# Crash-Kurs: Lie Algebren und Lie Gruppen

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{F}$ den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (andere Körper sind für uns nicht interessant).

**Def.** Eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$ ist ein Vektorraum $V$ über $\mathbb{F}$ mit einer Abbildung $V \times V \to V$,

$$(X,Y) \mapsto [X,Y]$$

genannt „Lie-Produkt" oder „Lie-Klammer", so dass für alle $X,Y,Z \in V$ und alle $a \in \mathbb{F}$ gilt:

1.) $[X,Y] = -[Y,X]$ (Antisymmetrie)

2.) $[X, Y+aZ] = [X,Y] + a[X,Z]$ (Bilinearität)

3.) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Jacobi-Identität

Achtung: Es gilt keine Assoziativität, d.h.

$$[X,[Y,Z]] \neq [[X,Y],Z]$$

Stattdessen gilt eben die Jacobi-Identität

Beispiel 1: $V=\mathbb{R}^3$, $[\vec{x},\vec{y}] := \vec{x}\times\vec{y}$

1.) und 2.) sind trivial erfüllt, die Jacobi-Identität folgt so:

$$\underbrace{\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})}_{\vec{y}\cdot\cancel{(\vec{x}\cdot\vec{z})}^{1}-\vec{z}\cancel{(\vec{x}\cdot\vec{y})}^{2}} + \underbrace{\vec{y}\times(\vec{z}\times\vec{x})}_{\vec{z}\cancel{(\vec{x}\cdot\vec{y})}^{2}-\vec{x}\cancel{(\vec{y}\cdot\vec{z})}^{3}} + \underbrace{\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y})}_{\vec{x}\cancel{(\vec{y}\cdot\vec{z})}^{3}-\vec{y}\cancel{(\vec{x}\cdot\vec{z})}^{1}}$$

$$= 0$$

Beispiel 2: Jede assoziative Algebra, z.B. Algebra der $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{F}$. Man definiert dann $[\cdot,\cdot]$ als Kommutator,

$$[x,y] := x\cdot y - y\cdot x$$

Hier ist $\cdot : V\times V \to V$ die assoziative Multiplikation der Algebra. 1) und 2) gelten wieder trivial, 3) wegen der Assoziativität:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]$$

$$x(yz-zy)-(yz-zy)x$$

$$y(zx-xz)-(zx-xz)y$$

$$z(xy-yx)-(xy-yx)z$$

Allgemeiner: $\mathrm{End}(W)$, $W$ = Vektorraum, $\varphi,\varphi'\in\mathrm{End}(W)$, $[\varphi,\varphi'] := \varphi\circ\varphi' - \varphi'\circ\varphi$.

$$= \cancel{X(yZ)}^{1} - \cancel{X(Zy)}^{2} - \cancel{(yZ)X}^{3} + \cancel{(Zy)X}^{4}$$
$$+ y\cancel{(ZX)}^{3} - y\cancel{(XZ)}^{5} - \cancel{(ZX)y}^{6} + \cancel{(XZ)y}^{2}$$
$$+ Z\cancel{(Xy)}^{6} - Z\cancel{(yX)}^{4} - \cancel{(Xy)Z}^{1} + \cancel{(yX)Z}^{5} = 0.$$

Für $(V, [\cdot,\cdot])$ schreiben wir auch $L$ und meinen mit $X \in L$, daß $X \in V$.

Def. Sei $L$ Lie-Algebra. $L' \subset L$ heißt Lie-Unteralgebra falls $L'$ Untervektorraum und $[\cdot,\cdot]|_{L'}$ $L'$ zu einer Lie-Algebra macht, d.h. $[L', L'] \subseteq L'$. Eine Lie-Unteralgebra heißt Ideal, falls $[X, y] \in L'$ $\forall\, X \in L$ und $y \in L'$; man schreibt auch $[L, L'] \subseteq L'$. Lie-Ideale sind für Lie-Algebren das Analogon zu Normalteilern (invarianten Untergruppen) für Gruppen. Ist $L' \subset L$ Ideal, dann ist $L/L'$ eine Lie-Algebra wenn man definiert:

$$[[X],[y]] = [[X,y]]$$

Äquivalenklassenbildung.

Def. Seien $L = (V, [\cdot,\cdot])$ und $L' = (V', [\cdot,\cdot]')$ Lie-Algebren. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V'$ heißt Lie-Homomorphismus, falls

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]'$$

für alle $X, Y \in L$. Wie üblich def. wir:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) := \{X \in L \mid \varphi(X) = 0\}$$

Der Kern eines Lie-Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ ist ein Ideal in $L$. Der Beweis ist trivial.

Darst. →

Def. Eine Lie-Algebra $L$ heißt abelsch wenn $[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in L$.

$L$ heißt einfach wenn $\{0\}$ und $L$ die einzigen (immer vorhandenen) Ideale in $L$ sind; dh. $L$ keine nicht-trivialen Ideale besitzt. Oft fordert man zusätzlich $\dim(L) \geq 2$, denn sonst müsste man den trivialen Fall der (bis auf Isomorphie) eindeutigen eindimensionalen Lie-Algebra, die abelsch ist, mit in die Liste der einfachen Lie-Algebren aufnehmen.

Def. Eine Darstellung einer Lie-Algebra $L$ auf dem Vektorraum $W$ (beide über dem gleichen Körper $\mathbb{F}$) ist ein Lie-Homomorphismus

$$d : L \to \mathrm{End}(W)$$

wobei $\mathrm{End}(W)$ als Lie-Algebra mit Lie-Produkt = Kommutator aufgefasst wird.

L heißt halbeinfach, wenn $\dim(L) \geq 2$ und $\{0\}$ das einzige abelsche Ideal in L ist.

Sei $\dim(L) := \dim_{\mathbb{F}}(V) = n$ und $\{e_a \mid a = 1, \dots, n\}$ Basis von L (d.h. von V). Dann existieren $\frac{1}{2} n^2 (n-1)$ Koeffizienten $C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba} \in \mathbb{F}$ mit

$$[e_a, e_b] = C^c{}_{ab} \, e_c$$

Wegen $\sum\limits_{a,b,c}^{\text{zykl}} [e_a, [e_b, e_c]] = 0$ folgt

$$C^m{}_{an} C^n{}_{bc} + C^m{}_{bn} C^n{}_{ca} + C^m{}_{cn} C^n{}_{ab} = 0$$

Also genügen die Koeffizienten $C^c{}_{ab}$

1') $\quad C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba}$

3') $\quad C^m{}_{n[a} C^n{}_{bc]} = 0$

Umgekehrt definieren Koeffizienten $C^c{}_{ab}$, die 1') und 3') genügen eine Lie-Algebra. Unter Basiswechsel $e_a \mapsto e'_a := A^b{}_a e_b$ ist

$$C^c{}_{ab} \longmapsto C'^c{}_{ab} := (A^{-1})^c{}_\ell \, C^\ell{}_{mn} A^m{}_a A^n{}_b \quad (*)$$

$\{C^c{}_{ab}\}$ und $\{C'^c{}_{ab}\}$ def. gleiche Lie-Algebra

Def. Die direkte Summe zweier Lie-Algebren $L' = (V', [\cdot,\cdot]')$ und $L'' = (V'', [\cdot,\cdot]'')$ ist gegeben durch

$$L = L' \oplus L'' = (V, [\,,\,])$$

mit $\quad V = V' \oplus V''$

und $\quad [x' + y'', z' + w''] := ([x', z'], [y'', w'']'')$

$\forall\, x', z' \in L'$ und $y'', w'' \in L''$.

Def. Eine Derivation $\varphi \in \mathrm{Der}(L)$ der Lie-Algebra $L = (V, [\cdot,\cdot])$ ist ein $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]$$

$\forall\, x, y \in L$. $\mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{End}(V)$ ist Lie-Unteralgebra; denn $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Der}(L)$

$$\Rightarrow [\varphi, \varphi']([x,y]) :=$$

$$(\varphi \circ \varphi' - \varphi' \circ \varphi)([x,y])$$

$$= [\varphi \circ \varphi'(x), y] + \cancelto{1}{[\varphi'(x), \varphi(y)]}$$

$$+ \cancelto{2}{[\varphi(x), \varphi'(y)]} + [x, \varphi \circ \varphi'(y)]$$

$$- [\varphi' \circ \varphi(x), y] - \cancelto{2}{[\varphi(x), \varphi'(y)]}$$

$$- \cancelto{1}{[\varphi'(x), \varphi(y)]} - [x, \varphi' \circ \varphi(y)]$$

$$= [[\varphi, \varphi']x, y] + [x, [\varphi, \varphi']y].$$

Es existiert natürlicher Lie-Homomorphismus

$$\mathrm{ad} : L \to \mathrm{Der}(L)$$
$$x \mapsto \mathrm{ad}_x := [x, \cdot]$$

- $\mathrm{ad}_x : y \mapsto \mathrm{ad}_x(y) := [x,y]$ ist Derivation:

$$\mathrm{ad}\, x\,[y,z] = [x,[y,z]]$$
$$= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] \quad \text{(Jac. Id.)}$$
$$= [[x,y],z] + [y,[x,z]]$$
$$= [\mathrm{ad}\,x(y), z] + [y, \mathrm{ad}_x(z)]$$

- $\mathrm{ad}_{[x,y]} = \mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}\,x$

$$[[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y]$$
$$= [x,[y,z]] - [y,[x,z]]$$
$$= \mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}\,x\,(z).$$

Def. Man nennt den Lie-Homomorphismus $L \to \mathrm{End}(L)$, $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ auch die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra (auf sich selbst).

Def. Seien $L' = (V', [\cdot,\cdot]')$ und $L'' = (V'', [\cdot,\cdot]'')$ Lie-Algebren und

$$\sigma : L'' \to \mathrm{Der}(L'), \quad X'' \mapsto \sigma_{X''}$$

Lie-Homomorphismus. Dann ist

$$L = (V, [\cdot,\cdot]) = L' \times_\sigma L''$$

die semi-direkte Summe von $L'$ und $L''$ bezüglich $\sigma$ wenn $V = V' \oplus V''$ und für $x', y' \in L'$, $x'', y'' \in L''$

$$[x' \oplus x'', y' \oplus y''] = ( [x', y']' + \sigma_{x''}(y') - \sigma_{y''}(x') ) \oplus [x'', y'']'')$$

Antisymmetrie und Bilinearität sind offensichtlich. Die Gültigkeit der Jacobi-Identität muss man nachrechnen. (Übung)

Def. Die Killing-Form einer Lie-Algebra $L = (V, [\cdot,\cdot])$ ist eine symmetrische Bilinearform $K : V \times V \to \mathbb{F}$, def. durch

$$K(x,y) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y)$$

Bezüglich einer Basis $\{e_a \mid a = 1 \cdots n\}$ von $L$ ist $[e_a, e_b] = C^c_{ab} e_c$ und

$$(\mathrm{ad}\, e_a)^c{}_b = C^c_{ab}$$

also

$$K_{ab} = K(e_a, e_b) = \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}\, e_a \circ \mathrm{ad}\, e_b)$$
$$= C^n_{a\,m} C^m_{b\,n}$$

Proposition. Es gilt $\forall x, y, z \in L$

$$K([x,y], z) = K(x, [y,z])$$

$$\left[ \Leftrightarrow \quad K([y,x], z) + K(x, [y,z]) = 0 \right]$$

Beweis. Aus $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]$ folgt

$\mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_{[x,y]} \circ \mathrm{ad}_z) = \mathrm{Spur}([\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] \circ \mathrm{ad}_z)$

$= \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_z - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_z)$

$= \mathrm{Spur}(\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_{[y,z]})$ zykl. Eigensch. der Spur

Der Nullraum von $K$ ist definiert durch

$$N(L) := \{ X \in L \mid K(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in L \}$$

Ist $X \in N(L)$, dann folgt aus

$$K([X,Y],Z) = K(X,[Y,Z])$$

dann auch $[X,Y] \in N(L)$. $\forall Y$;

$\Rightarrow$ $N(L)$ ist Ideal.

Das kann verallgemeinert werden

Korollar. Sei $I \subset L$ Ideal und

$$I^\perp := \{ X \in L \mid K(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in I \}$$

dann ist auch $I^\perp$ Ideal

Beweis. Das folgt aus

$$K([I^\perp, L], I) = K(I^\perp, [L,I])$$
$$= K(I^\perp, I) = 0.$$

d.h. $[I^\perp, L] \subseteq I^\perp$ $\square$

Proposition: Ist $I \subset L$ Ideal, dann

$$K_I = K|_I$$

d.h. die Killing-Form von $I$ ist die Einschränkung der Killing-Form von $L$ auf $I$.

Beweis. Das folgt sofort aus:

Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W \subset V$, dann $\mathrm{Spur}(f) = \mathrm{Spur}(f|_W)$.

Angewandt auf $f = \mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y \in \mathrm{End}(L)$ mit $x, y \in I \Rightarrow \mathrm{Bild}(f) \subseteq I \subset L$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K(x,y) &= \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\,x \circ \mathrm{ad}\,y) \\ &= \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\,x|_I \circ \mathrm{ad}\,y|_I) \\ &= K_I(x,y). \qquad \square \end{aligned}$$

Satz (Cartan): $L$ ist halbeinfach

$\Leftrightarrow$ $K$ ist nicht ausgeartet, d.h. $N(L) = \{0\}$.

Beweis: Ist $I \subset L$ Abel'sches Ideal $\neq \{0\}$ und $0 \neq x \in I$, $y \in L$; dann

$$K(x,y) = \text{Spur}(\underbrace{ad\,x \circ ad\,y}_{\text{Bild} \subset I})$$

$$= \text{Spur}(ad\,x|_I \circ ad|_I)$$

$$= 0 \quad \text{da } ad\,x|_I \equiv 0 \text{ falls } I \text{ Abelsch}$$

Das zeigt: Ist $I \subset L$ Abel'sches Ideal

$\Rightarrow$ $I \subseteq N(L)$.

Soweit ist gezeigt: Ist $K$ nicht ausgeartet dann ist $L$ halbeinfach.

Es gibt auch die Umkehrung (Beweis über den Begriff der Auflösbarkeit).

Zerlegung halbeinfacher Lie-Algebren in einfache

Sei L Lie-Algebra und I Ideal. Wegen

$$K([I^\perp, I], L) = K(I^\perp, [I, L])$$

$$= K(I^\perp, I) = 0$$

ist $[I^\perp, I] \subset N(L) = \{0\}$

also $[I^\perp, I] = \{0\}$.

Es folgt dass $I^\perp \cap I$ Abel'sches Ideal ist, also $I^\perp \cap I = \{0\}$.

$$\Rightarrow \quad L = I \oplus I^\perp$$

$\uparrow$

K-orthogonale, direkte Summe.

Enthält I Ideal $I'$, dann schließt man analog $I = I' \oplus I'^\perp$, wo $I'$ und $I'^\perp$ Ideale von I sind. Da sie in I enthalten sind verschwinden ihre Lie-Klammern mit $I^\perp$. Also sind sie auch Ideale in L. In dieser Weise können wir fortfahren L als K-orthogonale direkte Summe von Idealen zu schreiben, bis die Summanden alle einfach sind.

Proposition.

Die K-orthogonale Zerlegung

$$L = \bigoplus_{i=1}^{N} I_i$$

einer halbeinfachen Lie-Algebra in einfache Lie-Algebren ist eindeutig.

Beweis: Übung

Proposition: Ist $L$ halbeinfach, dann gilt

$$[L, L] := \operatorname{Span}\{[X, Y] \mid X, Y \in L\}$$

$$= L.$$

Man sagt: $L$ ist perfekt.

Beweis Übung.

Def. Eine Lie-Algebra heißt <u>kompakt</u> falls $K$ negativ-definit ist.

Achtung: Das Wort „kompakt" heißt hier natürlich nicht, dass die Lie-Algebra im topologischen Sinn kompakt ist. Das ist sie als topologischer Vektorraum ja nie.

Beispiel: $L = (\mathbb{R}^3, \times)$

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = \vec{e}_a \times \vec{e}_b = \varepsilon_{ab}{}^c \, \vec{e}_c$$

$$\Rightarrow \quad K_{ab} = \varepsilon_{an}{}^m \, \varepsilon_{bm}{}^n$$

$$= -2\, \delta_{ab}.$$

# Matrix Lie-Gruppen

## Beispiele

$$GL(\mathbb{F}^n) := \{ X \in End(\mathbb{F}^n) \mid \det X \neq 0 \}$$

$$SL(\mathbb{F}^n) := \{ X \in GL(\mathbb{F}^n) \mid \det X = 1 \}$$

$$O(p,q) := \{ X \in GL(\mathbb{F}^n) \mid X E^{(p,q)} X^T = E^{(p,q)} \}$$

$$SO(p,q) := \{ X \in O(p,q) \mid \det X = 1 \}$$

$$U(p,q) := \{ X \in GL(\mathbb{C}^n) \mid X E^{(p,q)} X^+ = E^{(p,q)} \}$$

$$SU(p,q) := \{ X \in U(p,q) \mid \det X = 1 \}$$

$$E^{(p,q)} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_q \end{array}\right)}_{n = p+q} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}}\right\} n = p+q$$

Semi-direkte Produkte von diesen mit $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ sind selbst wieder Matrix-gruppen (vgl. Aufgaben, Blatt 1)

$$(a', A')(a, A) = (a' + A'a, A'A)$$

$$(a, A) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{F}^{n+1})$$

Sei $G \subset \mathrm{End}(V)$ $(V = \mathbb{F}^n)$
Gruppe und

$$A : \mathbb{R} \supset (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$$

differenzierbare Kurve durch die Gruppenidentität $e \in G$, d.h.

$$A(0) = e$$

Wir definieren

$$\dot{A} := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A(s)$$

Satz: Die Menge der Tangentialvektoren stetig differenzierbarer Kurven an der Gruppenidentität bildet eine reelle Lie-Algebra, $\mathrm{Lie}(G)$.

1.) Linearität. Ist $X = \dot{A}$ und $Y = \dot{B}$; definiere $C(s) = A(s) \cdot B(s)$
$\Rightarrow \dot{C} = \dot{A} \cdot e + e \cdot \dot{B} = X + Y$. Ist $X = \dot{A}$, definiere $B(s) := A(as)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.
$\Rightarrow \dot{B} = aX$

2) Abgeschlossenheit unter $[\cdot,\cdot]$ = Kommutator.

Sei $X = \dot{A}$ und $Y = \dot{B}$; wir müssen zeigen, dass eine Kurve $C(s)$ durch $e \in G$ existiert, mit $\dot{C} = [X, Y]$

Definiere

$$C(s) = \begin{cases} A(\tau(s)) \cdot B(\tau(s))\, A^{-1}(\tau(s)) \cdot B^{-1}(\tau(s)), & \text{für } s \geq 0 \\ B(\tau(s)) \cdot A(\tau(s)) \cdot B^{-1}(\tau(s)) \cdot A^{-1}(\tau(s)), & \text{für } s \leq 0 \end{cases}$$

wobei

$$\tau(s) := \operatorname{sign}(s) \sqrt{|s|}$$

mit Inverser

$$s = \operatorname{sign}(\tau)\, \tau^2$$

Obwohl keine der Kurven $s \mapsto A(\tau(s))$, $s \mapsto A^{-1}(\tau(s))$, $s \mapsto B(\tau(s))$, $s \mapsto B^{-1}(\tau(s))$ bei $s = 0$ differenzierbar ist (weil $\tau(s)$ nicht differenzierbar ist), ist dennoch die Kurve $s \mapsto C(s)$ bei $s = 0$ differenzierbar.

Für $s \searrow 0$ gilt (Rechtsableitung)

$$\dot{C}_R = \lim_{s \searrow 0} \left\{ \frac{C(s) - e}{s} \right\}$$

$$= \lim_{s \searrow 0} \left\{ \frac{[A(\tau(s)), B(\tau(s))]\, A^{-1}(\tau(s))\, B^{-1}(\tau(s))}{s} \right\}$$

$$= \lim_{\tau \searrow 0} \left\{ \left[ \frac{A(\tau) - e}{\tau}, \frac{B(\tau) - e}{\tau} \right] A^{-1}(\tau)\, B^{-1}(\tau) \right\}$$

$$= [X, y]$$

Für $s \nearrow 0$ gilt (Linksableitung)

$$\dot{C}_L = \lim_{s \nearrow 0} \left\{ \frac{C(s) - e}{s} \right\}$$

$$= \lim_{s \nearrow 0} \left\{ \frac{[B(\tau(s)), A(\tau(s))]\, B^{-1}(\tau(s))\, A^{-1}(\tau(s))}{s} \right\}$$

$$= \lim_{\tau \nearrow 0} \left\{ \operatorname{sign}(\tau) \left[ \frac{B(\tau) - e}{\tau}, \frac{A(\tau) - e}{\tau} \right] B^{-1}(\tau)\, A^{-1}(\tau) \right\}$$

$$= [X, y]$$

Also $\dot{C}_R = \dot{C}_L = \dot{C} = [X, y]$

Da die Lie-Struktur durch die von End(V) induziert wird, gilt die Jacobi-Identität automatisch.

Ist $D \in \mathrm{Hom}(G, GL(W))$ eine Darstellung der Gruppe $G$ auf dem Vektorraum $W$ (lineare Darstellung), dann induziert diese eine Darstellung $D_* \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(G), \mathrm{End}(W))$
Das sieht man so: Sei $A(s)$ eine Kurve in $G$ mit $A(0) = e$ und $\dot{A} = dA(s)/ds|_{s=0} = X$
Dann ist $A' := D \circ A$, $A'(s) := D(A(s))$, eine Kurve in $GL(W)$ mit $A'(0) = e$

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} A'(s) = D_*(X) = \dot{A}'$$

(Kettenregel)

Dabei ist $D_*$ das Differential der Abbildung $D: \mathrm{End}(V) \supset G \to GL(W) \subset \mathrm{End}(W)$ am Punkt $e \in G$. Klarerweise ist $D_*$ linear.
Wir müssen zeigen, dass

$$D_*(\underbrace{[X,Y]}_{\text{Kommutator in End(V)}}) = \underbrace{[D_*(X), D_*(Y)]}_{\text{Kommutator in End(W)}}$$

Wie zuvor betrachten wir Kurven $A(s)$ und $B(s)$ in $G$ mit $\dot{A} = X$ und $\dot{B} = Y$, und die zugehörige Kurve $C(s)$ definiert wie oben (S. 2.18).

Für $s \geq 0$ ist also

$$C'(s) := D(C(s))$$
$$= D\left( A(\tau(s))\, B(\tau(s))\, A^{-1}(\tau(s))\, B^{-1}(\tau(s))\right)$$

Abgeleitet ergibt sich einerseits

$$\dot{C}' = D_*(\dot{C}) = D_*([X,Y]).$$

Andererseits, weil $D$ Homomorphismus ist,

$$C'(s) = D(A(\tau)) \cdot D(B(\tau)) [D(A(\tau))]^{-1} [D(B(\tau))]^{-1}$$
$$= A'(\tau) \cdot B'(\tau)\, A'^{-1}(\tau)\, B'^{-1}(\tau),$$

die Ableitung

$$\dot{C}' = [\dot{A}', \dot{B}'] = [D_*(X), D_*(Y)]$$

Also $D_*([X,Y]) = [D_*(X), D_*(Y)]$

wzbw.

# Adjungierte Darstellung

$$\mathrm{Ad} \in \mathrm{Hom}(G, GL(\mathrm{Lie}(G)))$$

$$G \ni A \mapsto \mathrm{Ad}_A : X \mapsto \mathrm{Ad}_A(X)$$

Sei $B(s)$ Kurve in $G$ mit $B(0) = e$ und $\dot{B} := dB(s)/ds|_{s=0} = y$. Dann

$$\mathrm{Ad}_A(y) := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} A \cdot B(s) \cdot A^{-1}$$

$$= A \cdot y \cdot A^{-1}$$

Achtung: Da $X \in \mathrm{End}(V)$ i. A. nicht in $GL(V)$ liegt ist hier mit „$\cdot$" das Produkt in der assoz. Algebra $\mathrm{End}(V)$ gemeint.

Ist nun $A = A(t)$ selbst eine Kurve mit $A(0) = e$, $\dot{A} = X$, dann folgt mit

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A^{-1}(t) = -X$$

(differenziere $A(t)\, A^{-1}(t) = e$ bei $t = 0$),

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{A(t)}(y) = \mathrm{Ad}_*(X)(y) = [X, y]$$

$$= \mathrm{ad}_X(y)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ad}_* = \mathrm{ad}.$$

# Die Exponentialabbildung

Sei $\exp : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ def. durch

$$\exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

mit $X^n := \underbrace{X \circ X \circ \cdots X}_{n \text{ Stück}}$

Ist $X \in \mathrm{End}(V)$ und $A \in GL(V)$, und sei $\mathrm{Ad}_A : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ die Abb.

$$\mathrm{Ad}_A(X) = A \circ X \circ A^{-1}$$

Trivialerweise gilt

$$\mathrm{Ad}_A(X^n) = (\mathrm{Ad}_A(X))^n$$

und deshalb auch

$$\mathrm{Ad}_A \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_A \qquad \forall A \in GL(V).$$

Proposition:

$$\det \circ \exp = \exp \circ \operatorname{spur}$$

Beweis: Sei $X \in \mathrm{End}(V)$; Ist $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, so betrachtet man $\mathbb{C} \otimes V$ und macht dies zu einem komplexen Vektorraum $V^{\mathbb{C}}$. Über $\mathbb{C}$ ist $X$ triangularisierbar (d.h.

$\exists$ Basis $\{e_a \mid a = 1, \ldots, n\}$ von Eigenvektoren von $X \in \mathrm{End}(V^{\mathbb{C}})$.

Die Matrixdarstellung von $X$ bezgl. dieser Basis ist in Dreiecksform

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen. Dann ist

$$\exp(X) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\det(\exp(X)) = \exp\left(\sum_{a=1}^{n} \lambda_a\right)$$

$$= \exp(\mathrm{Spur}(X)). \quad \square$$

Korollar:

$$\exp(\mathrm{End}(V)) \subseteq GL^+(V)$$

$$= \{A \in GL(V) \mid \det A > 0\}.$$

Das folgt sofort aus

$$\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{Spur}(X)) > 0.$$

Ist $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{End}(V)$ mit $X(0) = 0$,

$$\dot{X} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} X(s)$$

dann $A(s) := \exp(X(s))$ Kurve in $GL(V)$ mit $A(0) = e$.

$$\dot{A} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(X(s))$$

$$= \exp_*|_e(\dot{X}) = \dot{X}$$

Also ist das Differential der Abbildung

$$\exp : \mathrm{End}(V) \to GL(V)$$

an der Stelle $0 \in \mathrm{End}(V)$

$$\exp_*|_e : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$$

$$= id|_{\mathrm{End}(V)}.$$

Nach dem Satz über Umkehrfunktionen bildet exp eine offene Umgebung $U$ von $0 \in \mathrm{End}(V)$ diffeomorph in eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von $e \in GL(V)$ ab. Man sagt: exp ist <u>lokal</u> eine Bijektion (injektiv und surjektiv). Global kann aber beides falsch sein.

Beispiel

Dass exp i. A. nicht injektiv ist, ist klar; z.B. $G = U(1) = \{ e^{i\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$
Kurven in $G$ sind $A(s) = e^{i\lambda(s)}$ mit $\lambda(0) = 0$
$\dot{A}(0) = i\dot{\lambda} \in i\mathbb{R}$. $\Rightarrow \mathrm{Lie}(U(1)) = i\mathbb{R}$.
Aber $\exp(i\lambda) = \exp(i\lambda') \Leftrightarrow \lambda' - \lambda = n2\pi$
$n \in \mathbb{N}$. In diesem Beispiel gilt aber die Surjektivität, genauso wie für

$$G = SO(3) = \{ A \in GL(\mathbb{R}^3) \mid A^T = A^{-1} \}$$

$$\mathrm{Lie}\, G = \{ X \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid X^T = -X \}$$

Es gilt: Für jedes $A \in SO(3)$ gibt es ein $X \in \mathrm{Lie}(SO(3))$ so dass $\exp(X) = A$.

In der Tat; wegen $\mathrm{Lie}(SO(3)) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$, mit $X = \theta\vec{n}\times \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $\vec{x} \to X(\vec{x}) = \theta\vec{n}\times\vec{x}$, ist

$$\exp(\theta\vec{n}\times\cdot) = \mathbb{P}_{\parallel} + (\cos\theta + \sin\theta\,\vec{n}\times)\mathbb{P}_{\perp}$$

$=$ Drehung um $\vec{n}$ - Achse mit Winkel $\theta$.

<u>Jede</u> Drehung $\in SO(3)$ ist von dieser Form, $\Rightarrow$ exp ist surjektiv.

Das sind aber Spezialfälle, in der Regel ist exp nicht surjektiv auf die Komp. der Einheit.

Beispiel: $SL(2,\mathbb{R})$

$$= \{ A \in End(\mathbb{R}^2) \mid \det A = 1 \}.$$

Behauptung: Kein Element der Form

$$D_n := \begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

ist im Bild der Exponentialabbildung

Beweis: Clevere Beobachtung: Ist ein Element $A \in G \in$ Bild(exp), dann $\exists\, H \in G$ mit $A = H^2$. Das ist klar, denn $A = \exp(X) \Rightarrow$ $H := \exp(X/2)$ erfüllt diese Bed. Wir müssen also zeigen, dass $D_n$ keine „Wurzel" hat, d.h. $D_n \neq H^2$. Sei

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc, & b(a+d) \\ c(a+d), & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$H^2 = D_n \iff \begin{array}{l} b(a+d) = c(a+d) = 0 \\ a^2 + bc = -n, \; d^2 + bc = -\frac{1}{n} \end{array}$$

1. Fall $(a+d) \neq 0 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow a^2 = -n < 0$
$d^2 = -\frac{1}{n} < 0 \quad ↯$

2. Fall $a+d = 0 \Rightarrow a^2 + bc = d^2 + bc \Rightarrow n^2 = 1.$

Beachte, dass der Pfad $A : [0,1] \to SL(2,\mathbb{R})$,

$$A(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(2\pi s), & \sin(2\pi s) \\ -\sin(2\pi s), & \cos(2\pi s) \end{pmatrix} & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \begin{pmatrix} f(s) & 0 \\ 0 & 1/f(s) \end{pmatrix}, & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

mit $f(s) = 2(1-n)s + (n-2)$

so dass $f(\frac{1}{2}) = -1$, $f(1) = -n$,

die Identität stetig mit $D_n$ verbindet

Obwohl also $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ nicht ganz $G$ im Bild hat wird doch $G$ von $\mathrm{Lie}(G)$ im folgenden Sinn „erzeugt":

Proposition: Ist $G$ zusammenhängende Lie Gruppe und $A \in G$. Dann existieren $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathrm{Lie}(G)$ mit

$$A = \exp(X_1) \cdots \exp(X_n).$$

Im Allgemeinen sind die $X_a$ nicht eindeutig. Diese Proposition ist ein Korollar des folgenden

Lemma. Sei $G$ zusammenhängende topologische Gruppe und $V \subset G$ offene Umgebung der Identität $e \in G$. Sei $g \in G$, dann existieren endlich viele $g_1, \ldots, g_n \in V$ so dass

$$g = g_1 \cdots g_n.$$

Beweis

Wir betrachten die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus $V$, also

$$G' = \{ g \in G \mid \exists\, g_1, \ldots, g_n \in V, n < \infty, \\ g = g_1 \cdots g_n \}.$$

$G'$ ist Untergruppe. Das ist trivial
$G'$ ist offen. Denn trivialerweise ist $V \subset G'$. Ist also $g \in G'$ dann ist $g \cdot V = \{ g \cdot g' \mid g' \in G' \}$ offene Umgebung von $g$, denn die Linkstranslationen $L_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$ haben stetiges Inverses $L_{g^{-1}}$ und sind somit offene Abbildung.
In einer zusammenhängenden top. Gruppe ist aber jede offene Untergruppe $G'$ auch abgeschlossen, da sie das Komplement der Vereinigung aller von $G'$ verschiedenen Nebenklassen $g \cdot G'$ ist, die sämtlich offen sind. $G' \subset G$ offen und abgeschlossen

Sowie $G$ zusammenhängend impliziert aber $G' = G$. $\square$

Satz: Jedes Element in der Komponente der Einheit einer Lie Gruppe ist darstellbar als endliches Produkt von Bildern der Exponential funktion.

Sei $G$ Lie-Gruppe und $X \in Lie(G)$. Wir betrachten die Kurve

$$A(s) := \exp(sX)$$

Dann existiert $A(t)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ und

$$A(s_1 + s_2) = A(s_1) \cdot A(s_1)$$

D.h. $A : \mathbb{R} \to G$ ist Homomorphismus der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ nach $G$.

Proposition: Jeder differenzierbare Homomorphismus $A : (\mathbb{R}, +) \to G$ ist von der Form $A(s) = \exp(sX)$ für ein geeignetes $X \in Lie(G)$.

Beweis: Sei $A$ diffbarer Homomorph. mit $\dot{A} = d/ds|_{s=0} A(s) = X$.

Aus

$$A(s+s') = A(s) \cdot A(s')$$

folgt durch $\frac{d}{ds'}\Big|_{s'=0}$

$$\dot{A}(s) = A(s) \cdot X$$

Betrachte die Kurve

$$C(s) = A(s) \exp(-sX)$$

$$\Rightarrow \dot{C}(s) = A(s) \cdot X \exp(-sX)$$

$$- A(s) \cdot X \exp(-sX) = 0$$

Also $C(s) =$ konst.; da $C(s=0) = e$ ist
$C(s) = e \quad \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow A(s) = \exp(sX)$
$\forall s \in \mathbb{R}$. $\square$

Seien $G$ und $G'$ Lie-Gruppen und

$$\phi : G \to G'$$

ein differenzierbarer Homomorphismus
Dann ist

$$A(s) = \phi(\exp(sX))$$

ein differenzierbarer Homomorphismus
von $(\mathbb{R}, +)$ nach $G'$ mit $\dot{A} = \phi_*|_e X$.

Also folgt mit obiger Proposition

$$\phi(\exp(sX)) = \exp(s\,\dot{\phi}(X)) \quad \forall X$$

mit $\dot{\phi} := \phi_*|_e$

Korollar: Sei $\phi: G \to G'$ differenzierbarer Homomorphismus; dann gilt

$$\phi \circ \exp = \exp \circ \dot{\phi}$$

Beachte

$$\phi: G \to G' \quad \text{Gruppenhomomorph.}$$

$$\dot{\phi}: \mathrm{Lie}\,G \to \mathrm{Lie}\,G' \quad \text{Lie-Algebren Homom.}$$

Letzteres folgt wie bereits am Beispiel von Darstellungen gezeigt: Sind $A(s)$ und $B(s)$ Kurven in $G$ mit $\dot{A} = X$ und $\dot{B} = Y$, sowie $C(s)$ mit $\dot{C} = [X, Y]$, dann sind $A'(s) = \phi(A(s))$, $B'(s) = \phi(B(s))$ und $C'(s) = \phi(C(s))$ Kurven in $G'$ mit $\dot{A}' = \dot{\phi}(X)$, $\dot{B}' = \dot{\phi}(Y)$ und $\dot{C}' = \dot{\phi}([X, Y])$. Aus der Homomorphie von $\phi$ und der Form von $C$ folgt aber auch $\dot{C}' = [\dot{\phi}(X), \dot{\phi}(Y)]$. Also, da $X, Y$ bel. waren, $\dot{\phi}([X, Y]) = [\dot{\phi}(X), \dot{\phi}(Y)]$.

Die Frage ist nun, inwieweit die Umkehrung gilt, also inwieweit ein Lie-Algebren Homomorphismus einen Homomorphismus der zugehörigen Gruppen induziert.

Also seien Lie(G) und Lie(G') die Lie-Algebren der Lie-Gruppen G und G'. Sei $f$ : Lie(G) → Lie(G') ein Lie-Algebren Homomorphismus. Wir fragen: $\exists\ \phi : G \to G'$ Homomorphismus mit $\dot\phi = f$ ? Wenn ja, ist $\phi$ eindeutig?

Eindeutigkeit: Seien $\phi_1, \phi_2$ zwei Homomorphismen $G \to G'$ mit $\dot\phi_1 = \dot\phi_2 = f$. Dann stimmen wegen

$$\phi_{1,2} \exp(X) = \exp(fX)$$

$\phi_1$ und $\phi_2$ auf allen Elementen der Form $\exp(X_1) \cdots \exp(X_n)$ überein, d.h. auf der Komp. der Einheit $G_0$ von $G$.

⇒ Ist $G$ zusammenhängend, dann ist $\phi$ mit $\dot\phi = f$ eindeutig – sofern existent. Beachte, dass das Bild von $\phi$ in $G'$ ganz in $G'_0$ (Zushgs-Komp) enthalten ist (als stetiges Bild einer zshgd. Menge), so dass es keine Rolle spielt ob $G'$ auch zshgd. ist.

Ist hingegen $G$ nicht zusammenhängend dann kann es mehrere Homomorphismen $\phi : G \to G'$ mit $\dot{\phi} = f$ geben. Ein Beispiel ist $G = G' = O(3)$. $O(3)$ hat zwei Zusammenhangskomponenten

$$O(3) = SO(3) \cup P\,SO(3)$$

$$O(3) = \{ A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid AA^T = \mathrm{id}|_{\mathbb{R}^3} \}$$

$$SO(3) = \{ A \in O(3) \mid \det(A) = 1 \}$$

$$PSO(3) = \{ A \in O(3) \mid \det(A) = -1 \}$$

Ist $f : \mathrm{Lie}(SO(3)) \to \mathrm{Lie}(SO(3))$ und $\phi : O(3) \to O(3)$ mit $\dot{\phi} = f$, dann ist

$$\phi' := \det \cdot \phi \quad , \text{ d.h. } \phi'(A) = \det(A)\,\phi(A)$$

ein anderer Homomorphismus, mit

$$\phi'\big|_{SO(3)} = \phi\big|_{SO(3)} \quad \text{und} \quad \dot{\phi}' = f.$$

Proposition: Seien $G$ und $G'$ Lie-Gruppen wobei $G$ zusammenhängend ist. Sei $f : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$ Lie-Homomorphismus. Dann gibt es höchstens einen differenzierbaren Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to G'$ mit $\dot{\phi} = f$. Ein solches $\phi$ existiert falls $G$ einfach zusammenhängend ist, d.h. $\pi_1(G) = \{1\}$.

Satz: Zu jeder zusammenhängenden Lie Gruppe $G$ existiert eine eindeutige zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\bar{G}$ mit

$$\mathrm{Lie}(\bar{G}) = \mathrm{Lie}(G)$$

Es gibt einen natürlichen Projektionshomomorphismus (surjektiv aber nicht injektiv)

$$p : \bar{G} \to G$$

mit $\quad \mathrm{Kern}(p) \cong \underbrace{\pi_1(G)}_{\text{Fundamentalgruppe von } G \text{ (diskrete) gru.}}$

Man nennt $\bar{G}$ die universelle Überlagerungsgruppe von $G$. Topologisch ist $\bar{G}$ der universelle Überlagerungsraum von $G$. Dieser hat soviel „Blätter" wie $\pi_1(G)$ Elemente. Homomorphismen $\phi: G \to G'$ von $G$ können auf $\bar{\phi}: \bar{G} \to G'$ fortgesetzt werden durch $\bar{\phi} := \phi \circ p$. Bei Homomorphismen nach $G$ muss das nicht so sein, dh ist $\phi: G' \to G$ Homom. dann muss kein Homom. $\bar{\phi}: G' \to \bar{G}$ mit $p \circ \bar{\phi} = \phi$ existieren.

$$
\begin{tikzcd}
\bar{G} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\bar{\phi} = \phi \circ \pi"] & \\
G \arrow[r, "\phi"'] & G'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \bar{G} \arrow[d, "p"] \\
G' \arrow[ur, dashed, "\bar{\phi}"] \arrow[r, "\phi"'] & G
\end{tikzcd}
$$

hier $\bar{\phi}$ existiert nicht immer

Korollar: Sei $f$: Lie$(G) \to$ Lie$(G')$

Lie Homomorphismus (z.B. Darstellung der Lie-Algebra Lie$(G)$), mit $G$ zusammenhängend. Dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\phi : \bar{G} \to G'$$

mit

$$\dot{\phi} : \mathrm{Lie}(\bar{G}) = \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$$
$$= f$$

Beispiel: Zu jeder Darstellung der Lie-Algebra einer zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden Lie Gruppe $G$ gehört genau eine Darstellung der Gruppe selbst.

SO(3) ist zusammenhängend aber nicht einfach zusammenhängend:

$$\pi_1(SO(3)) = \pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2$$

Die $\#(\mathbb{Z}_2) = 2$ - blättrige Überlagerung von $SO(3)$ ist zugleich die universelle Überlagerung. Diese ist isomorph zur Gruppe $SU(2)$, die wie folgt definiert ist:

$$SU(2) = \{ A \in GL(\mathbb{C}^2) \mid A^+ A = id|_{\mathbb{C}^2},\ \det(A) = 1 \}.$$

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc = 1$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ A^+ &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} d &= \bar{a} \\ c &= -\bar{b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Es besteht also eine Bijektion zwischen allen Paaren $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ und Punkten der $SU(2)$. Schreibt man $a = x + iy$, $b = z + iw$, mit $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, dann ist die Menge $|a|^2 + |b|^2 = 1$ gerade $\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \} \cong S^3$. Also

$$SU(2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{top.}}}{\cong} S^3.$$

Den 2-1 Homomorphismus

$$p : SU(2) \to SO(3)$$

kann man explizit konstruieren. Dazu schauen wir uns die Adjungierte Darstellung von SU(2) an.

Es ist

$$\mathrm{Lie}(SU(2)) = \{ X \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \mid X^+ = -X, \; \mathrm{Spur}(X) = 0 \}$$

= Spurlose Anti-Hermit'sche Abbildungen des $\mathbb{C}^2$ auf sich.

Lie(SU(2)) ist ein 3-dimensionaler reeller Vektorraum. Eine Basis $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ ist durch die Pauli-Matrizen $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ wie folgt gegeben:

$$\tau_1 = -\frac{i}{2}\sigma_1 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_3 = -\frac{i}{2}\sigma_3 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{1}_2 + i\, \varepsilon_{ab}{}^{c} \sigma_c$$

Also $\qquad$ Mult in End$(\mathbb{C}^2)$

$$\tilde{\tau}_a \cdot \tilde{\tau}_b = -\frac{1}{4}\,\delta_{ab}\,\mathbb{1}_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ab}{}^{c}\,\tilde{\tau}_c \,,$$

insbesondere

$$[\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_b] = \tilde{\tau}_a \cdot \tilde{\tau}_b - \tilde{\tau}_b \cdot \tilde{\tau}_a$$
$$= \varepsilon_{ab}{}^{c}\,\tilde{\tau}_c \,.$$

und

$$\mathrm{Spur}\,(\tilde{\tau}_a \cdot \tilde{\tau}_b) = -\frac{1}{2}\,\delta_{ab} \,.$$

Die Adjungierte Darstellung

$$\mathrm{Ad}: SU(2) \to GL(\underbrace{\mathrm{Lie}(SU(2))}_{\substack{\text{3-dim reeller VR} \\ \cong \mathbb{R}^3}})$$

ist gegeben durch

$$\mathrm{Ad}_A(X) := A \circ X \circ A^{-1}$$
$$= A \circ X \circ A^{-1}$$

wobei $A$ und $X$ als Elemente in End$(\mathbb{C}^2)$ (2x2 Matrizen) aufgefasst sind. Wir identifizieren Lie$(SU(2))$ mit $\mathbb{R}^3$ durch die Basis $\{\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3\}$

$$\mathbb{R}^3 \ni \vec{X} \longmapsto X := X^a\,\tilde{\tau}_a \in \mathrm{Lie}(SU(2))$$

mit Umkehrung

$$\mathrm{Lie}(SU(2)) \ni X = X^a \tau_a \to \vec{X} \in \mathbb{R}^3$$

mit $X^a = -2\,\mathrm{Spur}(\tau_a X)$

Beachte $g : \mathrm{Lie}(SU(2)) \times \mathrm{Lie}(SU(2)) \to \mathbb{R}$

$$g(X,Y) := -2\,\mathrm{Spur}(X \cdot Y) \qquad (*)$$

definiert ein positiv definites Skalar-produkt auf $\mathrm{Lie}(SU(2))$ bezüglich dem $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ Orthonormalbasis ist. Wegen

$[\tau_a, \tau_b] = C^c{}_{ab}\,\tau_c$, mit

$C^c{}_{ab} = \varepsilon_{ab}{}^c$ und Killing-Metrik

$K_{ab} = C_a{}^m{}_n\, C_b{}^n{}_m = -2\,\delta_{ab}$ ist

$g_{ab} = -\frac{1}{2} K_{ab}$, d.h. unser $g$ aus $(*)$

minus $\frac{1}{2} \times$ Killing Metrik.

Die Adjungierte Darstellung lässt nun die Metrik $g$ (und damit auch die Killing Metrik $K$) invariant, denn

$$g(\mathrm{Ad}_A(X), \mathrm{Ad}_A(Y)) = -2\,\mathrm{Spur}(AXA^{+}AYA^{+})$$
$$= -2\,\mathrm{Spur}(AXYA^{+}) = -2\,\mathrm{Spur}(X \cdot Y)$$

Also wird die Orthonormalbasis $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ unter $Ad_A$ in eine Orthonormalbasis abgebildet. Das heißt, für jedes $A \in SU(2)$ existiert ein $R = p(A) \in SO(3)$, so dass

$$A \tau_b A^+ = R^a{}_b \tau_a \qquad (*)$$

Die Zuordnung

$$p: SU(2) \longrightarrow O(3)$$
$$A \longmapsto p(A) = R$$

ist der gesuchte Projektionshomomorphismus. Aus $(*)$ folgt

$$R^a{}_b = -2\, \mathrm{Spur}(\tau_a A \tau_b A^+)$$

Dieser ist ein Polynom in $A$ und $A^+$ und damit sicher $C^\infty$, insbesondere also stetig. Da $SU(2)$ zusammenhängend, ist $\mathrm{Bild}(p)$ zusammenhängend in $O(3)$ und enthält die Identität, also $\mathrm{Bild}(p) \subseteq SO(3)$. Tatsächlich ist $p$ auch surjektiv, wie aus Aufgabe 1 von Blatt 2 der Übungen folgt.

Ist $p(A) = R$ dann $p^{-1}(R) = \pm A$.
Denn ist $p(A) = p(A')$ so folgt aus $(*)$:

$$A \tau_b A^+ = A' \tau_b A'^+ \quad \Leftrightarrow$$

$$(A'^{-1} A)\, \tau_b = \tau_b\, A'^{-1} A \qquad (\text{da } A^+ = A^{-1})$$

also vertauscht $A'^{-1} A$ mit allen $\tau_b$ und natürlich auch mit $\mathbb{1}_2$. Da $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathbb{1}_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\} = \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ und $\mathrm{Zentrum}(\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})) = \{\lambda \mathbb{1}_2,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ muss also $A'^{-1} A = \lambda \mathbb{1}_2$ bzw $A = \lambda A'$.
Da $\det(A) = \det(A') = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Proposition

$$p : SU(2) \to SO(3)$$
$$A \mapsto R$$

$$R^a{}_b = -2\, \mathrm{Spur}(\tau_a A \tau_b A^+)$$

ist ein 2-1 Gruppenhomomorphismus.

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$,

dann $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$

Auf $S^3 \underset{\text{top}}{\cong} SU(2)$ entspricht $\{A, -A\}$

gerade einem Paar von Antipoden.
$p : SU(2) \to SO(3)$ bildet also jeweils

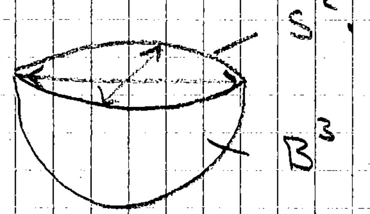
Paare von Antipodenpunkte auf einen Punkt ab. Also

$$SO(3) = SU(2) \,/\, \text{Antipoden-Identifikation}$$

$$= SU(2)/\mathbb{Z}_2$$

Zentrum von $SU(2)$

$$\underset{\text{top}}{\cong} \quad \mathbb{RP}^3$$




Die Projektion $p : SU(2) \to SO(3)$ ist lokal invertierbar (→ Übung)

Lemma. Sei $M \in Mat(2, \mathbb{C})$, dann

$$\left(\sum_a\right) \sigma^a M \sigma_a = 2\,\mathrm{Spur}(M) - M$$

Beweis. $Mat(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Span}\{\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$$\Rightarrow M = \alpha\,\mathbb{1} + M^b \sigma_b \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(M)$$

$$\Rightarrow M = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(M)\,\mathbb{1} + M^b \sigma_b$$

Mit $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ab}{}^c \sigma_c$

$\Rightarrow$ $\sigma_a^2 = \mathbb{1}$ und

$a \neq b \Rightarrow [\sigma_a, \sigma_b]_+ = 0$

$$\Rightarrow \left(\sum_a\right) \sigma^a \sigma_b \sigma_a = - \sigma_b$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^a M \sigma_a = \frac{3}{2} \operatorname{Spur}(M) \mathbb{1} - M^b \sigma_b$$

$$= 2 \operatorname{Spur}(M) \cdot \mathbb{1} - \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{Spur}(M) \mathbb{1} + M^b \sigma_b\right)$$

$$= 2 \operatorname{Spur}(M) \mathbb{1} - M \qquad \square.$$

Nun ist

$$A \tau_b A^+ = R^a{}_b \tau_a$$

$$\Leftrightarrow \quad A \sigma_b A^+ = R^a{}_b \sigma_a \qquad | \cdot \sigma^b$$

$$A \underbrace{\sigma_b A^+ \sigma^b}_{2 \operatorname{Spur}(A^+) \mathbb{1} - A^+ \text{ (nach Lemma)}} = \sigma_a R^a{}_b \sigma^b$$

$$\Rightarrow \quad 2 \underbrace{\operatorname{Spur}(A^+)}_{\operatorname{Spur}(A)\text{, denn}} A - \mathbb{1} = \sigma_a R^a{}_b \sigma^b$$

$$SU(2) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}}_{A} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}(A) = a + \bar{a} = 2\,\mathrm{Re}(a) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(A^+)$$

Also

$$2\,\mathrm{Spur}(A)\,A - \mathbb{1} = \sigma_a R^a{}_b \sigma^b \qquad (*)$$

Bildet man die Spur davon so gilt wegen

$$\mathrm{Spur}(\sigma_a R^a{}_b \sigma^b) = R^a{}_b \underbrace{\mathrm{Spur}(\sigma_a \sigma^b)}_{2\,\delta^b_a}$$

$$= 2\,\mathrm{Spur}(R)$$

$$\Rightarrow [\mathrm{Spur}(A)]^2 - 1 = \mathrm{Spur}(R)$$

$$\mathrm{Spur}(A) = \pm \left[1 + \mathrm{Spur}(R)\right]^{1/2}$$

Zurück eingesetzt in $(*)$ folgt

$$A = \pm \frac{\mathbb{1} + \sigma_a R^a{}_b \sigma^b}{\left[1 + \mathrm{Spur}(R)\right]^{1/2}}$$

$$= i_\pm(R)$$

Ist $R$ eine Drehung um Winkel $\Theta$, so ist

$$\mathrm{Spur}(R) = 1 + 2\cos\Theta$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \mathrm{Spur}(R) = 2(1 + \cos\Theta)$$

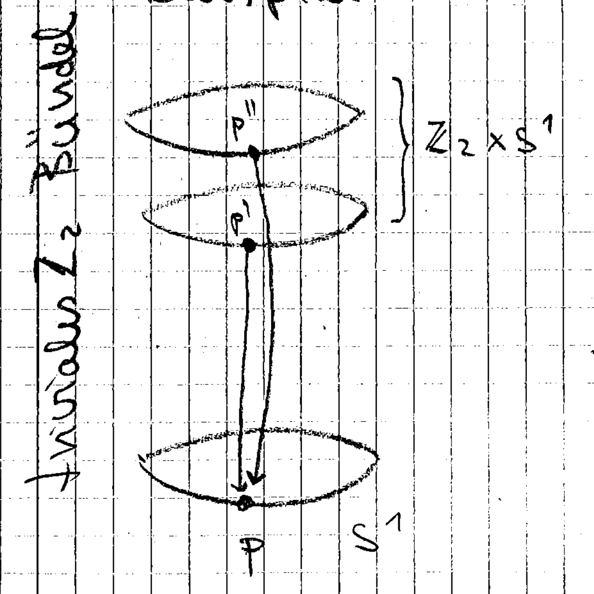
$$= 0 \quad \text{für } \Theta = 180^\circ$$

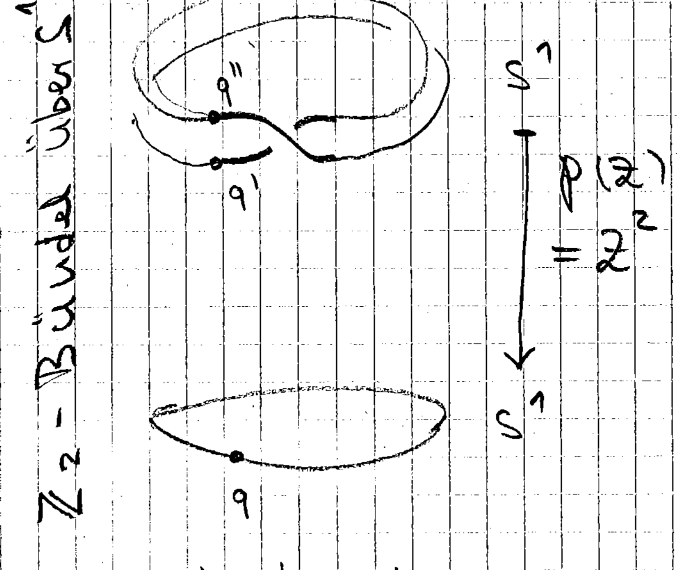
Die Abbildungen $i_\pm : SO(3) \supset D \to SU(2)$ existieren also auf der offenen und dichten Teilmenge $D \subset SO(3)$ aller Drehungen mit Winkel $\neq 180^\circ$. Für sie gilt

$$p \circ i_\pm = id|_{D \subset SO(3)}$$

Da $SU(2)$ zusammenhängend und doppelte Überlagerung, ist die Überlagerung nicht trivial, d.h. $SU(2) \not\cong \mathbb{Z}_2 \times SO(3)$.

Beispiel




$|z| = 1$.

Überlagert man $S^1$ doppelt durch $S^1$, und parametrisiert den Überlagerungskreis durch $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und den Basiskreis durch $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$, dann ist die Projektionsabbildung $w = p(z)$ gegeben durch $w = z^2$. Diese wickelt den Überlagerungskreis zweimal auf den Basiskreis auf. Die lokalen Umkehrungen sind $z = \pm\sqrt{w}$.