Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von Domenico Giulini

Blatt 5

Vorbereitendes

Definition: Im Folgenden sei mit $\mathbb{K}$ stets $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gemeint. Eine *Lie-Algebra* L über $\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einer Abbildung (genannt Lie-Klammer) $L \times L \to L$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, die folgende Bedingungen erfüllt (zu lesen als gültig für alle $X, Y, Z \in L$ und alle $a \in \mathbb{K}$):

$$[X, Y] = -[Y, X] \qquad \text{(Antisymmetrie)} \tag{1}$$

$$[aX + Y, Z] = a[X, Z] + [Y, Z] \qquad \text{(Linearität)} \tag{2}$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \text{(Jacobi-Identität)} \tag{3}$$

Ist $L' \subset L$ ein Untervektorraum, so dass $[X, Y] \in L'$ für alle $X, Y \in L'$, so ist L' bezüglich der Einschränkung der Lie-Klammer auf L' eine Lie-Algebra. Man sagt, L' ist Lie-Unteralgebra von L. Eine Unteralgebra L' heisst Ideal, falls $[X, Y] \in L'$ für alle $X \in L'$ und alle $Y \in L$ (sic). Eine lineare Abbildung $f : L_1 \to L_2$ zwischen den Lie-Algebren $(L_1, [\cdot, \cdot]_1)$ und $(L_2, [\cdot, \cdot]_2)$ heisst Lie-Homomorphismus, falls $f([X, Y]_1) = [f(X), f(Y)]_2$.

Aufgabe 1 (Endomorphismen bilden Lie Algebra)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Mit $\mathrm{End}(V)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen $V \to V$ (sog. Endomorphismen). Zeigen Sie: $\mathrm{End}(V)$ ist eine Lie-Algebra, wenn $[f, g] := f \circ g - g \circ f$. Sehen Sie das als Spezialfall der allgemeinen Aussage, dass jede assoziative Algebra zu einer Lie-Algebra wird, wenn man die Lie-Klammer als Kommutator definiert. Beweisen Sie diese.

Aufgabe 2 (Lie Algebren von Matrixgruppen)

Sei G eine Matrixgruppe, d.h. Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$. Mit $C^1_*(\mathbb{R}, G)$ bezeichnen wir die Menge aller einmal stetig differenzierbaren Abbildungen $A : \mathbb{R} \to G$, für die $A(0) = \mathbf{1}_n$. Mit $\dot{A}$ bezeichnen wir die Ableitung von A an der Stelle $0 \in \mathbb{R}$, d.h. $\dot{A} := dA(s)/ds|_{s=0}$. Wir definieren

$$L_G := \left\{ \dot{A} \mid A \in C^1_*(\mathbb{R}, G) \right\} \subset \mathrm{End}(\mathbb{K}^n) . \tag{4}$$

Zeigen Sie: L_G ist eine reelle (sic) Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$

[Anleitung. Seien A und B in $C^1_*(\mathbb{R}, G)$ mit $\dot{A} = X$ und $\dot{B} = Y$. Man definiere $C(s) := A(s) \cdot B(as)$. Was ist $\dot{C}$? Um zu zeigen, dass $[X, Y] \in L_G$ betrachte man die Kurve

$$C(s) := \begin{cases} A(\tau(s)) \cdot B(\tau(s)) \cdot A^{-1}(\tau(s)) \cdot B^{-1}(\tau(s)) & \text{für } s \geq 0 , \\ B(\tau(s)) \cdot A(\tau(s)) \cdot B^{-1}(\tau(s)) \cdot A^{-1}(\tau(s)) & \text{für } s \leq 0 , \end{cases} \tag{5}$$

wobei

$$\tau(s) := \begin{cases} \sqrt{s} & \text{für } s \geq 0 , \\ -\sqrt{-s} & \text{für } s \leq 0 . \end{cases} \tag{6}$$

Man zeige $C \in C^1_*(\mathbb{R}, G)$ und $\dot{C} = [X, Y]$. Etwas kniffelig ist nur der Nachweis der Differenzierbarkeit bei $0 \in \mathbb{R}$. Das geht etwa so:

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \lim_{s \to 0} \frac{C(s) - \mathbf{1}_n}{s} = \lim_{s \to 0} \left\{ \frac{[A(\tau(s)), B(\tau(s))] A^{-1}(\tau(s)) B^{-1}(\tau(s))}{s} \right\} \\ &= \lim_{\tau \to 0} \left\{ \left[\frac{A(\tau) - \mathbf{1}_n}{\tau} , \frac{B(\tau) - \mathbf{1}_n}{\tau} \right] A^{-1}(\tau) B^{-1}(\tau) \right\} = \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Aufgabe 3 (Homomorphismen von Gruppen und ihren Lie-Algebren)

Seien G und H Matrixgruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Mit $\dot{\phi}$ sei die Ableitung von ϕ an der Stelle $\mathbf{1}_n \in G$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\dot{\phi}$ ein Lie-Homomorphismus von L_G nach L_H ist.

[Tipp: Zum Nachweis $\dot{\phi}([X, Y]) = [\dot{\phi}(X), \dot{\phi}(Y)]$ betrachte man wie in Aufgabe 2 Kurven A und B in G mit $\dot{A} = X$ und $\dot{B} = Y$, sowie die abgebildeten Kurven $A' := \phi \circ A$ und $B' := \phi \circ B$ in H. Mit letzteren führe man dann die Konstruktion (5-7) durch.]