Mathematische Ergänzungen zur Vorlesung
Theorie der fundamentalen Wechselwirkungen
SS 2022

Domenico Giulini
Institut für Theoretische Physik
Appelstraße 2
30167 Hannover

In dieser Sammlung von Ergänzungen stellen wir einige elementare aber nützliche matematische Dinge zusammen, deren Verständnis hier und in anderen Vorlesungen eigentlich immer vorausgestzt wird, deren Erklärung aber oft weiterdelegiert wird – nicht selten im Kreis.

Contents

Chapter 1

Vektorräume mit innerem Produkt

1.1 Reelle und komplexe Vektorräume

Im Folgenden betrachten wir endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{F}$, wobei $\mathbb{F}$ entweder für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ steht. Dann bezeichnet V^* den Dualraum, d.h. den $\mathbb{F}$-Vektorraum aller $\mathbb{F}$-linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{F}$. V und V^* sind von gleicher Dimension und folglich isomorph. Diese Isomorphie ist aber nicht natürlich (oder kanonisch), d.h. es existiert kein *ausgezeichneter* Isomorphismus. Vielmehr ist jeder Isomorphismus mit der Wahl einer nicht-ausgearteten Bilinearform auf V eineindeutig assoziiert. Davon wird weiter unten ausgiebig die Rede sein. Wir bezeichnen Vektoren in V mit kleinen lateinischen Buchstaben, wie $a, b, \dots, u, v, w$, und Vektoren in V^* mit kleinen griechischen Buchstaben, wie $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu$.

Definition 1. Sind V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{F}$, dann ist die Menge $\mathrm{Lin}(V, W)$ der $\mathbb{F}$-linearen Abbildungen von V nach W selbst ein Vektorraum über $\mathbb{F}$: Sind $f_{1,2} \in \mathrm{Lin}(V, W)$ und $a \in \mathbb{F}$, dann $(f_1 + af_2)(v) := f_1(v) + af_2(v)$ für alle $v \in V$. Ist $W = V$, dann heißt die Menge

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Lin}(V, V) \tag{1.1}$$

die *Endomorphismen* von V. $\mathrm{End}(V)$ ist eine assoziative Algebra mit Identität, wobei die Multiplikation durch die Komposition der Abbildungen gegeben ist und die Identität durch die Identitätsabbildung. Die Untermenge

$$\mathrm{GL}(V) := \left\{X \in \mathrm{End} \mid \det(X) \neq 0\right\} \subset \mathrm{End}(V) \tag{1.2}$$

der invertierbaren Endomorphismen bilden keine Algebra mehr, dafür aber eine Gruppe, wobei die Gruppenmultiplikation wieder die Komposition von Abbildungen ist und das neutrale Element die Identitätsabbildung ($\mathrm{End}(V)$ selbst ist keine Gruppe bezüglich der Komposition, da das Inverse i.A. nicht existiert). Sie heißt die *allgemeine lineare Gruppe* von V (englisch: General Linear Group).

Der zu V^* duale Raum V^{**} ist wegen der Dimensionsgleichheit ebenfalls zu V isomorph, diesmal aber sogar natürlich (oder kanonisch). Der natürliche Isomorphismus (der also ohne Angabe weiterer Strukturen auskommt) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} i : V &\to V^{**} \quad \text{(linear)} \\ v &\mapsto i(v) : \alpha \mapsto i(v)(\alpha) := \alpha(v) \quad \forall \alpha \in V^* \,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

In Zukunft werden wir V^{**} und V mehr oder weniger stillschweigend identifizieren.

Ist $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ so existieren neben V und V^* zwei weitere zu V assoziierte komplexe Vektorräume gleicher Dimension, nämlich der zu V komplex-konjugierte Vektorraum $\bar{V}$ und sein Dualraum $\bar{V}^*$. Im Hinblick auf die Identifikation von V mit V^{**} charakterisieren wir $\bar{V}$ als den Vektorrum der *anti*-linearen Abbildungen $V^* \to \mathbb{C}$. Wieder gilt, dass $\bar{V}$ zwar isomorph aber nicht natürlich-isomorph zu V ist. Allerdings existiert ein natürlicher Anti-Isomorphismus, d.h. eine anti-lineare Bijektion zwischen diesen Räumen, die gegeben ist durch (überstreichen einer komplexen Zahl bezeichnet ihr Komplex-Konjugiertes)

$$\begin{aligned} j : V &\to \bar{V} \quad \text{(anti-linear)} \\ v &\mapsto j(v) : \alpha \mapsto j(v)(\alpha) := \overline{\alpha(v)} \quad \forall \alpha \in V^* \,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Statt $j(v)$ schreibt man auch oft einfach $\bar{v}$, muss sich jedoch klar machen, dass der in diesem Sinne zu v "'komplex-konjugierte"' Vektor nicht wieder in V sondern einem davon verschiedenen (nicht natürlich isomorphen) Vektorraum $\bar{V}$ liegt.

Bemerkung 2. Es gibt weitere natürliche Isomorphismen $(\bar{V})^* \cong \overline{V^*}$, also zwischen dem Dualraum von $\bar{V}$ und dem komplex-konjugierten von V^*, sowie $\bar{\bar{V}} \cong V$, also dem doppelt komplex-konjugierten von V und V selbst. Nach Identifikation dieser natürlich isomorphen Räume ist die Reihe der zum komplexen Vektorraum V natürlich assoziierten komplexen Vektorräume gleicher Dimension mit V^*, $\bar{V}$ und $\bar{V}^*$ also erschöpft. Natürlich kann man dann noch beliebige Tensorprodukte zwischen diesen vier Vektorräumen bilden, was aber außer für $\dim(V) = 1$ zu höherdimensionalen Vektorräumen führt. □

Der allgemeine strukturelle Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Vektorräumen wird in der Physik sehr häufig verwischt, was zu irritierenden und bisweilen auch falschen Aussagen führt. Der Wechsel zwischen den Grundkörpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ kann auf verschiedene Weisen geschehen, die jeweils an das Vorliegen bestimmter struktureller Vorgaben gebunden sind. Diese strukturellen Vorgaben müssen klar und eindeutig benannt werden.

Definition 3. Sei V reeller Vektorraum. Eine *komplexe Struktur* auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Selbstabbildung

$$J : V \to V \,, \quad \text{mit} \quad J \circ J = -\mathrm{id}_V \,. \tag{1.5}$$

Eine sofortige Folge von $J \circ J = -\mathrm{id}_V$ ist, dass $-J = J^{-1}$, insbesondere ist also J ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus. Eine weiterere sofortige Folge von $J \circ J = -\mathrm{id}_V$ erhält man durch Determinantenbildung auf beiden Seiten: $[\det(J)]^2 = (-1)^{\dim(V)}$. Also muss $\dim(V)$ gerade sein (da $\det(J) \in \mathbb{R}$). Komplexe Strukturen existieren also nur in reellen Vektorräumen gerader Dimension. □

Bemerkung 4. Ist (V, J) ein reeller Vektorraum mit komplexer Struktur, so kann man V zu einem komplexen Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$ machen, indem man die skalare Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}$ so erklärt: Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, und $v \in V$; dann $zv := av + bJ(v)$. Man beachte, dass V und $V_{\mathbb{C}}$ als Mengen und Abel'sche Gruppen (mit $+$ als Gruppenmultiplikation) identisch sind. Lediglich die skalare Multiplikation wird mit Hilfe der Abbildung J von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erweitert. Die komplexe Dimension von $V_{\mathbb{C}}$ ist dann gleich der halben reellen Dimension von V. Es gilt also

$$V_{\mathbb{C}} := \left\{ V \mid \mathbb{C}\text{-Multiplikation erklärt durch } (a + ib)v := av + bJ(v) \right\}. \tag{1.6a}$$

mit

$$\dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) = \tfrac{1}{2} \cdot \dim_{\mathbb{R}}(V). \quad \square \tag{1.6b}$$

Definition 5. Sei V komplexer Vektorraum. Eine *reelle Struktur* auf V ist eine anti-lineare Involution von V auf sich, also eine anti-lineare Abbildung

$$C : V \to V \quad \text{mit} \quad C \circ C = \mathrm{id}_V. \tag{1.7}$$

Die Abbildung C heißt *komplexe Konjugation*. □

Bemerkung 6. Ist (V, C) ein komplexer Vektorraum mit reeller Struktur, dann heißt ein Vektor $v \in V$ *reell* wenn $C(v) = v$. Die Menge der reellen Vektoren bildet einen n-dimensionalen reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$. Es gilt also:

$$V_{\mathbb{R}} := \left\{ v \in V \mid C(v) = v \right\}, \tag{1.8a}$$

mit

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{C}}(V). \quad \square \tag{1.8b}$$

Bemerkung 7. Ohne reelle Struktur können wir in einem komplexen Vektorraum nicht "'komplex konjugieren"' und wissen nicht, was reelle Vektoren sind. Eine reelle Struktur ist z.B. dadurch festgelegt, dass eine Basis $B := \{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ ausgezeichnet und als reell erklärt wird. In *dieser* Basis gilt dann offensichtlich $C(v^a e_a) := \overline{v^a} e_a$. Wendet man diese Regel, gemäß der einfach die Entwicklungskoeffizienten eines Vektors als Elemente in $\mathbb{C}$ zu komplex-konjugieren sind, bezüglich einer anderen Basis an, so ergibt sich dadurch nur dann die gleiche reelle Struktur, wenn die neuen Basisvektoren *reelle* Linearkombinationen der alten sind. Allgemein gilt: Ist C eine reelle Struktur und $T : V \to V$ ein $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus, dann ist auch $C' := T \circ C \circ T^{-1}$ eine reelle Struktur. Diese ist genau dann mit C identisch, wenn $T(V_{\mathbb{R}}) = V_{\mathbb{R}}$. Weiter gilt: Ist C reelle Struktur, dann ist $K := j \circ C$ mit j aus (1.4) ein $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus $K : V \to \bar{V}$. Die Bedingung (1.7), also $C^2 = \mathrm{id}_V$, ist dann gleichbedeutend mit

$$j \circ K^{-1} \circ j = K. \tag{1.9}$$

Umgekehrt gilt, dass jeder isomorphismus $K : V \to \bar{V}$ der (1.9) genügt, für den also $j^{-1} \circ K =$ eine involution ist, eine reelle Struktur definiert durch $C := j^{-1} \circ K$. In diesem Sinne ist die Wahl eine reellen Struktur gleichbedeutend der Wahl eines $\mathbb{C}$-*linearen* Isomorphismus $K : V \to \bar{V}$. Dieser ist dann die oben zitierte "'komplexe Konjugation"' in V die eben neben der natürlich existierenden *anti-linearen* Bijektion $j : V \to \bar{V}$ nötig ist um von "'reellen Vektoren in V"' sprechen zu können. □

Wir haben oben in (1.6) und (7) gesehen, wie man aus reellen und komplexen Vektorräumen komplexe bzw. reelle Vektorräume macht, wenn in den Ausgangsräumen komplexe bzw. reelle Strukturen ausgezeichnet sind. Ist letzteres nicht der Fall, sind folgende Konstruktionen möglich.

Hat ein reeller Vektorraum V keine komplexe Struktur im Sinne der Definition 3, sei es weil man entweder keine benannt hat oder weil er strukturell keine zulässt (wenn er von ungerader Dimension ist), dann kann man dennoch aus ihm einen komplexen Vektorraum bauen indem man seine Dimension über $\mathbb{R}$ zunächst verdoppelt und zwar so, dass diese Verdoppelung eine natürliche komplexe Struktur besitzt. Das geht so: Zunächst erinnert man sich, dass der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum ist. Es ist daher sinnvoll, das reelle Tensorprodukt $\mathbb{C} \otimes V$ der beiden reellen Vektorräume $\mathbb{C}$ und V zu bilden. Dieses ist dann wieder ein reeller Vektorraum der doppelten Dimension von V; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{R}}(V)$. Dieser hat nun aber eine komplexe Struktur J, nämlich indem man $J(z \otimes v) := (iz) \otimes v$ vereinbart und dies $\mathbb{R}$-linear auf ganz $\mathbb{C} \otimes V$ fortsetzt. Mit diesem J kann man nun so wie in Bemerkung 4 beschrieben aus $\mathbb{C} \otimes V$ einen komplexen Vektorraum machen.

Definition 8. Sei V reeller Vektorraum. Die *Komplexifizierung* $V^{\mathbb{C}}$ von V ist

$$V^{\mathbb{C}} := (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)_{\mathbb{C}}\,. \tag{1.10a}$$

Dabei haben wir durch das Anhängen von $\mathbb{R}$ an $\otimes$ nochmals betont, dass das Tensorprodukt zwischen $\mathbb{C}$ und V das zwischen reellen Vektorräumen ist. Klarerweise gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V)\,. \quad \square \tag{1.10b}$$

Nun zum umgekehrten Fall, in dem ein komplexer Vektorraum keine reelle Struktur im Sinne der Definition 5 besitzt. Dann kann man einfach den Grundkörper dadurch wechseln, dass man die skalare Multiplikation auf die reellen Zahlen einschränkt und so den ehemals komplexen Vektorraum als reellen Vektorraum doppelter Dimension versteht.

Definition 9. Sei V komplexer Vektorraum. Die *Reellifizierung* $V^{\mathbb{R}}$ von V ist der reelle Vektorraum, der als Menge und Abel'sche Gruppe identisch ist zu V und in dem die skalare Multiplikation auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eingeschränkt ist. Es gilt

$$V^{\mathbb{R}} := \big\{ V \mid \text{skalare Multiplikation auf } \mathbb{R} \text{ eingeschränkt} \big\} \tag{1.11a}$$

mit

$$\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{R}}) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)\,. \tag{1.11b}$$

Bemerkung 10. Ist V komplexer Vektorraum und $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ eine Basis von V über $\mathbb{C}$, dann ist $\{e_A, \mid A = 1, \cdots, 2n\}$ mit $e_{n+a} := ie_a$ eine Basis von $V^{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}$. □

Bemerkung 11. Ist ein reeller Vektorraum $V^{\mathbb{R}}$ die Reellifizierung eines komplexen Vektorraums V, so ist klar, dass er eine natürliche komplexe Struktur trägt, nämlich $J(v) = iv$. Letzteres ist sinnvoll, da man ja noch weiss, wie auf dem Menge V mit komplexen Zahlen zu multiplizieren ist. Es gilt dann trivialerweise

$$(V^{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = V\,. \tag{1.12}$$

Ist es umgekehrt so, dass der komplexe Vektorraum V aus einem reellen Vektorraum V' mit komplexer Struktur J entstand, also $V = V'_{\mathbb{C}}$, dann ist seine Reellifizierung wieder V'. Es gilt dann

$$V^{\mathbb{R}} = (V'_{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = V'\,. \quad \square \tag{1.13}$$

1.2 Natürlich assoziierte Basen und Abbildungen

Definition 12. Sei V komplexer Vektorraum und

$$B = \{e_a \mid a = 1, \cdots, n\} \tag{1.14a}$$

Basis von V. Dann sind in V^*, $\bar{V}$ und $\bar{V}^*$ in natürlicher Weise Basen B^*, $\bar{B}$ und $\bar{B}^*$ wie folgt definiert: Im Dualraum V^* ist es die *duale Basis*

$$B^* = \{\eta^a \mid a = 1, \cdots, n\} \quad \text{mit} \quad \eta^a(e_b) = \delta^a_b\,. \tag{1.14b}$$

Im komplex-konjugierten Vektroraum $\bar{V}$ ist es die zu B komplex-konjugierte Basis $\bar{B} := j(B)$, d.h. das Bild der Basis B unter der natürlich definierten anti-linearen Abbildung (1.4):

$$\bar{B} = \{\bar{e}_a \mid a = 1, \cdots, n\} \quad \text{mit} \quad \bar{e}_b := j(e_b)\,. \tag{1.14c}$$

Schließlich nimmt man in $\bar{V}^*$ die zu $\bar{B}$ duale Basis:

$$\bar{B}^* = \{\bar{\eta}^a \mid a = 1, \cdots, n\} \quad \text{mit} \quad \bar{\eta}^a(\bar{e}_b) = \delta^a_b\,. \tag{1.14d}$$

Man beachte, dass das Attribut "‘dual"’ nur auf eine ganze Basis zutrifft, nicht auf einzelne Vektoren. Es gibt keinen zu $e \in V$ definierten "‘dualen Vektor"’ $\eta \in V^*$. Im Unterschied dazu ist die komplex-konjugierte Basis aber elementenweise zugeordnet. □

Definition 13. Seien V und W komplexe Vektorräume mit natürlich assoziierten Räumen $V^*, \bar{V}$ und $\bar{V}^*$ bzw. $W^*, \bar{W}$ und $\bar{W}^*$. Sei

$$f : V \to W \tag{1.15a}$$

$\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann existieren in natürlicher Weise assoziierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen wie folgt: Die *transponierte Abbildung*

$$f^\top : W^* \to V^*\,, \quad \theta \mapsto f^\top(\theta) := \theta \circ f\,. \tag{1.15b}$$

Die *komplex konjugierte* Abbildung

$$\bar{f} : \bar{V} \to \bar{W}\,, \quad \bar{f} := j_W \circ f \circ j_v^{-1}\,, \tag{1.15c}$$

wobei $j_v : V \to \bar{V}$ und $j_W : W \to \bar{W}$ die anti-linearen Bijektionen nach Definition (1.4) bezeichnen. Und letztlich die *transponiert komplex-konjugierte* Abbildung

$$\bar{f}^\top : \bar{W}^* \to \bar{V}^*\,, \quad \bar{\theta} \mapsto \bar{f}^\top(\bar{\theta}) := \bar{\theta} \circ \bar{f}\,. \tag{1.15d}$$

Die Linearität (1.15c) folgt aus der Linearität und der anti-Linearität von sowohl j_W und j_v^{-1}, die zusammengenommen die Linearität wiederherstellen. Die Linearität von (1.15b) folgt aus der von f so:

$$\begin{aligned} f^\top(a_1\theta_1 + a_2\theta_2)(v) &= a_1\theta_1\big(f(v)\big) + a_2\theta_2\big(f(v)\big) \\ &= \theta_1\big(a_1 f(v)\big) + \theta_2\big(a_2 f(v)\big) \\ &= \theta_1\big(f(a_1 v)\big) + \theta_2\big(f(a_2 v)\big) \\ &= f^\top(\theta_1)(a_1 v)) + f^\top(\theta_1)(a_2 v) \\ &= \big(a_1 f^\top(\theta_1) + a_2 f^\top(\theta_1)\big)(v) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Dabei haben wir die Linearität von f beim dritten Gleichheitszeichen verwendet. Ansonsten geht nur die Definition der transponierten Abbildung und die Tatsache ein, dass die $\theta_{1,2}$ lineare Abbildungen sind.

Bemerkung 14. Die gegebenen Definitionen der Abbildungen $f^\top$, $\bar{f}$ und $\bar{f}^\top$ bleiben auch dann sinnvoll, wenn f antilinear ist. Alle assoziierten Abbildungen sind dann ebenfalls antilinear mit den völlig analogen Begründungen. Im Falle von $f^\top$ wir dann in (1.16) die zweite und dritte Zeile ersetzt durch $\theta_1\big(a_1 f(v)\big) + \theta_2\big(a_2 f(v)\big) = \theta_1\big(f(\bar{a}_1 v)\big) + \theta_2\big(f(\bar{a}_2 v)\big)$, so dass insgesamt $f^\top(a_1\theta_1 + a_2\theta_2) = \bar{a}_1 f^\top(\theta_1) + \bar{a}_2 f^\top(\theta_1)$ resultiert.

Bemerkung 15. Wie bereits gleich zu Beginn erwähnt, ist die Menge $\mathrm{Lin}(V, W)$ der linearen Abbildungen des $\mathbb{F}$-Vektorraums V in den $\mathbb{F}$-Vektorraum W selbst ein $\mathbb{F}$-Vekrorraum. Dieser hat die Dimension $\dim\big(\mathrm{Lin}(V, W)\big) = \dim(V) \cdot \dim(W)$. Er besteht eine natürliche Isomorphie

$$W \otimes V^* \cong \mathrm{Lin}(V, W) \tag{1.17a}$$

die auf reinen Tensorprodukten $a \otimes \beta \in W \otimes V^*$ gegeben ist durch

$$a \otimes \beta \mapsto (V \ni v \mapsto \beta(v)\, a \in W) \tag{1.17b}$$

und auf ganz $W \otimes V^*$ eindeutig durch die Forderung der Linearität fortgesetzt wird. Diese erlaubt es uns, zukünftig $\mathrm{Lin}(V, W)$ mit $W \otimes V^*$ zu identifizieren, was wir oft stillschweigend tun werden.

Bemerkung 16. Mit der Identifikation (1.17a) folgt aus (1.15b), dass für $a \otimes \beta \in \mathrm{Lin}(V, W)$ und $\theta \in W^*$ gilt $(a \otimes \beta)^\top(\theta) = \theta(a)\,\beta$. Also ist

$$(a \otimes \beta)^\top = \beta \otimes a\,. \tag{1.18}$$

Man beachte, dass diese Formel nur unter folgenden (bereits eingeführen) Identifikationen sinnvoll ist: $\mathrm{Lin}(W^*, V^*) \cong V^* \otimes W^{**} \cong V^* \otimes W$.

Analog folgt für komplexe Vektorräume mit der Identifikation (1.17a) aus (1.15c), dass

$$\overline{\alpha \otimes \beta} = \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta} \,. \tag{1.19}$$

wobei $\bar{\alpha} := j_W(\alpha)$ und $\bar{\beta} := j_{V^*}(\beta) := \beta \circ j_V^{-1}$.

Bemerkung 17. Im Allgemeinen ist es sinnlos, nach der "'Symmetrie"' einer linearen Abbildung $f : V \to W$ in Sinne von $f = f^\top$ zu fragen, da $f^\top : W^* \to V^*$ zwischen anderen Vektorräumen vermittelt. Dies ist nur möglich, wenn $W = V^*$ (mit der Identifikation $V^{**} = V$).

Bemerkung 18. Sind $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ und $\{\eta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ duale Basenpaare von V und V^*, sowie $\{E_A \mid A = 1, \cdots, N\}$ und $\{\Theta^A \mid A = 1, \cdots, N\}$ von W und W^*, dann bilden die $N \cdot n$ Vektoren $E_A \otimes \eta^a \in W \otimes V^*$ eine Basis von $\mathrm{Lin}(V, W)$, so dass jedes Element $L \in \mathrm{Lin}(V, W)$ geschrieben werden kann als (Summenkonvention)

$$L = L^A{}_a \, E_A \otimes \eta^a \,. \tag{1.20}$$

Für die transponierte Abbildung gilt dann nach (1.18)

$$L^\top = (L^\top)_a{}^A \, \eta^a \otimes E_A = L^A{}_a \, (E_A \otimes \eta^a)^\top = L^A{}_a \, \eta^a \otimes E_A \,. \tag{1.21}$$

Bezüglich natürlich assoziierter Basen ist die Koeffizientenmatrix der transponierten Abbildung also das Transponierte der ursprünglichen Koeffizientenmatrix: $(L^\top)_a{}^A = L^A{}_a$. Für die komplex-konjugierte Abbildung $\bar{L}$ folgt

$$\bar{L} = (\bar{L})^A{}_a \, \bar{E}_A \otimes \bar{\eta}^a = \overline{L^A{}_a} \, j_W(E_A) \otimes (\eta^a \circ j_V^{-1}) = \overline{L^A{}_a} \, \bar{E}_A \otimes \bar{\eta}^a \,, \tag{1.22}$$

wobei $\overline{L^A{}_a}$ die komplex-konjugierte Koeffizientenmatrix zu $L^A{}_a$ ist, die deshalb entsteht, weil j_W eine antilineare Abbildung ist. Bezüglich der natürlich assoziierten Basen ist also die Koeffizientenmatrix der komplex-konjugierten Abbildung gerade das komplex-konjugierte der ursprünglichen Matrix: $(\bar{L})^A{}_a = \overline{L^A{}_a}$.

1.3 Innere Produkte

In der multilinearen Algebra verwendet man in Komponentenschreibweise oft Relationen der Form $V_a = g_{ab} V^b$ (Index runterziehen) oder umgekehrt $V^a = g^{ab} V_b$ (Index hochziehen), wobei g_{ab} die Komponenten einer "'Metrik"' und g^{ab} die komponenten der "'inversen Metrik"' bezeichnen.

In diesem Abschnitt wollen wir klarstellen, welche koordinatenunabhängigen Operationen bzw. Abbildungen sich hinter diesen formalen Manipulationen verbergen. Um nicht immer an eine positiv-definite oder symmetrische Bilinearform zu denken, ersetzen wir das Symbol g für die "'Metrik"' durch ω, was unverfänglicher ist.

Definition 19. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}$ (für uns reicht es aus an $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu denken). Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V \times V \to \mathbb{F}\,, \tag{1.23a}$$

so dass für alle $u, v, w \in V$ und $a, b \in \mathbb{F}$ gilt:

$$\omega(u+v, w) = \omega(u, w) + \omega(v, w)\,, \quad \omega(au, v) = a\,\omega(u, v)\,, \tag{1.23b}$$

$$\omega(u, v+w) = \omega(u, v) + \omega(u, w)\,, \quad \omega(u, av) = a\,\omega(u, v)\,. \tag{1.23c}$$

Die Form heißt *nicht ausgeartet* falls

$$\omega(u, v) = 0\,\forall u \in V \;\Leftrightarrow\; v = 0\,. \quad \square \tag{1.23d}$$

Bemerkung 20. Gleichung (1.23d) ist äquivalent der transponierten Aussage, dass $\omega(v, u) = 0\,\forall u \in V \Leftrightarrow v = 0$. Stichwort: "‘Spaltenrang gleich Zeilenrang"’. □

Bemerkung 21. Die Form ω heißt *symmetrisch* falls für alle $u, v \in V$ gilt $\omega(u, v) = \omega(v, u)$ und *antisymmetrisch* falls $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$. Die in der Physik relevanten Bilinearformen sind meist nicht-ausgeartet und entweder symmetrisch oder antisymmetrisch. Um diese beiden Fälle effektiv gleichzeitig zu behandeln ist es günstig, die formale Entwicklung noch ein Stück weit ohne jede Symmetrieannahme weiterzutreiben. Weiter unten schränken wir uns dann auf den Fall ein, wo ω entweder symmetrisch oder antisymmetrisch ist; vgl. Bemerkung 24. In jedem Fall setzen wir aber voraus, dass ω nicht ausgeartet ist. □

Es besteht eine bijektive Zuordnung zwischen Bilinearformen auf V und linearen Abbildungen $V \to V^*$ (Dualraum). Ist ω die Bilinearform, so sei die ihr zugeordnete Abbildung mit $\omega_\downarrow$ bezeichnet. Sie ist definiert durch

$$\omega_\downarrow : V \to V^*\,, \quad v \mapsto \omega_\downarrow(v) := \omega(v, \cdot\,)\,, \tag{1.24}$$

so dass also $\omega_\downarrow(v)(w) = \omega(v, w)$. Ist umgekehrt $A : V \to V^*$ eine lineare Abbildung, so entspricht dieser die Bilinearform $\bar{A}(v, w) := A(v)(w)$.

Bemerkung 22. Da ω nicht als symmetrisch vorausgesetzt wurde, existiert mit der alternativen Definition $\omega_\downarrow(v) := \omega(\cdot\,, v)$ eine andere lineare Abbildung $V \to V^*$, deren Dimensionen von Kern und Bild mit denen der Abbildung (1.24) übereinstimmt. Da wir für das Folgende nur eine dieser Abbildungen benötigen, entscheiden wir uns o.B.d.A für (1.24). Die Abbildungen wären natürlich gleich, wenn wir es mit einer symmetrischen Form zu tun hätten und würden sich für antisymmetrische Formen nur durch das Vorzeichen unterscheiden. □

Nach Definition (1.23d) ist sofort klar, dass die Bilinearform ω genau dann nicht ausgeartet ist wenn der Kern von $\omega_\downarrow$ trivial (der Nullvektor) ist. In diesem Fall ist $\omega_\downarrow$ injektiv und wegen der Endlichdimensionalität von $\dim(V) = \dim(V^*)$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus. (Für unendlich-dimensionale Vektorräume ist dies falsch.)

Wie angekündigt beschränken uns nun auf den Fall nicht ausgearteter Bilinearformen. Da $\omega_\downarrow$ dann ein Isomorphismus ist, existiert eine lineare Abbildung $\omega_\uparrow := \omega_\downarrow^{-1} : V^* \to V$ mit

$$\omega_\uparrow \circ \omega_\downarrow = \mathrm{id}_V \quad \text{und} \quad \omega_\downarrow \circ \omega_\uparrow = \mathrm{id}_{V^*} \,. \tag{1.25}$$

Mit Hilfe von $\omega_\uparrow$ kann man nun die Bilinearform ω zu einer Bilinearform $\tilde{\omega}$ auf V^* zurückziehen; das bedeutet einfach die Bildung von

$$\tilde{\omega} := \omega \circ \omega_\uparrow \times \omega_\uparrow \,:\, V^* \times V^* \to \mathbb{F} \,. \tag{1.26a}$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\alpha, \beta) : &= \omega\big(\omega_\uparrow(\alpha)\,,\, \omega_\uparrow(\beta)\big) \\ &= \big(\omega_\downarrow \circ \omega_\uparrow(\alpha)\big)\, \omega_\uparrow(\beta) \\ &= \alpha\big(\omega_\uparrow(\beta)\big) \,. \end{aligned} \tag{1.26b}$$

Also gilt in Analogie zu (1.24), wenn man V und V^{**} aufgrund ihrer natürlichen Isomorphie (s.u.) identifiziert,

$$\omega_\uparrow(\beta) = \tilde{\omega}(\,\cdot\,, \beta) \,. \tag{1.27}$$

Zur Erinnerung: Die erwähnte natürliche Isomorphie $i : V \to V^{**}$ ist gegeben durch die für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in V^*$ gültige Beziehung

$$i(v)(\alpha) := \alpha(v)\,, \quad \forall v \in V\,,\, \forall \alpha \in V^* \,. \tag{1.28}$$

Also gilt insbesondere

$$i\big(\omega_\uparrow(\beta)\big)(\alpha) = \alpha\big(\omega_\uparrow(\beta)\big) \,. \tag{1.29}$$

Bemerkung 23. Man beachte, dass in (1.27) der *zweite* Eintrag der Bilinearform $\tilde{\omega}$ verwendet wird, hingegen in (1.24) der erste Eintrag in der Bilinearform ω. Hätte man, wie in Bemerkung 22 angedeutet, bei der Definition (1.24) von $\omega_\downarrow$ den zweiten Eintrag verwendet, würde in (1.27) der erste Eintrag von $\tilde{\omega}$ mit β gefüllt werden. Es ist also festzuhalten, dass bei Definition von $\omega_\uparrow$ als dem Inversen von $\omega_\downarrow$ diese Gegensätzlichkeit grundsätzlich besteht und nur bei *symmetrischen* Bilinearformen belanglos wird. Sie ist z.B. wichtig (und ihre Nicht-Beachtung führt oft zu Fehlern) im Falle von Weyl-Spinoren, die Elemente eines 2-dimensionalen komplexen Vektorraums mit nicht-ausgearteter *anti*-symmetrischer Bilinearform sind (Physiker letztere oft als "'Spinormetrik"' an, Mathematiker sprechen korrekter von "'symplektischer Struktur"'). □

Bemerkung 24. Im folgenden schränken wir uns oft auf die beiden Fälle ein, in denen ω entweder symmetrisch ($\epsilon = 1$) oder antisymmetrisch ($\epsilon = -1$) ist. Dann gilt für alle $v, w \in V$

$$\omega(v, w) = \epsilon\, \omega(w, v)\,, \quad \text{mit } \epsilon = 1 \text{ oder } \epsilon = -1 \,. \tag{1.30}$$

Ist ω weder symmetrisch noch antisymmetrisch, so kann es eindeutig als Summe seines symmetrischen und antisymmetrischen Teils zerlegt werden,

$$\omega = \omega^+ + \omega^- \,, \tag{1.31a}$$

wobei

$$\omega^{\pm}(v,w) := \tfrac{1}{2}\big(\omega(v,w) \pm \omega(w,v)\big)\,. \tag{1.31b}$$

Später werden wir die ω-erhaltenden linearen Abbildungen betrachten. Es ist klar, dass diese dann ω^+ und ω^- getrennt erhalten müssen. Achtung: Ist ω nicht entartet und nicht symmetrisch oder antisymmetrisch, dann kann ω^+ oder ω_- oder beide durchaus entartet sein. □

Proposition 25. *Gilt* (1.30)*, dann auch*

$$\omega_{\downarrow}^{\top} = \epsilon\,\omega_{\downarrow}\,, \qquad \omega_{\uparrow}^{\top} = \epsilon\,\omega_{\uparrow}\,. \tag{1.32}$$

Beweis. Zuerst machen wir uns klar, dass die Aussagen (1.32) deshalb sinnvoll sind, weil Ausgangs- und Zielräume der Abbildungen $\omega_{\downarrow}$ und $\omega_{\uparrow}$ zueinander dual sind und wir V^{**} mit V durch (1.3) identifiziert haben. Also sind $\omega_{\downarrow}$ und $\omega_{\downarrow}^{\top}$ Abbildungen $V \to V^*$ und $\omega_{\uparrow}$ sowie $\omega_{\uparrow}^{\top}$ Abbildungen $V^* \to V$. Dann beweisen wir die erste Gleichung in (1.32) wie folgt: Nach (1.15b) gilt $\omega_{\downarrow}^{\top}(v)(w) = v\big((\omega_{\downarrow}(w)\big)$, wobei hier auf der rechten Seite v als Element in V^{**} aufgefasst wird. Mit (1.3) ist die rechte Seite aber gleich $\omega_{\downarrow}(w)(v) = \omega(w,v) = \epsilon\,\omega(v,w) = \epsilon\,\omega_{\downarrow}(v)(w)$. Gleichheit der linken und rechten Seite für alle $v, w \in V$ ergibt die erste Gleichung (1.32). Die zweite folgt völlig analog. □

1.4 Index Hoch- und Runterziehen

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun allgemein die bei Physikern so beliebte Operation des Hoch- und Runterziehens von Indizes verstehen. Dazu benutzen wir die Komponenten von Vektoren und Dualvektoren bezüglich zueinander dualer Basen.

Sei $n = \dim(V)$ und $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ Basis von V mit zugehöriger Dualbasis $\{\eta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von V^*, d.h. $\eta^a(e_b) = \delta^a_b$. Dann gilt für jedes $\alpha \in V^*$, dass $\alpha = \alpha(e_b)\eta^b$, wie man sofort an der Gleichheit der Auswertungen beider Seiten auf der Basis e_a zeigt. Also gilt mit

$$\omega_{ab} := \omega(e_a, e_b) \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}^{ab} := \tilde{\omega}(\eta^a, \eta^b) \tag{1.33}$$

auch

$$\omega_{\downarrow}(e_a) = \omega(e_a, e_b)\,\eta^b = \omega_{ab}\,\eta^b\,, \tag{1.34a}$$

$$\omega_{\uparrow}(\eta^a) = \tilde{\omega}(\eta^b, \eta^a)\,e_b = \tilde{\omega}^{ba}\,e_b\,. \tag{1.34b}$$

Man beachte, dass auf der rechten Seite von (1.34a) über den zweiten Index an ω summiert wird, während auf der rechten Seite von (1.34b) die Summation über den ersten Index von $\tilde{\omega}$ läuft. Dies ist eine direkte Folge von Bemerkung 23.

Aus (1.34) ergibt sich nun sofort der Zusammenhang zwischen den Komponenten ω_{ab} und $\tilde{\omega}^{ab}$ wie folgt:

$$e_a = \omega_{\uparrow} \circ \omega_{\downarrow}(e_a) = \omega_{ab}\,\omega_{\uparrow}(\eta^b) = \omega_{ab}\,\tilde{\omega}^{cb}\,e_c\,, \tag{1.35}$$

was gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass die Matrizen $\{\omega_{ab}\}$ und $\{\tilde{\omega}^{ab}\}$ zueinander *transponiert invers* sind. Auch das (die Transposition) ist eine direkte Folge von Bemerkung 23.

Auf Ebene der Komponenten sind nun die Abbildungen $\omega_\downarrow$ und $\omega_\uparrow$ wie folgt: Sei $v = v^a e_a \in V$ und $\alpha = \alpha_a \eta^a \in V^*$, dann gilt

$$\omega_\downarrow(v) = v^a \omega_{ab}\, \eta^b = v_b \eta^b\,, \quad \text{mit} \quad v_b := v^a \omega_{ab}\,, \tag{1.36a}$$

$$\omega_\uparrow(\alpha) = \alpha_a \tilde{\omega}^{ba} e_b = \alpha^b e_b\,, \quad \text{mit} \quad \alpha^b := \tilde{\omega}^{ba}\alpha_a\,. \tag{1.36b}$$

Bemerkung 26. Auf Ebene der Komponenten entsprechen die Abbildungen $\omega_\downarrow$ und $\omega_\uparrow$ den Operationen des Index Runter- und Hochziehens. Dabei sind $v_b = v^a\omega_{ab}$ die Komponenten des Bildes in V^* von $v = v^a e_a \in V$ unter der Abbildung $\omega_\downarrow$ bezüglich der zu $\{e_a\}$ dualen Basis $\{\eta^a\}$. Analog sind $\alpha^b = \tilde{\omega}^{ba}\alpha_a$ die Komponenten des Bildes in V von $\alpha = \alpha_a\eta^a \in V^*$ unter der Abbildung $\omega_\uparrow$ bezüglich der zu $\{\eta^a\}$ dualen Basis $\{e_a\}$ von V. Ist aus dem Kontext klar, auf welche Bilinearform man sich bezieht, so schreibt man auch $v^\flat$ statt $\omega_\downarrow(v)$ und $\alpha^\sharp$ statt $\omega_\uparrow(\alpha)$ (engl. "‘musical isomorphisms"’), bleibt aber bei den Komponenten bei obiger Schreibweise, schreibt also nicht etwa $v^\flat_a$ sondern einfach v_a.

Diese zueinander inversen Isomorphismen $\omega_\downarrow : V \to V^*$ und $\omega_\uparrow : V^* \to V$ kann man nun auf beliebige Tensorprodukte $T^\ell_m V := V^{\otimes \ell} \otimes V^{*\otimes m}$ erweitern und dadurch beispielsweise das "‘Runterziehen des ersten Index"’ durch die Abbildung $\omega_\downarrow \otimes \mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{V^*}$ definieren. Analog geht dies für mehrere Indizes an beliebigen Stellen, wobei die Indexbewegung an einer Stelle mit der an einer anderen klarerweise vertauscht, so dass eine Reihenfolge nicht angegeben werden muss.

Insbesondere ist es natürlich möglich, die Indizes an der Bilinearform $\omega \in V^* \otimes V^*$ selbst hochzuziehen, also $\omega_\uparrow \otimes \omega_\uparrow$ auf sie anzuwenden, so dass ein Element in $V \otimes V$ entsteht, was man wegen der natürlichen Identifikation von V^{**} mit V als Bilinearform auf V^* auffassen darf. Diese ist dann aber gerade $\tilde{\omega}$, wie man aus (1.26b) und (1.29) sieht. Auf der Ebene der Komponenten sieht man dies so:

$$\omega^{ab} := \tilde{\omega}^{ac} \underbrace{\tilde{\omega}^{bd}\omega_{cd}}_{\delta^b_c} = \tilde{\omega}^{ab}\,. \tag{1.37}$$

Bemerkung 27. Wegen (1.37) ist es erlaubt $\tilde{\omega}^{ab}$ durchweg durch ω^{ab} (definiert durch Index-Hochziehen an ω_{ab}) zu ersetzen, was wir im Folgenden auch tun werden. Gleichungen (1.36) sind dann mit ω^{ab} statt $\tilde{\omega}^{ab}$ hinzuschreiben. Das ist dann die in der Physik häufig gebrauchte Form. Erneut weisen wir darauf hin, dass das Runterziehen mit dem ersten Index an ω_{ab} und das Raufziehen mit dem zweiten Index an ω^{ab} erfolgen muss, wobei die von den Komponenten ω^{ab} und ω_{ab} gebildeten Matrixen zueinander *transponiert*-invers sinde. An dieser Stelle könnte man denken, dass es einfacher wäre, Indizes mit der zu ω_{ab} inversen (statt transponiert-inversen) hochzuziehen. Sei diese $\hat{\omega}^{ab}$, d.h., $\hat{\omega}^{ac}\omega_{cb} = \delta^a_b$. Dann bekäme man statt (1.37) aber $\omega^{ab} = \hat{\omega}^{ac}\hat{\omega}^{bd}\omega_{cd} = \hat{\omega}^{ba}$, d.h. das Hochziehen der Indizes an ω_{ab} resultiert nicht in $\hat{\omega}^{ab}$, sondern ihrer Transponierten. Das muss man aber vermeiden, wenn man nicht zwischen *der Bilinearform mit hochgezogenen Indizes* (ω^{ab}) und *der zum Hochziehen der Indizes benutzten Bilinearform* ($\hat{\omega}^{ab}$) unterscheiden will. $\square$

Zum Schluss stellen wir für den Fall komplexer Vektorräume nochmals die die durch den natürlichen anti-Isomorphismus $j : V \to \bar{V}$ und den durch eine nicht ausgeartete Bilinearform ω gegebenen Abbildungen zusammen. AnAbbildungen haben wir

$$
\begin{aligned}
j &: V \to \bar{V} && (1.38a)\\
j^{-1} &: \bar{V} \to V && (1.38b)\\
j^\top &: \bar{V}^* \to V^* && (1.38c)\\
(j^\top)^{-1} &: V^* \to \bar{V}^* && (1.38d)\\
\omega_\downarrow &: V \to V^* && (1.38e)\\
\omega_\uparrow &: V^* \to V \qquad (:= \omega_\downarrow^{-1}) && (1.38f)
\end{aligned}
$$

Aus diesen können die weiteren (linearen) isomorphismen zusammengesetzt werden, die jetzt auch das "'Indexziehen"' für die komplex-konjugierten Vektorräume definieren.

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}_\downarrow &:= (j^\top)^{-1} \circ \omega_\downarrow \circ j^{-1} \;:\; \bar{V} \to \bar{V}^* && (1.39a)\\
\bar{\omega}_\uparrow &:= j \circ \omega_\uparrow \circ j^\top \;:\; \bar{V}^* \to \bar{V} \qquad (:= \bar{\omega}_\downarrow^{-1}) && (1.39b)
\end{aligned}
$$

All dies kann in dem folgenden kommutativen Diagramm zusammengefasst werden:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\omega_\downarrow"] \arrow[d, "j"'] & V^* \arrow[d, "(j^\top)^{-1}"] \\
\bar{V} \arrow[r, "\bar{\omega}_\downarrow"] & \bar{V}^*
\end{tikzcd}
\tag{1.40}
$$

1.5 Adjungierte Abbildungen

Eine nicht-ausgeartete Bilinearform definiert einen Begriff von Adjunktion. Erst durch diesen, also relativ zur gewählten Form, sind dann auch selbstadjungierte Abbildungen definiert.

Definition 28. Sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung und ω eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V. Die ω-*adjungierten Abbildung* zu V ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $A^\dagger : V \to V$, die für alle $u, v \in V$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\omega(u, Av) = \omega(A^\dagger u, v)\,. \quad \square \tag{1.41}$$

Bemerkung 29. Ist ω entweder symmetrisch ($\epsilon = 1$) oder antisymmetrisch ($\epsilon = -1$), d.h. gilt für alle $v, w \in V$

$$\omega(v, w) = \epsilon\, \omega(w, v)\,, \quad \text{mit } \epsilon = 1 \text{ oder } \epsilon = -1\,, \tag{1.42}$$

dann ist die lineare Abbildung

$$\mathcal{C} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)\,, \quad X \mapsto \mathcal{C}(X) := X^\dagger \tag{1.43a}$$

eine Involution, d.h.

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(V)}\,. \tag{1.43b}$$

Das folgt sofort aus $\omega(v, Xw) = \omega(X^\dagger v, w) = \epsilon\,\omega(w, X^\dagger v) = \epsilon\,\omega(X^{\dagger\dagger} w, v) = \epsilon^2\,\omega(v, X^{\dagger\dagger} w)$. □

Bemerkung 30. Gilt (1.42) so hat die Abbildung $\mathcal{C}$ aus (1.43) die Eigenwerte ± 1. Es gibt also die unter Adjunktion symmetrischen und antisymmetrischen Abbildungen

$$\mathrm{End}^\pm(V) := \big\{X \in \mathrm{End}(V) \mid \mathcal{C}(X) = \pm X\big\} \subset \mathrm{End}(V)\,, \tag{1.44}$$

wobei

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}^+(V) \oplus \mathrm{End}^-(V)\,. \tag{1.45}$$

Die zugehörigen linearen Projektionsabbildungen sind

$$\begin{aligned} &P^\pm : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}^\pm(V)\,,\\ &P^\pm := \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{id}_{\mathrm{End}(V)} \pm \mathcal{C}\big)\,. \end{aligned} \tag{1.46a}$$

Die Involutivität (1.43b) von $\mathcal{C}$ ergibt dann sofort

$$P^+ \circ P^+ = P^+\,, \quad P^- \circ P^- = P^-\,, \quad P^+ \circ P^- = P^- \circ P^+ = 0\,, \tag{1.46b}$$

was nachträglich zeigt, dass $\mathrm{End}(V)$ in der Tat eine direkte Summe ist, wie in (1.45) konstatiert. □

Proposition 31. *Die adjungierte Abbildung kann durch die transponierte Abbildung und die Abbildungen $\omega_\uparrow$ und $\omega_\downarrow$ ausgedrückt werden. Mit den linearen Abbildungen $\mathcal{C} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ (wie oben) und $\mathcal{T} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V^*)$, $A \mapsto \mathcal{T}(A) := A^\top$ (letztere definiert in* (1.15b)*, hier angewandt auf $W = V$) ist*

$$\mathcal{C} = \mathrm{Ad}_{\omega_\uparrow} \circ \mathcal{T}\,, \tag{1.47a}$$

wobei $\mathrm{Ad}_{\omega_\uparrow} : \mathrm{End}(V^*) \to \mathrm{End}(V)$ *die lineare Abbildung $A^\star \to \omega_\uparrow \circ A^* \circ \omega_\uparrow^{-1} = \omega_\uparrow \circ A^* \circ \omega_\downarrow$ bezeichnet. Das ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $A \in \mathrm{End}(V)$ gilt*

$$A^\dagger = \omega_\uparrow \circ A^\top \circ \omega_\downarrow\,. \tag{1.47b}$$

Beweis. Anwenden von (1.24) und (1.15b) auf die linke Seite von (1.41) ergibt $\omega(v, Aw) = \omega_\downarrow(v)(AW) = (A^\top \circ \omega_\downarrow)(v)(w)$. Anwenden von (1.24) auf die rechte Seite von (1.41) ergibt $\omega(A^\dagger v, w) = (\omega_\downarrow \circ A^\dagger)(v)(w)$. Gleichheit beider Seiten für alle $v, w \in V$ zeigt (1.47b) und damit auch (1.47a). Für diesen Beweis war die Annahme (1.42) nicht nötig. Die Formeln (1.47) gelten unabhängig davon, sind also, falls (1.47) gilt, unabhängig vom Wert von ϵ. □

Proposition 32. *Es gelte wieder* (1.42). *Wir identifizieren* $\mathrm{End}(V)$ *mit* $V \otimes V^*$ *und betrachten eine Abbildung* $X \in \mathrm{End}(V)$ *vom Rang 1. Es gilt also* $X = a \otimes \beta$ *mit* $a \in V$ *und* $\beta \in V^*$*, so dass* $X(v) = \beta(v)\, a$*. Dann gilt*

$$C(a \otimes \beta) = (a \otimes \beta)^\dagger = \epsilon\, \omega_\uparrow(\beta) \otimes \omega_\downarrow(a)\,. \tag{1.48}$$

Beweis. Wir geben gleich zwei Beweis. Ein erster, direkter, starte von der Definition (1.41), gemäß der $\omega\big(v, a \otimes \beta(w)\big) = \omega\big((a \otimes \beta)^\dagger(v), w\big)$. Die linke Seite ist gleich $\omega(v, a)\, \beta(w) = \epsilon\, \omega(a, v)\, \beta(w)$, die rechte hingegen gleich $\omega\big((a \otimes \beta)^\dagger(v)\,,\, w\big) = [\omega_\downarrow \circ (a \otimes \beta)^\dagger(v)](w)$. Da diese Gleichheit für alle $w \in V$ gilt folgt $\epsilon\, \omega(a, v)\, \beta = \omega_\downarrow \circ (a \otimes \beta)^\dagger(v)$, was äquivalent is zu $(a \otimes \beta)^\dagger(v) = \epsilon\, \omega(a, v)\, \omega_\uparrow(\beta) = \epsilon\, \omega_\uparrow(\beta) \otimes \omega_\downarrow(a)(v)$. Da dies für alle $v \in V$ gelten muss folgt (1.48). Ein alternativer Beweis auf Grundlage bereits erhaltener Resultate ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
(a \otimes \beta)^\dagger &= \omega_\uparrow \circ (a \otimes \beta)^\top \circ \omega_\downarrow \\
&= \omega_\uparrow \circ (\beta \otimes a) \circ \omega_\downarrow \\
&= \omega_\uparrow(\beta) \otimes (a \circ \omega_\downarrow) \\
&= \omega_\uparrow(\beta) \otimes \omega_\downarrow^\top(a) \\
&= \epsilon\, \omega_\uparrow(\beta) \otimes \omega_\downarrow(a)\,.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Dabei haben wir (1.47b) am ersten, (1.18) am zweiten und (1.32) am letzten Gleichheitszeichen verwendet. □

Bezüglich der dualen Basen $\{e_a\}$ und $\{\eta^a\}$ von V und V^* ist $A = A^a_b\, e_a \otimes \eta^b$ (so dass $Ae_b = A^a_b e_a$) und $A^\top = (A^\top)^a_b\, \eta^b \otimes e_a$ (so dass $A^\top \eta^a = (A^\top)^a_b\, \eta^b$). Definition (1.15b) besagt $A^\top \eta^a = \eta^a \circ A$ und ergibt sofort

$$(A^\top)^a_b = A^a_b\,. \tag{1.50}$$

Weiter ist in Komponenten $A^\dagger e_b = A^{\dagger\,a}_{\ \ b} e_a$, so dass wegen (1.34) die Komponentenform von (1.47b) gegeben ist durch (beachte Bemerkung 27)

$$A^{\dagger\,a}_{\ \ b} = \omega^{ad} \omega_{bc} A^c_{\ d}\,. \tag{1.51}$$

Bemerkung 33. Beachte, dass dies i.a. *nicht* besagt, dass die Komponenten $A^{\dagger\,a}_{\ \ b}$ aus den Komponenten $A^c_{\ d}$ enstehen indem man den unteren Index nach oben und den oberen Index nach unten zieht. Dafür müsste gemäß (1.36) auf der rechten Seite $\omega^{ad}\omega_{cd}A^c_{\ d}$ stehen, also die Indizes an ω_{cd} in umgekehrter Reihenfolge. Für symmetrisches ($\epsilon = 1$) ω ist diese Aussage freilich richtig. Für antisymmetrisches ($\epsilon = -1$) ω unterscheiden sich $A^{\dagger\,a}_{\ \ b}$ und das Indexverschobene $A^c_{\ d}$ gerade um ein Vorzeichen. Das ist eben genau Formel (1.47b) in Komponenten, so dass es für symmetrische oder antisymmetrische ω besser wäre statt (1.51) zu schreiben:

$$A^{\dagger\,a}_{\ \ b} = \epsilon \omega^{ad} A^c_{\ d} \omega_{cb}\,. \quad \square \tag{1.52}$$

Bemerkung 34. Setz man keine Symmetrie oder Antisymmetrie von ω voraus, dann existiert neben (1.41) eine weitere Definition der adjungierten Abbildung, die durch $\omega(Au, v) = \omega(u, A^{\ddagger}v)$ gegeben ist. Analog zu (1.47b) erhält man dann $A^{\ddagger} = (\omega_{\uparrow})^{\top} \circ A^{\top} \circ (\omega_{\downarrow})^{\top}$. Die Abbildungen $\dagger$ und $\ddagger$ sind zueinander invers. Ist ω aber symmetrisch ($\epsilon = 1$) oder antisymmetrisch ($\epsilon = -1$), dann sind sie gleich, denn $\omega(AX, Y) = \epsilon\omega(Y, AX) = \epsilon\omega(A^{\dagger}Y, X) = \omega(X, A^{\dagger}Y)$. In dieses Fällen ist also $\dagger$ eine lineare Involution auf dem Raum der linearen Selbstabbildungen von V, wie ja bereits in Bemerkung 29 festgestellt wurde. □

1.6 Tensoralgebren

In Folgenden sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}$ (für uns ist nur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ wichtig) und T^pV bezeichne sein p-faches Tensorprodukt: $T^pV := V \otimes \cdots \otimes V$ (p Faktoren). Für $p = 0$ definiert man $T^0V = \mathbb{F}$.

Die unendliche direkte Summe

$$TV = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^pV \tag{1.53}$$

definiert eine unendlichdimensionale assoziative Algebra mit Eins, die man die *kontravariante Tensoralgebra* über V nennt. Das Produkt ist das Tensorprodukt, das Einselement ist $(1, 0, 0, \cdots)$, wobei die 1 das Einselement des Körpers $\mathbb{F}$ bezeichnet. $\mathbb{F}$ ist in TV eingebettet durch Vektoren der Form $(a, 0, 0, \cdots)$, $a \in \mathbb{F}$. V ist in TV eingebettet durch $i : V \to TV$, $i(v) = (0, v, 0, \cdots)$. TV hat die folgende universelle Eigenschaft: Für jede lineare Abbildung $f : V \to A$ in eine assoziative Algebra A existiert ein Algebren-Homomorphismus $\varphi : TV \to A$, so dass $f = \varphi \circ i$. Der Beweis ist einfach: Definiere $\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := f(v_1) \cdots f(v_n)$ (die Produkte sind in A zu nehmen) und setze linear fort. Dies wird oft übersichtlich in folgenden kommutativen Diagramm zusammengefasst:

$$\begin{tikzcd} & TV \arrow[d, "\varphi"] \\ V \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \tag{1.54}$$

Dieselbe Konstruktion kann man mit dem Dualraum V^* von V anstellen, was dann in der *kovarianten Tensoralgebra* TV^* resultiert. Das Tensorprodukt $TV \otimes TV^*$ ist wieder eine assoziative Algebra, die man als *gemischte Tensoralgebra* über V und V^* bezeichnet, die die vorhergehenden als Unteralgebren in der Form $TV \otimes \mathbb{F}$ und $\mathbb{F} \otimes TV^*$ enthält. Ist V komplex, so kann man diese Konstruktionen noch durch den komplex konjugierten Vektorraum $\overline{V}$ und komplex konjugierten Dualraum $\overline{V}^*$ erweitern.

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ definiert lineare Abbildungen $\otimes^p f : T^pV \to T^pW$, wobei $\otimes^0 f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ durch die Identität definiert wird. Diese definieren weiter eine lineare Abbildung $\oplus_p(\otimes^p f) : TV \to TW$, von der man leicht zeigt, dass sie ein Algebren-Homomorphismus der kontravarianten Tensoralgebren ist. Ist f ein Isomorphismus, dann auch $\oplus_p(\otimes^p f)$. In diesem Fall ist das Transponiert-Inverse von f definiert und wir können f als Isomorphismus auf die gemischte Tensoralgebra über V und V^* fortsetzen.

Neben der Tensoralgebra gibt es weitere Algebren von Tensoren spezieller Symmetrie. Dazu erklären wir zunächst den Begriff der Symmetrieklasse eines Tensors, um uns dann auf die einfachsten, nicht trivialen Klassen, der vollständig symmetrischen und der vollständig antisymmetrischen, einzuschränken.

Sei S_p die Gruppe der Permutationen von p Objekten. Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen (Vertauschung zweier Elemente) geschrieben werden. Für eine gegebene Permutation ist die Anzahl der Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade. Es existiert deshalb ein Gruppenhomomorphismus $\mathrm{sign} : S_p \to \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$, der jeder Permutation σ ihr *Signum* zuordnet: $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ falls σ durch eine gerade Anzahl und $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ falls σ durch eine ungeraden Anzahl von Transpositionen darstellbar ist.

Der Vektorraum T^pV trägt eine offensichtliche Darstellung von S_p. Mit anderen Worten, es existiert ein offensichtlicher Homomorphismus $\pi_p : S_p \to GL(T^pV)$ der Gruppe S_p in die Gruppe der linearen invertierbaren Abbildungen von T^pV, der durch

$$\pi_p(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_p := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \tag{1.55}$$

und die lineare Fortsetzung auf Summen reiner Tensorprodukte definiert ist. Diese Darstellung ist i.A. reduzibel. Die irreduziblen Unterräume heißen *Symmetrieklassen* der Tensoren der Stufe p. Hier sind wir nur an den vollständig symmetrischen und vollständig antisymmetrischen Tensoren interessiert, die $\pi_p(\sigma)T = T$ bzw. $\pi_p(\sigma)T = \mathrm{sign}(\sigma)T$ für alle $\sigma \in S_p$ erfüllen. Wir bezeichnen die linearen Unterräume der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensoren in T^pV durch $\bigvee^p V$ und $\bigwedge^p V$. Die zugehörigen Projektionsabbildungen sind gegeben durch

$$\mathrm{Sym}_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \pi_p(\sigma)\,, \tag{1.56a}$$

$$\mathrm{Alt}_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma)\pi_p(\sigma)\,. \tag{1.56b}$$

Es existieren bilineare Abbildungen $\vee : \bigvee^p V \times \bigvee^q V \to \bigvee^{p+q} V$ und $\wedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \to \bigwedge^{p+q} V$ die man das *symmetrische* (engl. "vee product") bzw. *antisymmetrische* (engl. "wedge product") Tensorprodukt nennt. Sie sind definiert durch

$$S \vee T := \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathrm{Sym}_{p+q}(S \otimes T) \quad \text{für} \quad S \in \textstyle\bigvee^p V, \quad T \in \bigvee^q V\,, \tag{1.57a}$$

$$S \wedge T := \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathrm{Alt}_{p+q}(S \otimes T) \quad \text{für} \quad S \in \textstyle\bigwedge^p V, \quad T \in \bigwedge^q V\,, \tag{1.57b}$$

und genügen folgenden Relationen unter Umkehr der Faktoren:

$$S \vee T = T \vee S \qquad \text{für} \quad S \in \bigvee^p V, \quad T \in \bigvee^q V\,, \tag{1.58a}$$
$$S \wedge T = (-1)^{pq}\, T \wedge S \qquad \text{für} \quad S \in \bigwedge^p V, \quad T \in \bigwedge^q V\,. \tag{1.58b}$$

Die bilineare Fortsetzung von $\vee$ und $\wedge$ auf die direkten Summen

$$\bigvee V := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigvee^p V\,, \tag{1.59a}$$
$$\bigwedge V := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p V\,, \tag{1.59b}$$

verleihen diesen die Strukturen assoziativer Algebren (durch die Assoziativität des Tensorproduktes $\otimes$) mit Eins, die man die *symmetrische Tensoralgebra* bzw. die *antisymmetrische Tensoralgebra* (letztere auch alternativ *äußere Tensoralgebra*) über V nennt.

Für $v_i \in V$ $(i = 1, \cdots, p)$ ist aus (1.57) mit Induktion leicht zu beweisen, dass

$$v_1 \vee \cdots \vee v_p := \sum_{\sigma \in S_p} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}\,, \tag{1.60a}$$
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p := \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}\,. \tag{1.60b}$$

Sei $\{e_1, \cdots e_n\}$ eine Basis von V, wobei $n = \dim(V)$, dann sind Basen von $\bigvee^p V$ bzw. $\bigwedge^p V$ gegeben durch

$$\{e^{\vee}_{a_1 \cdots a_p} := e_{a_1} \vee \cdots \vee e_{a_p} \mid 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p \leq n\}\,, \tag{1.61a}$$
$$\{e^{\wedge}_{a_1 \cdots a_p} := e_{a_1} \wedge \cdots \wedge e_{a_p} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leq n\}\,. \tag{1.61b}$$

Die Basis (1.61a) enthält $\binom{n+p-1}{p}$ Vektoren und die Basis (1.61b) $\binom{n}{p}$ Vektoren falls $p \leq n$ und keinen falls $p > n$. Also ist

$$\dim\left(\bigvee^p V\right) = \binom{n+p-1}{p}\,, \tag{1.62a}$$
$$\dim\left(\bigwedge^p V\right) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{für } p \leq n \\ 0 & \text{für } p > n\,. \end{cases} \tag{1.62b}$$

Insbesondere gilt also

$$\dim(\bigvee V) = \sum_{p=0}^{\infty} \dim(\bigvee^p V) = \infty\,, \tag{1.63a}$$
$$\dim(\bigwedge V) = \sum_{p=0}^{n} \dim(\bigwedge^p V) = 2^n\,. \tag{1.63b}$$

Da man üblicherweise die Entwicklung eines allgemeinen $T \in T^pV$ wie folgt schreibt:

$$T = T^{a_1\cdots a_p}\; e^{\otimes}_{a_1\cdots a_p}\,, \tag{1.64}$$

reduziert sich dies im Falle, dass T total symmetrisch oder antisymmetrisch ist bezüglich der Basen (1.61) wie folgt:

$$T = \tfrac{1}{p!}\, T^{a_1\cdots a_p}\; e^{\vee}_{a_1\cdots a_p} \quad \text{bzw.} \quad T = \tfrac{1}{p!}\, T^{a_1\cdots a_p}\; e^{\wedge}_{a_1\cdots a_p}\,. \tag{1.65}$$

Die Projektoren Sym und Alt sind in Komponenten gegeben durch:

$$T^{(a_1\cdots a_p)} := [\mathrm{Sym}_p(T)]^{a_1\cdots a_p} = \tfrac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} T^{a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(p)}}\,, \tag{1.66a}$$

$$T^{[a_1\cdots a_p]} := [\mathrm{Alt}_p(T)]^{a_1\cdots a_p} = \tfrac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sign}(\sigma)\, T^{a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(p)}}\,. \tag{1.66b}$$

Dabei haben wir gleich noch die abkürzenden Notation eingeführt, dass eine runde Klammer um Indizes deren vollständiger Symmetrisierung im Sinne der rechten Seite von (1.66a) entspricht und eine eckige Klammer deren vollständiger Antisymmetrisierung im Sinne der rechten Seite von (1.66b). Damit nimmt die Komponentenform von (1.57) die folgende kompakten Form an:

$$[S\vee T]^{a_1\cdots a_{p+q}} = \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\, S^{(a_1\cdots a_p}T^{a_{p+1}\cdots a_{p+q})}\,, \tag{1.67a}$$

$$[S\wedge T]^{a_1\cdots a_{p+q}} = \tfrac{(p+q)!}{p!q!}\, S^{[a_1\cdots a_p}T^{a_{p+1}\cdots a_{p+q}]}\,. \tag{1.67b}$$

Für jedes $\alpha \in V^*$ existiert eine lineare Kontraktionsabbildung für $p \geq 0$, die durch

$$i_\alpha : T^pV \to T^{p-1}V\,, \quad v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_p \mapsto \alpha(v_1)\, v_2\otimes\cdots\otimes v_p\,, \tag{1.68}$$

und die lineare Fortsetzung auf Summen von Produkten definiert ist. Diese Abbildung kann durch lineare Fortsetzung auf der ganzen Tensoralgebra $\mathbb{T}V$ definiert werden, wenn wir noch festsetzen, dass i_α auf $T^0V \cong \mathbb{F}$ der konstanten Abbildung auf den Nullvektor in $\mathbb{T}V$ entsprechen soll. Es ist dann offensichtlich, dass die Einschränkung von i_α auf $\bigvee^pV$ und $\bigwedge^pV$ nach $\bigvee^{p-1}V$ bzw. $\bigwedge^{p-1}V$ abbilden. Also definiert i_α Abbildungen $\bigvee V \to \bigvee V$ und $\bigwedge V \to \bigwedge V$ die bzw. folgenden Bedingungen genügen:

$$i_\alpha(S\vee T) = i_\alpha(S)\vee T + S\vee i_\alpha(T)\,, \tag{1.69a}$$

$$i_\alpha(S\wedge T) = i_\alpha(S)\wedge T + (-1)^p\, S\wedge i_\alpha(T)\,, \tag{1.69b}$$

wobei $S \in \bigvee^pV$ und $T \in \bigvee^qV$ in der ersten und $S \in \bigwedge^pV$ und $T \in \bigwedge^qV$ in der zweiten Gleichung. Diese Relationen, die leicht aus der Definition von i_α folgen, sagen aus, dass i_α eine *Derivation* der assoziativen Algebra $\bigvee V$ bzw. eine *Antiderivation* der assoziativen Algebra $\bigwedge V$ ist. Man beachte dies vor dem Hintergrund, dass i_α keine Derivation der assoziativen Tensoralgebra (1.53) ist.

1.7 Hodge Dualität

Wir betrachten nun den Spezialfall eines Vektorraumes V mit einer nicht-ausgearteten, *symmetrischen* Bilinearform, die wir aufgrund dieser Spezialisierung η statt ω nennen. Die gemäß (1.26) zugehörige, nicht-ausgeartete und symmetrische Bilinearform $\tilde{\eta}$ nennen wir Bemerkung 27 folgend nun η^{-1}.

Es ist klar, dass η und η^{-1} fortgesetzt werden können zu einer nicht-ausgearteten, symmetrischen Bilinearform auf dem Tensorprodukt

$$T^q_p V := (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ Faktoren}}) \otimes (\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ Faktoren}}) \,. \tag{1.70}$$

Wir bezeichnen diese Fortsetzung mit einer eckigen Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Auf reinen Tensorprodukten hat man dann einfach das Produkt der Faktorweisen inneren Produkte:

$$\begin{aligned}&\Big\langle (v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) \otimes (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \,,\, (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \otimes (\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_p) \Big\rangle \\ &\quad := \prod_{a=1}^{p} \eta(v_a, w_a) \prod_{b=1}^{q} \eta^{-1}(\alpha_b, \beta_b) \,.\end{aligned} \tag{1.71}$$

Auf ganz $T^p_q V$ ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dann durch bilineare Fortsetzung eindeutig definiert.

Hier interessieren wir uns nur für das innere Produkt auf allen $\bigwedge^p V^*$, also auf den vollstänsig antisymmetrischen Tensorprodukten des Dualraums (den "'Formen"'). Dann gilt wegen

$$\Big\langle \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \,,\, \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_p \Big\rangle := \prod_{a=1}^{p} \eta^{-1}(\alpha_a, \beta_a) \tag{1.72}$$

entsprechend für die antisymmetrischen Tensorprodukte wegen (1.60b)

$$\begin{aligned}&\Big\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) \,,\, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \Big\rangle \\ = &\quad \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\sigma' \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma) \mathrm{sign}(\sigma') \prod_{a=1}^{p} \eta^{-1}(\alpha_{\sigma(a)}, \beta_{\sigma'(a)}) \\ = &\quad \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\sigma' \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma' \circ \sigma^{-1}) \prod_{a=1}^{p} \eta^{-1}(\alpha_a, \beta_{\sigma' \circ \sigma^{-1}(a)}) \\ = &\quad p! \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{a=1}^{p} \eta^{-1}(\alpha_a, \beta_{\sigma(a)}) \,.\end{aligned} \tag{1.73}$$

Dabei haben wir für die letzte Gleichheit folgende Zwischenschritte ausgeführt: Zunächst ist klar, dass $\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma^{-1})$, denn $\mathrm{sign}(\sigma) = \pm 1$, so dass $\mathrm{sign}(\sigma) = 1/\mathrm{sign}(\sigma)$. Da $\mathrm{sign} : S_p \to \{-1, +1\}$ Gruppenhomomorphismus ist, muss aber

$\text{sign}(\sigma^{-1}) = 1/\text{sign}(\sigma)$ sein. Wir schreiben dann $\text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma') = \text{sign}(\sigma'')$ mit $\sigma'' := \sigma' \circ \sigma^{-1}$. Dann ersetzen wir den laufenden Index a in $\prod$ durch $\sigma^{-1}(a)$, was wir dürfen, denn dadurch wird nur die Reihenfolge des p-fachen (kommutativen) Produktes der Faktoren $\eta^{-1}(\alpha_{\sigma(a)}, \beta_{\sigma'(a)})$ umgeordnet. Die Summe über σ' ersetzen wir durch eine über σ'', denn dadurch wird nur die Reihenfolge der Summanden geändert. Damit hängt kein Summand mehr von σ ab und die Summe $\sum_{\sigma\in S_p}$ kann ausgeführt werden und ergibt einen Faktor $p!$. Die Summe über σ'' ergibt nun gerade die letzte Zeile von (1.73), wenn man σ'' wieder in σ umbenennt.

Durch bilineare Fortsetzung ergibt sich dann das innere Produkt zweier p-Formen $\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{a_1\cdots a_p}\theta^{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{a_p}$ und $\beta = \frac{1}{p!}\beta_{b_1\cdots b_p}\theta^{b_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{b_p}$ zu

$$\big\langle \alpha, \beta \big\rangle = \alpha_{a_1\cdots a_p}\beta^{a_1\cdots a_p} \,. \tag{1.74}$$

Es zeigt sich nun, dass im der Faktor $p!$ in (1.73) etwas unnatürlich ist, jedenfalls im total antisymmetrischen Fall. Betrachtet man etwa das p-Fache äußere Produkt $\alpha = \theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^p$ von orthonormierten 1-Formen θ^a, die also $\eta^{-1}(\theta^a,\theta^b) = \eta^{ab} = \pm\delta^{ab}$ genügen, dann ist $\langle\alpha,\alpha\rangle = \pm p!$. Es wäre natürlicher, wenn dieses Produkt ebenfalls vom Betrag 1 wäre. Deshalb fürt man für Formen oft ein renormirtes inneres Produkt ein, dass entsprechend auf $\bigwedge^p V^*$ wie folgt definiert ist:

$$\big\langle \cdot\,,\,\cdot \big\rangle_{\text{norm}}\big|_{\bigwedge^p V^*} := \tfrac{1}{p!}\big\langle \cdot\,,\,\cdot \big\rangle\big|_{\bigwedge^p V^*} \tag{1.75}$$

Dann gilt eben

$$\big\langle \alpha, \beta \big\rangle_{\text{norm}} = \tfrac{1}{p!}\alpha_{a_1\cdots a_p}\beta^{a_1\cdots a_p} \,, \tag{1.76}$$

was auch die die Redundanz in (1.74) beseitigt, die darin besteht, dass in der Summe auf der rechten Seite ein bestimmtes Produkt, etwa $\alpha_{12\cdots p}\beta^{12\cdots p}$, mit jeder Permutation der Indizes $1, 2, \cdots, p$ einmal vorkommt, also $p!$ mal, denn alle diese Produkte sind wegen der Antisymmetrie der α- und β- Koeffizienten gleich. Das normierte Skalarprodukt ist hingegen – wie gewohnt – gleich der Summe aller Produkte *linear unabhängiger* Koeffizienten.

Nach diesen Vorbereitungen über die Fortsetzung des inneren Produktes kommen wir zur Hodge Dualität. Dazu wählen wir auf V eine Volumenform $\varepsilon \in \bigwedge^n V^*$. Diese kann, muss aber nicht übereinstimmen mit der Volumenform, die durch η und die Wahl einer Orientierung o auf V eindeutig bestimmt ist. Letzte hat folgende Form: Ist $\{e_1, \cdots, \eta_n\}$ eine bezüglich η orthonormierte Basis, d.h. gilt $\eta(e_a, e_b) = \pm\delta_{ab}$, und hat diese Basis die Orientierung o, dann

$$\varepsilon := \theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n \,, \tag{1.77}$$

wobei $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ Dualbasis zu $\{e_1, \cdots, \eta_n\}$ ist. Letztlich werden wir die Hodge-Dualität bezüglich einer solchen, durch η (und die Wahl einer Orientierung) bestimmten Volumenform betrachten, ihre allgemeine Definition, die wir gleich geben werden, lässt aber auch andere Volumenformen zu. Wir werden im Folgenen mehrfach auf diese Möglichkeit hinweisen, ein von η unabhängiges ε zu wählen.

Die Abbildung der *Hodge Dualität* für Formen vom Grade $0 \leq p \leq n$ ist nun definiert als ein linearer Isomorphismus

$$\star_p : \bigwedge^p V^* \to \bigwedge^{n-p} V^* \,, \tag{1.78a}$$

der folgende Bedingung erfüllt:

$$\alpha \wedge \star_p \beta = \varepsilon \, \langle \alpha \,,\, \beta \rangle_{\mathrm{norm}} \,. \tag{1.78b}$$

Das bedeutet, dass das Bild von $\beta \in \bigwedge^p V^*$ unter $\star_p$ in $\bigwedge^{n-p} V^*$ defniert ist durch die Forderung der Gültigkeit von (1.78b) für alle $\alpha \in \bigwedge^p V^*$. Die Linearität der Abbildung ist offensichtlich. Die Eindeutigkeit von $\star_p$ folgt aus der Tatsache, dass falls $\lambda \in \bigwedge^{n-p} V^*$ und $\alpha \wedge \lambda = 0$ gilt für alle $\alpha \in \bigwedge^p V^*$, notwendigerweise $\lambda = 0$ sein muss. Um die Existenz zu zeigen reicht es aus, $\star_p$ auf einer Basis zu definieren. Da (1.78b) auch in α linear ist, reicht es sogar aus (1.78b) für die Spezialfälle zu verifizieren, in denen α alle Basisvektoren durchläuft.

Von nun an werden wir der Standardpraxis folgen und den Index p an $\star$ weglassen. Das ist gerechtfertigt, wenn aus dem Kontext klar wird, auf Formen von welchem Grad die Hodge-Abbildung $\star$ wirken soll.

Sei $\{e_1, \cdots e_n\}$ eine Basis von V und $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*; d.h., $\theta^a(e_b) = \delta^a_b$. Sei darüberhinaus $\{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ die Basis von V^* die sich als Bild von $\{e_1, \cdots e_n\}$ unter $\eta_\downarrow$ ergibt, also $\theta_a = \eta_{ab}\theta^b$. Dann hat die Abbildung $\star$ auf der Basis $\{\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_p} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leq n\}$ von $\bigwedge^p V^*$ die einfache Form

$$\star(\theta_{b_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{b_p}) = \tfrac{1}{(n-p)!} \varepsilon_{b_1 \cdots b_p \, a_{p+1} \cdots a_n} \, \theta^{a_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_n} \,. \tag{1.79}$$

Zum Beweis überprüft man (1.78b) für $\alpha = \theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}$ und $\beta = \theta_{b_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{b_p}$. Statt (1.79) können wier schreiben

$$\begin{aligned}
\star(\theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}) &= \tfrac{1}{(n-p)!} \, \eta^{a_1 b_1} \cdots \eta^{a_p b_p} \, \varepsilon_{b_1 \cdots b_p b_{p+1} \cdots b_n} \, \theta^{b_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{b_n} \\
&= \tfrac{1}{(n-p)!} \, \varepsilon^{a_1 \cdots a_p}{}_{a_{p+1} \cdots a_n} \, \theta^{a_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_n} \,,
\end{aligned} \tag{1.80}$$

was die Abhängigkeit von ε und η explizit zeigt..

Ist $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \cdots a_p} \theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}$, dann $\star\alpha = \frac{1}{(n-p)!} (\star\alpha)_{b_1 \cdots b_{n-p}} \theta^{b_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{b_{n-p}}$, wobei

$$(\star\alpha)_{b_1 \cdots b_{n-p}} = \tfrac{1}{p!} \, \alpha_{a_1 \cdots a_p} \varepsilon^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_{n-p}} \,. \tag{1.81}$$

Dies gibt den bekannten Ausdruck der Hodge-Abbildung in Komponenten wieder. Man beachte, dass es in Komponentenform die ersten (statt die letzten) p Indizes sind, die kontrahiert werden.

Zweifaches Anwenden von $\star$ (d.h. $\star_{(n-p)} \circ \star_p$) führt zu folgender Selbstabbildung von $\bigwedge^p V^*$:

$$\begin{aligned}
&\star\big(\star(\theta^{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{a_p})\big)\\
&\quad=\tfrac{1}{p!(n-p)!}\,\varepsilon^{a_1\cdots a_p}{}_{a_{p+1}\cdots a_n}\,\varepsilon^{a_{p+1}\cdots a_n}{}_{b_1\cdots b_p}\,\theta^{b_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{b_p}\\
&\quad=\tfrac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\,\varepsilon^{a_1\cdots a_p\,a_{p+1}\cdots a_n}\,\varepsilon_{b_1\cdots b_p\,a_{p+1}\cdots a_n}\,\theta^{b_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{b_p}\\
&\quad=(-1)^{p(n-p)}\,\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle_{\text{norm}}\,\theta^{a_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{a_p}\,.
\end{aligned}\tag{1.82}$$

Beachte, dass

$$\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle_{\text{norm}}=\tfrac{1}{n!}\eta^{a_1b_1}\cdots\eta^{a_nb_n}\varepsilon_{a_1\cdots a_n}\varepsilon_{b_1\cdots b_n}=(\varepsilon_{12\cdots n})^2/\det\{\eta(e_a,e_b)\}\,.\tag{1.83}$$

Diese Formel gilt für alle Volumenformen ε in der Definition (1.78b), unabhängig davon, ob sie die durch η (und die Wahl der Orientierung) definiert sind oder nicht.

Da die rechte Seite von (1.78b) symmetrisch unter dem Austausch $\alpha\leftrightarrow\beta$ ist, muss dies auch für die linke Seite gelten. Mit (1.82) bekommen wir

$$\begin{aligned}
\langle\alpha,\beta\rangle_{\text{norm}}\,\varepsilon&=\alpha\wedge\star\beta=\beta\wedge\star\alpha=(-1)^{p(n-p)}\star\alpha\wedge\beta\\
&=\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle^{-1}_{\text{norm}}\star\alpha\wedge\star\star\beta=\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle^{-1}_{\text{norm}}\,\langle\star\alpha\,,\star\beta\rangle_{\text{norm}}\,\varepsilon\,,
\end{aligned}\tag{1.84}$$

also

$$\langle\star\alpha\,,\star\beta\rangle_{\text{norm}}=\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle_{\text{norm}}\langle\alpha,\beta\rangle_{\text{norm}}\,.\tag{1.85}$$

Daraus und aus (1.82)) folgt für $\alpha\in\bigwedge^p V^*$ und $\beta\in\bigwedge^{n-p}V^*$, dass

$$\langle\alpha,\star\beta\rangle_{\text{norm}}=\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle^{-1}_{\text{norm}}\langle\star\alpha\,,\star\star\beta\rangle_{\text{norm}}=(-1)^{p(n-p)}\,\langle\star\alpha,\beta\rangle_{\text{norm}}\,.\tag{1.86}$$

Dies zeigt, dass die zu $\star$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{norm}}$ adjungierte Abbildung durch $(-1)^{p(n-p)}\star$ gegeben ist. Genauer schreiben wir dies in den zwei äquivalenten Formen

$$(\star_{n-p})^\dagger=(-1)^{p(n-p)}\star_p\quad\text{oder}\quad(\star_p)^\dagger=(-1)^{p(n-p)}\star_{n-p}\ .\tag{1.87}$$

Auch die Ausdrücke (1.82), (1.84)(1.85) und (1.86) sind immer noch für allgemeine Volumenformen ε in der Definition (1.78b) gültig. Wenn wir nun von unserer anfänglichen Wahl Gebrauch machen, also benutzen, dass ε die durch das innere Produkt η und die Orientierung o eindeutig bestimmte Volumenform ist, die dem Parallelpiped, das von einer o-orientierten und η-orthonormierten Basis aufgespannt wird, das Volumen 1 zuweist (wie in (1.77)), dann gilt

$$\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle_{\text{norm}}=(-1)^{n_-}\,.\tag{1.88}$$

Hier ist n_- die Dimension des maximalen Unterraums von V, eingeschränkt auf den η negativ-definit ist. Mit anderen Worten, die Signatur von η ist (n_+,n_-). Gleichung (1.85) zeigt dann, dass $\star$ eine Isometrie ist für gerades n_-, und eine Anti-Isometrie für ungerades n_-. Ein wichtiges Beispiel für letzteren Fall sind die Lorentzmetriken in allen Dimensionen (sofern man die "'mostly plus"' Konvention benutzt; sonst nur in geraden Raum-Zeit Dimensionen).

Zum Schluss erwähnen wir noch eine nützliche Formel. Sei $v \in V$ und $i_v : T^p V^* \to T^{p-1} V^*$ die Abbildung, die v in den ersten Tensorfaktor einsetzt. Eingeschränkt auf vollständig antisymmetrische Tensoren definiert diese eine Abbildung $i_v : \bigwedge^p V^* \to \bigwedge^{p-1} V^*$. Für $\alpha \in \bigwedge^p V^*$ haben wir dann

$$i_v \star \alpha = \star(\alpha \wedge v^\flat) \,. \tag{1.89}$$

wo $v^\flat := \eta_\downarrow(v)$. Zum Beweis reicht es wegen der Linearität aus diese Beziehung für Basiselemente $v = e_a$ von V und $\alpha = \theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}$ von $\bigwedge^p V^*$ nachzuprüfen, was aber offensichtlich ist, wenn man (1.80) benutzt.

Chapter 2

Symmetrien innerer Produkte

2.1 Lie Algebren allgemein

Im Folgenden ist V wieder ein Vektorraum über $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Der $\mathbb{F}$-Vektorraum $\mathrm{End}(V)$ ist wie zu Beginn bereits diskutiert eine assoziative Algebra deren Multiplikation die Komposition ist. Damit ist es aber auch eine Lie-Algebra.

Definition 35. Eine Lie-Algebra L über $\mathbb{F}$ der Dimension n ist ein Paar $L := (V, [\cdot,\cdot])$. Dabei ist V ein Vektorraum über $\mathbb{F}$ und $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, $(X,Y) \mapsto [X,Y]$, eine Abbildung, genannt *Lie-Klammer* oder *Lie-Produkt*, die folgende Eigenschaften erfüllt. Für alle $X, Y, Z \in V$ und alle $a \in \mathbb{F}$ gilt:

$$[X,Y] = -[Y,X] \qquad \text{(Antisymmetrie)}\,, \tag{2.1a}$$
$$[X, Y + aZ] = [X,Y] + a[X,Z] \qquad \text{(Bilinearität)}\,, \tag{2.1b}$$
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \qquad \text{(Jacobi-Identität)}\,. \tag{2.1c}$$

Man beachte, dass die Jacobi-Identität im gewissen Sinne als Ersatz für die i.A. fehlende Assoziativität genommen werden kann: $[X,[Y,Z]] \neq [[X,Y],Z]$.

Bemerkung 36. Jede assoziative Algebra wird zu einer Lie-Algebra, wenn man das Lie-Produkt als Kommutator definiert: $[X,Y] := X \cdot Y - Y \cdot Y$. Dabei ist mit einem Punkt das assoziative Produkt bezeichnet. Antisymmetrie und Bilinearität sind trivial erfüllt, während die Jacobi-Identität eine leicht zu verifizierende Folge der Assoziativität ist. Insbesondere ist also die assoziative Algebra $\mathrm{End}(V)$ auch Lie-Algebra, wenn wir für $X, Y \in \mathrm{End}(V)$ definieren

$$[X,Y] := X \circ Y - Y \circ Y\,. \tag{2.2}$$

Es wird im Folgenden immer aus dem Kontext ersichtlich sein, ob mit dem Symbol $\mathrm{End}(V)$ nur der Vektorraum, die assoziative Algebra, oder die Lie-Algebra gemeint ist; meist ist es Letzteres.

2.2 Lie-Gruppen und -Algebren, die symmetriesche oder antisymmetrische innere Produkte invariant lassen

Definition 37. Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}$ und $\omega : V \times V \to \mathbb{F}$ eine nicht ausgeartete symmetrische ($\epsilon = 1$) oder antisymmetrische ($\epsilon = -1$) Bilinearform; d.h. $\omega(v, w) = \epsilon\, \omega(w, v)$. Dann ist die *Orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(V, \omega)$ *von* V *bezüglich* ω die Menge derjenigen Abbildungen in $\mathrm{GL}(V)$, die ω invariant lassen. Da $\omega(Av, Aw) = \omega(v, w)\, \forall v, w \in V \Leftrightarrow A^\dagger = A^{-1}$, ist

$$\mathrm{O}(V, \omega) := \left\{A \in \mathrm{GL}(V) \mid A^\dagger = A^{-1}\right\}. \tag{2.3}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$ bilden. Die zugehörige Lie-Algebra besteht aus allen Endomorphismen X von V für die $X^\dagger = -X$, also mit (1.46)

$$\mathfrak{o}(V, \omega) := \left\{X \in \mathrm{End}(V) \mid P_+(X) = 0\right\} = \mathrm{Kern}(P_+)\,. \tag{2.4a}$$

Da $\mathrm{Kern}(P_+) = \mathrm{Bild}(P_-)$ können wir auch schreiben

$$\mathfrak{o}(V, \omega) := P_-\big(\mathrm{End}(V)\big) = \mathrm{Bild}(P_-)\,. \tag{2.4b}$$

Wir erinnern an dieser Stelle an den Zusammenhang (1.47), aus dem die Abhängigkeit der Abbildung $\mathcal{C}(X) := X^\dagger$ von ω hervorgeht. □

2.3 Basen der Lie-Algebren und die Lie-Produkte ihrer Elemente

Seien $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ und $\{\eta^a \mid a = 1, \cdots, n\}$ duale Basen von V bzw. V^*. Identifiziert man $\mathrm{End}(V)$ mit $V \otimes V^*$, dann ist eine Basis von $\mathrm{End}(V)$ gegeben durch die n^2 Elemente

$$B^a_b := e_b \otimes \eta^a \in \mathrm{End}(V)\,. \tag{2.5}$$

Für diese gilt offensichtlich

$$\left[B^a_b, B^c_d\right] = \delta^a_d\, B^c_b - \delta^c_b\, B^a_d\,. \tag{2.6}$$

Die transponierten Basiselemente folgen aus der Definitionsgleichung (1.15b) sofort zu

$$(B^a_b)^\top = (e_b \otimes \eta^a)^\top = \eta^a \otimes e_b\,. \tag{2.7}$$

Damit und mit (1.47) folgen die adjungierten Basiselemente so:

$$\begin{aligned}(B^a_b)^\dagger &= \omega_\uparrow \circ (B^a_b)^\top \circ \omega_\downarrow \\ &= \omega_\uparrow \circ \eta^a \otimes e_b \circ \omega_\downarrow \\ &= \omega_\uparrow(\eta^a) \otimes \omega_\downarrow^\top(e_b) \\ &= \epsilon\, \omega_\uparrow(\eta^a) \otimes \omega_\downarrow(e_b)\,,\end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei wir im letzten Schritt (1.32) benutzt haben.

Wir definieren

$$\eta_a := \omega_\downarrow(e_a) = \omega_{ab}\eta^b\,, \tag{2.9a}$$

$$e^a := \omega_\uparrow(\eta^a) = \omega^{ba}e_b\,, \tag{2.9b}$$

wobei wir (1.34) benutzt haben mit $\tilde{\omega}^{ab} = \omega^{ab}$. Es gilt dann offensichtlich

$$\eta_a(e_b) = \omega_{ab}\,, \tag{2.10a}$$

$$\eta^a(e^b) = \omega^{ab}\,. \tag{2.10b}$$

Damit können wir (2.8) schreiben als

$$(B^a_b)^\dagger = \epsilon\, e^a \otimes \eta_b\,. \tag{2.11}$$

Mit Hilfe der Basis (2.5) und der Beziehung (2.11) können wir nun leicht eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(V,\omega)$ angeben. Wir erhalten Sie als maximale, linear unabhängie Teilmenge im Bild der Basis $\{B^a_b \mid 1 \leq a, b \leq n\}$ unter der Projektionsabbildung P_-. Es ist (der Faktor -2ϵ ist konventionell und dient nur der späteren Bequemlichkeit):

$$M^a_b := -2\epsilon P_-(B^a_b) = e^a \otimes \eta_b - \epsilon\, e_b \otimes \eta^a\,. \tag{2.12a}$$

Der darin enthaltene maximale Satz linear unabhängiger Elemente wird noch überschaubarer, wenn wir die Linearkombinationen

$$M_{ab} := \omega_{ac}M^c_b = e_a \otimes \eta_b - \epsilon\, e_b \otimes \eta_a\,. \tag{2.12b}$$

betrachten, denn dann ist offensichtlich

$$M_{ab} = -\epsilon\, M_{ba}\,. \tag{2.12c}$$

Beachte, dass die Transformation $M^a_b \mapsto M_{ab} := \omega_{ac}M^c_b$ natürlich invertierbar ist: $M_{ab} \mapsto M^a_b := \omega^{ca}M_{cb}$. Unter den M_{ab} sind aber genau die $\frac{1}{2}n(n-\epsilon)$ Vektoren M_{ab} mit $a < b$ (für $\epsilon = 1$) bzw. $a \leq b$ (für $\epsilon = -1$) linear unabhängig. Also ist

$$\mathfrak{o}(V,\omega) = \begin{cases} \text{Span}\big\{M_{ab} \mid 1 \leq a < b \leq n\big\} & \text{für} \quad \epsilon = 1 \\ \text{Span}\big\{M_{ab} \mid 1 \leq a \leq b \leq n\big\} & \text{für} \quad \epsilon = -1\,, \end{cases} \tag{2.13a}$$

mit

$$\dim\Big(\mathfrak{o}(V,\omega)\Big) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1) & \text{für} \quad \epsilon = 1 \\ \frac{1}{2}n(n+1) & \text{für} \quad \epsilon = -1\,. \end{cases} \tag{2.13b}$$

In der Basis (2.13a) kann nun mit Hilfe der expliziten Ausdrücke (2.12b) und den Relationen (2.10a) die Lie-Klammern der Basiselemente leicht ausgerechnet werden. Das Resultat ist:

$$\big[M_{ab}, M_{cd}\big] = \omega_{ad}M_{bc} + \omega_{bc}M_{ad} - \epsilon\omega_{ac}M_{bd} - \epsilon\omega_{bd}M_{ac} \tag{2.14a}$$

$$= \omega_{ad}M_{bc} + \omega_{bc}M_{ad} - \omega_{ca}M_{bd} - \omega_{db}M_{ac}\,. \tag{2.14b}$$

Dabei haben wir beim übergang von (2.14a) nach (2.14b) lediglich die Symmetrie/Antisymmetrie von ω ausgenutzt, d.h., $\epsilon\omega_{ac} = \omega_{ca}$ etc.

Chapter 3

Die Exponentialabbildung

Definition 38. Man nennt

$$\begin{aligned} \exp : \mathrm{End}(V) &\to \mathrm{GL}(V) \\ X &\mapsto \exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die *Exponentialabbildung* auf $\mathrm{End}(V)$. □

Bemerkung 39. Der Definitionsbereich von exp ist ganz $\mathrm{End}(V)$, da die Exponetialreihe in irgendeiner der Standardnormen auf $\mathrm{End}(V)$ absolut konvergiert. Das Bild von exp liegt in der Tat in der Untermenge $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$, wie wir gleich sehen werden werden. □

Ist $X \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in \mathrm{GL}(V)$, und sei $\mathrm{Ad}_A : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ die Abbildung

$$\mathrm{Ad}_A(X) := A \circ X \circ A^{-1} \, . \tag{3.2}$$

Dann gilt klarerweise $\mathrm{Ad}_A(X^n) = (\mathrm{Ad}_A(X))^n$ und damit auch, für alle A in $\mathrm{GL}(V)$,

$$\mathrm{Ad}_A \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_A \, . \tag{3.3}$$

Determinante und Spur sind die bekannten $\mathbb{F}$-wertige Funktionen auf $\mathrm{End}(V)$, die wir mit ‘det’ und ‘spur’ bezeichnen. Für sie gilt

Proposition 40.

$$\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{spur} \, . \tag{3.4}$$

Beweis. Sei $X \in \mathrm{End}(V)$; ist $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, so betrachte man den komplexifizierten Vektorraum $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$ mit seiner kanonisch-complexen Struktur und setzt X $\mathbb{C}$-linear fort. über $\mathbb{C}$ existiert dann eine Basis $\{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von $V_{\mathbb{C}}$ bzw. V (falls es schon komplex war) aus Eigenvektoren von X. In Matrixsprechweise ist dies äquivalent der Aussage, dass X triangularisierbar ist. Diese sind auch die Eigenvektoren der Abbildung $\exp(X)$ zu den exponentierten Eigenwerten. Nun ist die Spur einer Abbildung die Summe, die Determinante das Produkt der Eigenwerte. Natürlich gilt, dass das Produkt der exponentierten Eigenwerte von X gleich ist ihrer exponentierten Summe. Das besagt aber gerade (3.4). □

Wir definieren die Untergruppe $GL^+(V) \subset GL(V)$ (vgl. (1.2)) vom Index 2 durch

$$GL^+(V) := \{A \in \mathrm{End}(V) \mid \det(A) > 0\} . \tag{3.5}$$

Dann impliziert (3.4), dass das Bild von exp in $GL^+(V)$ enthalten ist.

Ist ω eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V und $G \subset GL(V)$ die Lie-Gruppe der ω-erhaltenden Abbildungen, so ergibt sich eine Vielzahl von wichtigen Spezialfällen, die wir bereits diskutiert haben. Wir wiederholen nochmals die Charakterisierung (2.3) der zugehörigen Gruppe

$$A \in O(V,\omega) \;\Leftrightarrow\; \omega_\downarrow \circ A \circ \omega_\uparrow = (A^\top)^{-1} \tag{3.6}$$

und ihrer Lie-Algebra (2.4),

$$X \in \mathfrak{o}(V,\omega) \;\Leftrightarrow\; \omega_\downarrow \circ X \circ \omega_\uparrow = -X^\top . \tag{3.7}$$

Daraus sieht man sofort, dass $\exp(X) \in G$ falls $X \in \mathfrak{g}$, denn $\omega_\downarrow \circ \exp(X) \circ \omega_\uparrow = \exp(\omega_\downarrow \circ X \circ \omega_\uparrow)$, da $\omega_\uparrow = (\omega_\downarrow)^{-1}$.

3.1 Einparametrige Untergruppen

Wir haben gerade gesehen, dass für jedes $X \in \mathfrak{g}$ die Kurve $\gamma(t) := \exp(tX)$ in G verläuft und die Gruppenidentität $\gamma(0) = \exp(0) = e$ mit $g = \exp(X)$ verbindet. Die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \to G\,, \quad t \mapsto \exp(tX) \tag{3.8}$$

ist ein Homomorphismus der Abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die Gruppe $(G, \circ)$; d.h es gilt

$$\gamma(0) \;=\; e \qquad\qquad \text{wobei } e = \text{Identität in } G\,, \tag{3.9a}$$

$$\gamma(t+s) \;=\; \gamma(t) \circ \gamma(s) \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}\,. \tag{3.9b}$$

Allgemein nennt man eine Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to G$ die (3.9a-3.9b) genügt eine *einparameter Untergruppe* von G.

Proposition 41. *Jede einparameter Untergruppe γ ist von der Form $\gamma(t) = \exp(tX)$, wobei $\dot\gamma = X \in \mathtt{End}(V)$. (Wir setzen $\dot\gamma(t)$ die Ableitung der Funktion γ an der Stelle t und $\dot\gamma := \dot\gamma(0)$.)*

Beweis. Sei $\beta(t) := \gamma(X) \circ \exp(-tX)$, dann ist $\dot{\beta}(t) = \dot{\gamma}(t) \circ \exp(-tX) - \gamma(t) \circ X \circ \exp(-tx)$. Differenziert man $\gamma(t+s) = \gamma(t) \circ \gamma(s)$ nach s bei $s = 0$, so folgt $\dot{\gamma}(t) = \gamma(t) \circ X$. Dies zeigt $\dot{\beta}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$; also ist $\beta(t) = \beta(t = 0) = e$. $\square$

3.2 Identifikation mit Matrixgruppen

Oft ist es günstig V mit $\mathbb{F}^n$ und $End(V)$ mit End$(\mathbb{F}^n) = Mat(n, \mathbb{F})$, der Algebra der $n \times n$ - Matrizen, zu identifizieren. Dazu einige Bemerkungen: Eine Basis $B := \{e_a \mid a = 1, \cdots, n\}$ von V kann als Isomorphismus $B : V \to \mathbb{F}^n$ aufgefasst werden, der wir folgt charakterisiert ist: Sei $v = v^a e_a$, dann $B(v) := (v^1, \cdots, v^n)$, d.h. B ordnet jedem Vektor seine Komponenten bezüglich sich selbst (der Basis) zu. Dieser Isomorphismus induziert einen Algebren-Isomorphismus wie folgt:

$$M_B : \mathrm{End}(V) \to Mat(n, \mathbb{F}), \quad A \mapsto M_B(A) := B \circ A \circ B^{-1}. \tag{3.10}$$

Somit können wir *nach Wahl von* B die Vektorräume V und $\mathbb{F}^n$ und die Algebren End(V) und $Mat(n, \mathbb{F})$ identifizieren. Da kein B in der Menge aller Basen von sich aus ausgezeichnet ist, ist auch keine der zugehörigen Identifikationen $V \leftrightarrow \mathbb{F}^n$ bzw. End$(V) \leftrightarrow Mat(n, \mathbb{F})$ ausgezeichnet.

Wir betrachten also zunächst die Abbildung

$$\exp : Mat(n, \mathbb{F}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}). \tag{3.11}$$

GL$(n, \mathbb{F})$ ist eine offene Untermenge von $Mat(n, \mathbb{F})$, denn sie ist Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der stetigen Determinantenfunktion, d.h. $GL(n, \mathbb{F}) = det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$.

3.3 Injektivität und Surjektivität

Im Allgemeinen ist exp weder injektiv noch surjektiv. Ein einfaches Beispiel für fehlende Injektivität ist $G = U(1)$, parametrisiert durch die komplexen Zahlen z mit $|z| = 1$, und $(g) = i\mathbb{R}$ (imaginären Zahlen), so ist $\exp^{-1}(1) = \{in2\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Dies lässt sich auf alle höherdimensionalen Drehgruppen verallgemeinern. Allgemein kann exp nicht injektiv sein wenn G kompakt ist ($\mathfrak{g}$ ist als Vektorraum nie kompakt.)

Für fehlende Surjektivität führen wir folgendes, für die SRT relevantes Beispiel an. Wir betrachte die Gruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) := \{A \in Mat(2, \mathbb{C}) \mid det(A) = 1\}, \tag{3.12}$$

und darin Matrizen der Form

$$A_a = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C} - \{0\}. \tag{3.13}$$

Beachte, dass alle diese Elemente durch eine stetige Kurve mit der Identität verbunden werden können, denn $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist zusammenhängend. (Für lokal wegezusammenhängende topologische Räume sind 'Zusammenhang' und 'Wegezusammenhang' äquivalent). Zum Beispiel verbindet die Kurve

$$A_a(t) = \begin{pmatrix} \exp(t\pi i) & ta \\ 0 & \exp(-t\pi i) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

die Matrix A_a innerhalb $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ stetig mit der Identität.

Proposition 42. *Keine Matrix der Form (3.13) liegt im Bild der Exponentialfunktion.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, also das gälte $\exp(X) = A_a$. Damit $\exp(X) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ muss wegen (3.4) $\mathrm{spur}(X) = 0$ gelten. Die Eigenwerte von X sind also $\pm\lambda$ und genügen $\exp(\pm\lambda) = -1$, da -1 der Eigenwert von A_a ist. Also ist $\lambda = i\pi$. Insbesondere ist X diagonalisierbar da ihre Eigenwerte verschieden sind. Es existiert also ein $T \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, so dass $T \cdot D \cdot T^{-1} = X$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda, -\lambda)$. Dann muss wegen $\exp(\pm\lambda) = -1$ gelten $A_a = \exp(X) = T \cdot \exp(D) \cdot T^{-1} = T \cdot \mathrm{diag}(-1,-1) \cdot T^{-1} = \mathrm{diag}(-1,-1)$, was ein Widerspruch ist. □

Trotz des Fehlens globaler in- und Surjektivität gelten beide lokal. Differenzieren wir die Abbildung $\exp : \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ an der Stelle $0 \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$, so erhalten wir die Identitätsabbildung $\mathrm{id} \in \mathrm{End}(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{F}))$: $\exp'(0) = \mathrm{id}$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert also eine offene Umgebung $U \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$ der Nullmatrix und eine offene Umgebung $V \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ der Einheitsmatrix, so dass $\exp|_U : U \to V$ ein eine glatte (unendlich differenzierbare) Bijektion mit glatter Umkehrung ist. Schränkt man exp auf die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Mat}(n,\mathbb{F})$, so erhält man die entsprechenden Aussagen mit $U' = U \cap \mathfrak{g}$ und $V' = V \cap G$. Außerdem gilt:

Proposition 43. *Ist G zusammenhängende Lie-Gruppe, so ist jedes $A \in G$ das Produkt endlich vieler Exponentialbilder, d.h. es existieren $X_i \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \cdots, n$, so dass*

$$A = \exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \cdots \exp(X_n)\,. \tag{3.15}$$

Der Beweis ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes für topologische Gruppen:

Proposition 44. *Sei G zusammenhängende topologische Gruppe mit Gruppenidentität $e \in G$. Sei fernen U eine offene Umgebung von e. Dann ist jedes Element $g \in U$ Produkt endlich vieler Elemente aus U.*

Beweis von Proposition 44. Wir zeigen zuerst, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U^{-1} = U$ annehmen dürfen, wobei $U^{-1} := \{g^{-1} : g \in U\}$. Dazu zeigen wir, dass jede offene Umgebung V von e eine offene Umgebung U von e enthält die $U^{-1} = U$ erfüllt. Sei $m : G \times G \to G$ die Multiplikationsabbildung; dann ist $m^{-1}(V) \subset G \times G$ offen und enthält (e,e) (weil $m(e,e) = e$). Ist $B = \{B_\alpha \subset G : \alpha \in \mathcal{I}\}$ eine Basis der Topologie von G, dann bildet $B \times B = \{B_\alpha \times B_\beta \subset G \times G : \alpha, \beta \in \mathcal{I}\}$ eine Basis der Topologie von $G \times G$. Es existieren also zwei offene Mengen B_α und

B_β aus der Basis B, die beide e enthalten, so dass $m(B_\alpha, B_\beta) \subseteq V$. Insbesondere $B_\alpha = m(B_\alpha, e) \subset V$ und $B_\beta = m(e, B_\beta) \subset V$. Dann ist auch $W := B_\alpha \cap B_\beta$ eine in V enthaltene offene Umgebung von e die $\phi(V, V) \subseteq U$ genügt. Das Gleiche gilt dann auch für $U := W \cap W^{-1}$. Letztere erfüllt natürlich $U^{-1} = U$. Wir betrachten nun die Menge $G' \subseteq G$ aller endlichen Produkte aus U. Diese bilden eine Untergruppe, denn das Produkt $g_{a_1} \cdots g_{a_n}$ mit $g_{b_1} \cdots g_{b_m}$ besteht wieder nur aus endlich vielen Produkten und auch das Inverse $(g_{a_1} \cdots g_{a_n})^{-1} = g_{a_n}^{-1} \cdots g_{a_1}^{-1}$ ist wegen $U^{-1} = U$ ebenfalls wieder in G'. Außerdem ist G' offen, denn U ist offene Umgebung von e und damit $\phi(g, U) := \{\phi(g, h) : h \in U\}\, V \subset U$ offene Umgebung von $g \in G'$. Dabei haben wir benutzt, dass die Linksmultiplikation mit einem festen Element g eine offene Abbildung ist, also offene Mengen in offene Mengen abbildet. Das folgt aus der Tatsache dass sie stetig ist (per Definition der topologischen Gruppe) und ein stetiges Inverses hat, nämlich die Linksmultiplikation mit g^{-1}. Mit dem gleichen Argument folgt weiter, dass nicht nur G' sondern alle linken Nebenklassen $\phi(g, G')$ offen sind. Damit ist G' aber auch abgeschlossen, denn es ist das Komplement der zu G' disjunkten Nebenklassen. Als offene und zugleich abgeschlossene Untermenge in der zusammenhängenden Menge G muss G' aber identisch zu G sein, was den Beweis abschließt. □

Beweis von (43). Dieser folgt nun als Korollar aus Proposition 44 und der Bemerkung, dass das Bild der Exponentialabbildung eine offene Umgebung der Gruppenidentität $e \in G$ umfasst. □

Bemerkung 45. Der oben gegebene Beweis zeigt, dass jede offene Umgebung U der Gruppenidentität in einer zusammenhängenden topologischen Gruppe die Gruppe "‘erzeugt"’, in dem Sinne, dass jedes Gruppenelement als das Produkt endlich vieler Elemente aus U geschrieben werden kann. Da jede offene Untergruppe einer topologischen Gruppe auch abgeschlossen ist, wie ebenfalls das obige Argument zeigt, folgt daraus, dass eine zusammenhängende Gruppe keine echten offenen Untergruppen besitzen kann. Abgeschlossene Untegruppen existieren natürlich und sogar auch solche, die weder offen noch abgeschlossen sind. Ein Beipiel für letztere ist eine Kurve auf dem 2-Torus mit irrationaler Steigung. Sie definiert eine Untergruppe isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen innerhalb der kompakten Gruppe $U(1) \times U(1)$.