Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Vorbereitendes

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und V^* der zugehörige Dualraum (Vektorraum über $\mathbb{K}$ aller linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$). Einer linearen Abbildung $A : V \to V$ entspricht kanonisch eine lineare Abbildung $A^\top : V^* \to V^*$, gegeben durch $A^\top(\alpha) := \alpha \circ A$. Man nennt sie die zu A *(kanonisch) transponierte Abbildung*.

Ist ω eine (nicht notwendig symmetrische) nicht ausgeartete Bilinearform auf V, so definiert diese einen Isomorphismus

$$\omega^\downarrow : V \to V^* \,, \qquad \omega^\downarrow(v) := \omega(v, \cdot)\,. \tag{1}$$

Die dazu inverse Abbildung sei

$$\omega^\uparrow : V^* \to V \,, \qquad \omega^\uparrow := (\omega^\downarrow)^{-1}\,, \tag{2}$$

so dass

$$\omega^\uparrow \circ \omega^\downarrow = \mathrm{id}_V \qquad \text{und} \qquad \omega^\downarrow \circ \omega^\uparrow = \mathrm{id}_{V^*}\,. \tag{3}$$

In Komponenten entspricht $\omega^\downarrow$ und $\omega^\uparrow$ dem „Herunter-“und „Heraufziehen von Indizes“ (siehe unten).

Bezüglich ω kann man ebenfalls jeder Abbildung $A : V \to A$ eindeutig eine *ω-transponierte Abbildung* zuordnen, die definiert ist durch:

$$A^t : V \to V \,, \qquad \omega(A^t v, w) = \omega(v, Aw) \quad \forall v, w \in V\,. \tag{4}$$

Man beachte, dass Transponierte und ω-Transponierte zwischen *verschiedenen* Räumen stattfinden.

Aufgabe 1 (Transponierte und ω-transponierte Abbildung)

Zeigen Sie, dass zwischen transponierter und ω-transponierter Abbildung folgende Beziehung besteht:

$$A^t = \omega^\uparrow \circ A^\top \circ \omega^\downarrow \quad \text{bzw.} \quad A^\top = \omega^\downarrow \circ A^t \circ \omega^\uparrow \,. \tag{5}$$

Aufgabe 2 (Duale und ω-duale Basen. Das „Herunter-“ und „Heraufziehen von Indizes“)

Sei $\{e_a\}_{a=1,\cdots,n}$ eine Basis von V und $\{\eta_a\}_{a=1,\cdots,n}$ die *(kanonische) Dualbasis* von V^*, die definiert ist durch

$$\eta^a(e_b) = \delta^a_b \,. \tag{6}$$

Mit Hilfe von $\omega^\downarrow$ und $\omega^\uparrow$ kann man auch jeweils zu $\{e_a\}$ und $\{\eta^a\}$ die ω-dualen Basen definieren:

$$\eta_a := \omega^\downarrow(e_a) \in V^* \,, \tag{7}$$
$$e^a := \omega^\uparrow(\eta^a) \in V \,. \tag{8}$$

Sei nun $\omega_{ab} := \omega(e_a, e_b)$ und seien ω^{ab} die Komponenten der zu $\{\omega_{ab}\}$ transponiert-inversen Matrix, so dass also gilt:

$$\omega_{ac}\omega^{bc} = \delta^b_a \quad \text{und} \quad \omega_{ca}\omega^{cb} = \delta^b_a \,. \tag{9}$$

(Beachte: Die zweite der Gleichungen (9) folgt aus der ersten, ohne dass dabei irgendwelche Symmetrieeigenschaften an die Matrix $\{\omega_{ab}\}$ gestellt würden.)

Zeigen Sie nun

$$\eta_a := \omega^\downarrow(e_a) = \omega_{ab}\eta^b \,, \tag{10}$$
$$e^a := \omega^\uparrow(\eta^a) = \omega^{ba}e_b \,, \tag{11}$$

so dass

$$\eta_a(e_b) = \omega_{ab} \qquad \text{und} \qquad \eta^a(e^b) = \omega^{ab} \,. \tag{12}$$

Bezieht man in Komponentenschreibweise alle Komponenten auf die kanonisch-dualen Basen, so dass $v = v^a e_a \in V$ und $\omega^\downarrow(v) =: v_a \eta^a$ bzw. $\alpha = \alpha_a \eta^a \in V^*$

und $\omega^{\uparrow}(\alpha) =: \alpha^a e_a$, so hat man die zu (10-11) äquivalenten Koordinatengleichungen:

$$v_a = v^b \omega_{ba}\,, \tag{13}$$
$$\alpha^a = \omega^{ab}\eta_b\,. \tag{14}$$

Aus (10,13)) und (11,14) wird ersichtlich, warum man die Abbildungen $\omega^{\downarrow}$ und $\omega^{\uparrow}$ das „Herunter-“ bzw. „Heraufziehen von Indizes“ nennt.

Einige Bemerkungen zu Konventionen und deren Konsistenz

Aus dem Vergleich von (13) mit (14) fällt auf, dass beim Herunterziehen über den ersten, beim Heraufziehen über den zweiten Index an ω summiert wird (an den Basen (10) und (11) ist es genau umgekehrt). Dies war eine Folge folgender Forderungen: 1) Herunter- und Heraufziehen von Indizes sind inverse Operationen, 2) die zum Heraufziehen benutzte Matrix $\{\omega^{ab}\}$ ist die *transponiert* inverse zu $\{\omega_{ab}\}$. Forderung 1) ist klar; aber warum 2) ? Die Antwort ist: damit Konsistenz beim Indexverschieben an ω selbst gegeben ist. Hier wird man nämlich folgendes fordern: zieht man an ω^{ab} die Indizes herunter, so soll man ω_{ab} erhalten; entsprechend soll man ω^{ab} durch Heraufziehen der Indizes an ω_{ab} erhalten. Also muss gelten

$$\underbrace{\omega^{cd}\omega_{ca}}_{\delta^d_a}\omega_{db} = \omega_{ab} \qquad \text{und} \qquad \omega^{ac}\underbrace{\omega^{bd}\omega_{cd}}_{\delta^b_c} = \omega^{ab} \tag{15}$$

was aber gerade (9) bedingt, wie durch die geschweiften Klammern in (15) angedeutet. Also muss $\{\omega^{ab}\}$ die *Transponiert*-Inverse zu $\{\omega_{ab}\}$ sein. (Achtung: Das wird in der Literatur manchmal nicht beachtet, was dann zu Inkonsistenten Notationen führt.)

Zuletzt sein noch bemerkt, dass man für solche ω die weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind, eigentlich zwei unabhängige Operationen für $\omega^{\downarrow}$ hat, nämlich einmal die durch (1) definierte, und einmal $\tilde{\omega}^{\downarrow}(v) := \omega(\cdot, v)$ (v im zweiten statt ersten Argument). Für die zweite Operation gelten dann alle oben gezeigten Formeln mit $\{\omega_{ab}\}$ und $\{\omega^{ab}\}$ entsprechend weiter, wenn man $\{\omega_{ab}\}$ und $\{\omega^{ab}\}$ durch ihre transponierten Matrizen ersetzt.

Aufgabe 3 (Lie Gruppen die quadratische Formen invariant lassen und ihre Lie Algebren)

Sei V und ω wie oben, und $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen von V. Man betrachte darin die Untergruppe aller Abbildungen, die ω invariant lassen:

$$G := \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid \omega(Av, Aw) = \omega(v, w),\ \forall v, w \in V\}. \tag{16}$$

Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist zu

$$G := \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid \omega^{\downarrow} \circ A \circ \omega^{\uparrow} = (A^{\top})^{-1}\}. \tag{17}$$

Zeigen Sie weiter, dass Lie Algebra von G gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(G) &= \{X \in \mathrm{End}(V) \mid \omega^{\downarrow} \circ X \circ \omega^{\uparrow} = -X^{\top}\} \\ &= \{X \in \mathrm{End}(V) \mid X = -X^{t}\}. \end{aligned} \tag{18}$$

In Komponenten bezüglich kanonisch-dualer Basen ist $X = X^a_b\, e_a \otimes \eta^b$ und $X^{\top} = X^a_b \eta^b \otimes e_a$. Zeigen Sie:

$$X = X^a_b\, e_a \otimes \eta^b \in \mathrm{Lie}(G) \iff \omega_{cb} X^c_a + \omega_{ac} X^c_b = 0\,. \tag{19}$$

Wir schränken uns nun auf symmetrische oder antisymmetrische ω ein, so dass also $\omega_{ab} = \epsilon\omega_{ba}$ mit $\epsilon = \pm 1$. Ferner sei $X_{ab} := X^c_b \omega_{ca}$ (vgl. (13)); dann gilt

$$X = X^a_b\, e_a \otimes \eta^b \in \mathrm{Lie}(G) \iff X_{ab} = -\epsilon X_{ba}\,. \tag{20}$$

Eine Basis der Lie Algebra ist also gegeben durch die $\frac{1}{2}n(n - \epsilon)$ Vektoren

$$M_{ab} := e_a \otimes \eta_b - \epsilon e_b \otimes \eta_a\,, \tag{21}$$

wobei $1 \le a < b \le n$ für $\epsilon = 1$ und $1 \le a \le b \le n$ für $\epsilon = -1$. Zeigen Sie, dass deren Lie Klammern gegeben sind durch

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \omega_{ad} M_{bc} + \omega_{bc} M_{ad} - \epsilon\omega_{ac} M_{bd} - \epsilon\omega_{bd} M_{ac}\,. \tag{22}$$