Übungen zur Vorlesung

Weiterführende Themen zur SRT

von DOMENICO GIULINI

Blatt 7

Aufgabe 1 (Exponentialabbildung)

Beweisen Sie: Liegt $g \in G$ im Bild der Exponentialabbildung, dann existiert ein (nicht notwendig eindeutiges) Element $h \in G$, so dass $h^2 = g$.

Aufgabe 2 ($\mathbf{SL}(\mathbf{2}, \mathbb{R})$ und Exponentialabbildung)

Gegeben sei die Gruppe

$$SL(2, \mathbb{R}) := \{A \in Mat(2, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}. \tag{1}$$

Betrachte Sie Elemente der Form

$$\begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{R}_+ - \{1\} \tag{2}$$

und beweisen Sie, dass diese nicht im Bild der Exponentialabbildung liegen. [Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 1.]

Aufgabe 3 (Inhomogene pseudo-orthogonale Lie-Algebren sind perfekt)

Eine Lie-Algebra heisst *perfekt*, wenn die lineare Hülle ihre Kommutatoren die ganze Algebra ergeben, d.h.

$$Span\{[X, Y] \mid X, Y \in L\} = L\,. \tag{3}$$

Sei nun ω eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform auf dem reellen Vektorraum V der Dimension n. Mit $G \subset GL(V)$ sei die Gruppe aller ω-erhaltenden Isomorphismen von V bezeichnet (vgl. Blatt 6, Aufgabe 3). Die zugehörige inhomogene Gruppe ist $IG := V \rtimes G$, deren Lie Algebra gegeben ist durch $\mathrm{Lie}(IG) = V \rtimes \mathrm{Lie}(G)$, d.h. dass für (a, X) und (b, Y) in $\mathrm{Lie}(IG)$ gilt:

$$[(a, X), (b, Y)] = (X(b) - Y(a)\,,\ [X, Y])\,. \tag{4}$$

Sei nun $\{e_a\}_{a=1\cdots n}$ eine Basis von V und $\{\eta_a\}_{a=1\cdots n}$ die zugehörige Dualbasis von V^*. Wie immer ist $\omega_{ab} := \omega(e_a, e_b)$ und $\eta_a := \omega_{ab}\eta^b$. Eine Basis der $\frac{1}{2}n(n+1)$–dimensionalen Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(IG)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M_{ab} &:= e_a \otimes \eta_b - e_b \otimes \eta_a \qquad && \text{für } 1 \le a < b \le n\,, && (5)\\ T_a &:= e_a && \text{für } 1 \le a \le n\,. && (6) \end{aligned}$$

Rechnen Sie nach, dass die Lie Algebra in dieser Basis folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= \omega_{ad}M_{bc} + \omega_{bc}M_{ad} - \omega_{ac}M_{bd} - \omega_{bd}M_{ac}\,, && (7)\\ [M_{ab}, T_c] &= \omega_{bc}T_a - \omega_{ac}T_b\,, && (8)\\ [T_\alpha, T_\beta] &= 0\,. && (9) \end{aligned}$$

Zeigen Sie damit, dass $\mathrm{Lie}(IG)$ perfekt ist, sofern $n \ge 3$. [Tipp: Indem man (7) und (8) geeignet mit $\{\omega^{ab}\}$ (der inversen Matrix zu $\{\omega_{ab}\}$) kontrahiert, kann man jedes M_{ab} und T_a explizit als Summe von Kommutatoren darstellen.]

Aufgabe 4 (Darstellung von Lie Algebren durch Differentialoperatoren)

Die Situation sei wie in Aufgabe 3. Mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wir die Menge aller glatten (d.h. unendlich oft differenzierbaren) Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$. Zu $X \in \mathrm{Lie}(IG)$ definieren wir den Differentialoperator

$$\hat{X}f := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \exp(-tX) \quad \forall f \in \mathcal{F}\,. \tag{10}$$

Durch die Basis $\{e_a\}_{a=1\cdots n}$ können wir V mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren und $\mathcal{F}$ mit den reell-wertigen glatten Funktionen der n Koordinaten $\{x^1, \cdots, x^n\}$. Wir setzen $x_a := \omega_{ab}x^b$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{M}_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \quad \text{und} \quad \hat{T}_a := -\partial_a \tag{11}$$

und dass $\hat{M}_{ab}$ und $\hat{T}_a$ die Kommutatorrelationen (7-9) erfüllen. Zeigen Sie mit (10) ganz allgemein, dass

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \widehat{[X, Y]}\,. \tag{12}$$