = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{a}^\top \\ \vec{b} & \mathbf{M} \end{pmatrix} = B(\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) \circ R(\mathbf{T}[\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2]) \, . \tag{6}$$

In der Vorlesung wurde abgeleitet, dass die Komposionsgeschwindigkeit gegeben ist durch

$$\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2 = \frac{\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_{2\|} + \gamma_1^{-1}\vec{\beta}_{2\perp}}{1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2} , \tag{7}$$

wobei $\|$ und $\perp$ die Projektionen parallel und senkrecht zu $\vec{\beta}_1$ bezeichnen. Außerdem war

$$\gamma = \gamma(\vec{\beta}_1 \star \vec{\beta}_2) = \gamma_1\gamma_2(1 + \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2) \, . \tag{8}$$

Für die Thomasrotation wurde gezeigt, dass sie eine Drehung um den Winkel θ in der negativ orientierten $\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2$–Ebene ist, wobei

$$\cos\theta = 1 - \frac{(\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)}{\gamma + 1} \sin^2\varphi \, . \tag{9}$$

Zeigen sie, dass sich dieser Ausdruck in folgender symmetrischer Form schreiben läßt:

$$\cos\theta = \frac{(1 + \gamma + \gamma_1 + \gamma_2)^2}{(1+\gamma)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)} \; - \; 1 \, . \tag{10}$$

[Tipp: Eliminieren Sie $\sin\varphi$ zugunsten von γ, γ_1 und γ_2 mit Hilfe von (8).]