# 3. Vorlesung:

## Die Lorentz-Gruppe und ihre Lie-Algebra.

Sei $V$ 4-dim. reeller Vektorraum und $\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ nicht ausgeartete reelle Bilinearform der Signatur $(+,-,-,-)$.

Def.

$$\mathrm{Lor} := O(V,\eta)$$
$$= \{ L \in GL(V) \mid \eta(Lv, Lw) = \eta(v,w) \ \forall v,w \in V \}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) := \{ X \in \mathrm{End}(X) \mid \eta(Xv,w) + \eta(v,Xw) = 0 \quad \forall v,w \in V \}$$

Definiert man das bezüglich $\eta$ Adjungierte $\# : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ durch

$$\eta(v, Xw) = \eta(X^{\#}v, w) \qquad \forall v,w \in V$$

dann

$$\mathrm{Lor} = \{ L \in GL(V) \mid L^{\#} \circ L = \mathrm{id}|_V \}$$

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) = \{ X \in \mathrm{End}(V) \mid L^{\#} + L = 0 \}$$

Die Bilinearform $\eta$ definiert Isomorphismen

$$\eta\!\downarrow \, : V \to V^*$$
$$v \longmapsto \eta(v,\cdot)$$

$$\eta\!\uparrow \, := (\eta\!\downarrow)^{-1} : V^* \to V$$

und damit auch Bilinearform auf $V^*$

$$\eta^{-1} : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$$

$$\eta^{-1}(\alpha,\beta) := \eta(\eta^{\uparrow}(\alpha), \eta^{\uparrow}(\beta))$$

$$= \eta\!\downarrow(\eta^{\uparrow}(\alpha))(\eta^{\uparrow}(\beta))$$

$$= \alpha(\underbrace{\eta^{\uparrow}(\beta)}_{\in V}) \overset{(*)}{=} \underbrace{\eta^{\uparrow}(\beta)}_{\in V^{**}}(\alpha)$$

Also $\eta^{\uparrow}(\beta) = \eta^{-1}(\cdot,\beta)$.

Wenn man $V^{**}$ mit $V$ kanonisch identifiziert in $(*)$.

**Def.** Transponierte Abbildung

Seien $V$ und $W$ Vektorräume und

$$f : V \to W \text{ linear.}$$

Dann ist die transponierte Abbildung

$$f^T : W^* \to V^*$$

definiert durch

$$f^T(\beta) = \beta \circ f$$

also $\quad f^T(\beta)[v] = \beta(f(v)) \quad \forall v \in V$

□

Beachte, dass $f$ und $f^T$ (im Gegensatz zu $f$ und $f^{\#}$) zwischen verschiedenen Räumen vermitteln. Im Allgemeinen ist es also sinnlos nach der Symmetrie „$f = f^T$" einer Abbildung zu fragen. Das kann nur für $W^* = V$ d.h. $W = V^*$ der Fall sein.

Beispiel $\quad (\eta\downarrow)^T = \eta\downarrow$

$$(\eta\uparrow)^T = \eta\uparrow$$

Es folgt: Identifizieren wir $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^*$ und ist $v \otimes \theta \in V \otimes V^*$, dann per Def.

$$(v \otimes \theta)^T(\alpha) = \alpha \circ v \otimes \theta = \alpha(v)\, \theta$$

$\forall \alpha \in V^* \Rightarrow$

$$(v \otimes \theta)^T = \theta \otimes v$$

wenn man $V$ mit $V^{**}$ identifiziert.

Formal folgt das so

$$\eta(v,w) = \eta_\downarrow(v)(w)$$

$$= v(\eta_\downarrow^T(w))$$

$$= \eta_\downarrow^T(w)(v)$$

D.h. $\eta_\downarrow(v)(w) = \eta_\downarrow^T(w)(v)$

Ist $\eta$ symmetrisch als Bilinearform, so folgt

$$\eta_\downarrow = \eta_\downarrow^T$$

Genauso geht's mit $\eta_\uparrow$.

Nun ist (ohne Benutzung der Symmetrie)

$$\eta(Lv, Lw) = \eta_\downarrow(Lv)(Lw)$$

$$= Lv(\eta_\downarrow^T Lv)$$

$$= v(L^T \circ \eta_\downarrow^T \circ L\, w)$$

$$\eta(v,w) = \eta_\downarrow(v)(w)$$

$$= v(\eta_\downarrow^T w)$$

Also

$$\eta(Lv, Lw) = \eta(v, w) \qquad \forall v, w \in V$$

$$\Leftrightarrow \quad L^T \circ \eta_\downarrow^T \circ L = \eta_\downarrow^T \quad \Big| \; T$$

$$\Leftrightarrow \quad L^T \circ \eta_\downarrow \circ L = \eta_\downarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \eta_\downarrow \circ L \circ \eta_\uparrow = (L^T)^{-1}$$

Also

$$O(V, \eta) = \{ L \in GL(V) \;|\; \eta_\downarrow \circ L \circ \eta_\uparrow = (L^T)^{-1} \} \qquad (*)$$

Beachte: Ist $X \in End(V)$, dann hängen Adjungierte und Transponierte wie folgt zusammen:

$$X^\# = \eta_\uparrow \circ X^T \circ \eta_\downarrow$$

$$X^T = \eta_\downarrow \circ X^\# \circ \eta_\uparrow$$

Das folgt so

$$\eta(v, Xw) = \eta(X^{\#} v, w)$$

Linke Seite

$$\eta_{\downarrow}(v)(Xw) = v(\eta_{\downarrow}^{T} \circ X(w))$$

Rechte Seite

$$\eta_{\downarrow}(X^{\#} v)(w) = (X^{\#} v)(\eta_{\downarrow}^{T} w)$$

$$= v(X^{\#T} \circ \eta_{\downarrow}^{T}(w))$$

Gleichheit $\forall\ v, w \in V \iff$

$$\eta_{\downarrow}^{T} \circ X = X^{\#T} \circ \eta_{\downarrow}^{T} \qquad | \ T$$

$$\eta_{\downarrow} \circ X^{\#} = X^{T} \circ \eta_{\downarrow} \qquad | \ \eta_{\uparrow} \text{ v.l.}$$

$$X^{\#} = \eta_{\uparrow} \circ X^{T} \circ \eta_{\downarrow} \qquad \longrightarrow$$

Also gilt auch

$$\mathrm{Lie}(O(V, \eta)) = \{ X \in \mathrm{End}(V) \mid \eta_{\downarrow} \circ X \circ \eta_{\uparrow} = -X^{T} \} \quad (**)$$

→ Ist wieder $\mathrm{End}(V) = V \otimes V^*$ und $v \otimes \theta \in V \otimes V^*$ dann

$$(v \otimes \theta)^{\#} = \eta_{\uparrow} \circ (v \otimes \theta)^{T} \circ \eta_{\uparrow}$$

$$= \eta_{\uparrow} \circ \theta \otimes v \circ \eta_{\downarrow}$$

$$= (\eta_{\uparrow}^{T} \theta) \otimes \eta_{\downarrow}^{T}(v)$$

$$= \eta_{\uparrow}(\theta) \otimes \eta_{\downarrow}(v) .$$

Beachte: Die Charakterisierungen

$$\left.\begin{aligned} O(V,\eta) &= \{ L \in GL(V) \mid \eta_\downarrow \circ L \circ \eta_\uparrow = (L^T)^{-1} \} \\ \mathrm{Lie}(O(V,\eta)) &= \{ X \in \mathrm{End}(V) \mid \eta_\downarrow \circ X \circ \eta_\uparrow = -X^T \} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

gelten für alle nicht-ausgearteten Bilinearformen, unabhängig ob symmetrisch oder antisymmetrisch oder keines von beiden.

Sind $\{e_a\}$ und $\{\theta^a\}$ relativ duale Basen von $V$ und $V^*$, so dass

$$L = L^a{}_b \; e_a \otimes \theta^b$$

$$X = X^a{}_b \cdot e_a \otimes \theta^b$$

$$\eta(e_a, e_b) = \eta_{ab}$$

$$\eta^{-1}(\theta^a, \theta^b) = \eta^{ab}$$

$$\eta_\downarrow(e_a) = \eta(e_a, e_b)\,\theta^b = \eta_{ab}\,\theta^b$$

$$\eta^\uparrow(\theta^a) = \eta(\theta^b, \theta^a)\, e_b = \eta^{ba}\, e_b \,.$$

Führt man die linearen Abbildungen auf $\mathrm{End}(V)$ ein

$$P^\pm : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{id}|_{\mathrm{End}(V)} \pm C\right),$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{id}|_{\mathrm{End}(V)} \pm \mathrm{Ad}_{\eta_\uparrow} \circ T\right)$$

wo $C(X) = X^\#$
$T(X) = X^T$
$$\mathrm{Ad}_{\eta_\uparrow}(X) = \eta_\uparrow \circ X \circ (\eta_\uparrow)^{-1}$$
$$= \eta_\uparrow \circ X \circ \eta_\downarrow$$

dann $P^\pm \circ P^\pm = P^\pm$, $P^+ \circ P^- = P^- \circ P^+ = 0$.
Also
$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Bild}(P^+) \oplus \mathrm{Bild}(P^-)$$
$$\qquad\quad\ \, \| \qquad\qquad\qquad\qquad$$
$$= \mathrm{Kern}(P^-) \oplus \mathrm{Kern}(P^+)$$

und
$$O(V,\eta) = \mathrm{Kern}(P_+) = \mathrm{Bild}(P_-)$$
$$= \{X \in \mathrm{End}(V) \mid P_+(X) = 0\}.$$

In Komp.

$$\eta_\downarrow (V^a e_a) = V^a \eta_{ab} \Theta^b$$
$$=: V_b \Theta^b$$

$$\eta_\uparrow (\alpha_a \Theta^a) = \alpha_a \eta^{ba} e_b$$

$$\Rightarrow \quad V_a := V^b \eta_{ba}$$
$$\alpha^a := \eta^{ab} \alpha_b$$

Achtung: diese Gleichungen gelten auch für nicht symmetrisches $\eta$.

Identifiziert man nach Wahl von $\{e_a\}$, $\{\Theta^a\}$, $V$ mit $\mathbb{R}^n$, dann

$$O(\mathbb{R}^n, \eta) = \{ L^a{}_b \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \eta_{cd} L^c{}_a L^d{}_b = \eta_{ab} \}$$

$$= \{ L^a{}_b \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \eta^{ad} L^c{}_d \eta_{cb} = (L^{-1})^a{}_b \}$$

$$\mathrm{Lie}(O(\mathbb{R}^n,\eta)) = \{ X^a{}_b \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid X_{ab} + X_{ba} = 0 \}$$

mit $X_{ab} := \eta_{ca} X^c{}_b$.

Zurück zur Standardnotation im $\mathbb{R}^4$ mit Basis $\{e_\mu\}$, $\{\theta^\mu\}$ so dass $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) = \eta^{\mu\nu}$.

$$L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta \, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \qquad (*)$$

$$L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta \, \eta^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu} \qquad (**)$$

$$\{L^\mu{}_\nu\} = \begin{pmatrix} \underbrace{\gamma}_{\in \mathbb{R}} & \underbrace{\vec{a}^T}_{\in \mathbb{R}^3} \\ \underbrace{\vec{b}}_{\in \mathbb{R}^3} & \underbrace{\underline{M}}_{3\times 3 \text{ Matrix}} \end{pmatrix}$$

Aus $(*)$ $\det(L) = \pm 1$

Da

$$T = \begin{pmatrix} -1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lor}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lor}$$

können wir annehmen

$$\gamma > 1 \quad \longrightarrow \quad \uparrow$$

$$\det(L) = 1 \quad \longrightarrow \quad +$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Lor}_+^\uparrow \subset \mathrm{Lor}$$

$*$ und $**$ sind äquivalent zu

$$\vec{a}^2 = \gamma^2 - 1, \quad \gamma \vec{b} = \underline{M}\vec{a}, \quad M M^T = \mathbb{1} + \vec{b} \otimes \vec{b}^T$$
$$\vec{b}^2 = \gamma^2 - 1, \quad \gamma \vec{a} = M^T \cdot \vec{b}, \quad M^T M = \mathbb{1} + \vec{a} \otimes \vec{a}^T$$

$$\Rightarrow \quad L = B \cdot R$$

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & \vec{b}^T \\ \vec{b} & \mathbb{1} + \frac{\vec{b} \otimes \vec{b}^T}{1+\gamma} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & D \end{pmatrix}$$

mit

$$D := M - \frac{\vec{b} \otimes \vec{a}^T}{1+\gamma}$$

Es gilt

$$D\vec{a} = M\vec{a} - \vec{b}\,\frac{\vec{a}^2}{1+\gamma}$$

$$= \gamma\vec{b} - (\gamma-1)\vec{b} = \vec{b}$$

$$D^T D = \left(M^T - \frac{\vec{a}\otimes\vec{b}^T}{1+\gamma}\right)\left(M - \frac{b\otimes\vec{a}^T}{1+\gamma}\right)$$

$$= M^T M - \frac{M^T\vec{b}\otimes\vec{a}^T}{1+\gamma} - \frac{\vec{a}\otimes(M^T\vec{b})^T}{1+\gamma}$$

$$+ \frac{\vec{b}^2}{(1+\gamma)^2}\,\vec{a}\otimes\vec{a}^T$$

$$= \mathbb{1} + \vec{a}\otimes\vec{a}^T\left(1 - \frac{2\gamma}{1+\gamma} + \frac{\gamma-1}{1+\gamma}\right)$$

$$= \mathbb{1}$$

Um die Determinante und die Eigenwerte der Symmetrischen Matrix B auszurechnen können wir o.B.d.A annehmen, dan $\vec{b} = (\gamma^2-1)^{1/2}\,\vec{e}_x$ (Wahl des K-Systems)

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & (\gamma^2-1)^{1/2} & 0 & 0 \\ (\gamma^2-1)^{1/2} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 1$$

$$\det(B - \lambda \mathbb{1}_4) =$$

$$[(\gamma-\lambda)^2 - (\gamma^2-1)]\,(1-\lambda)^2$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda\gamma + 1)\,(\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte

$$\lambda_1 = \gamma + (\gamma^2-1)^{1/2} \quad > 0$$

$$\lambda_2 = \gamma - (\gamma^2-1)^{1/2} \quad > 0$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 1. \quad > 0$$

$\Rightarrow$ $B$ ist pos. definit.

Schränken wir uns auf $\det(L) = +1$ ein $\Rightarrow$

$$1 = \det(L) = \det(B)\det(R)$$

$$= \det(B)\det(D)$$

$$= \det(D)$$

$\Rightarrow \quad D \in SO(3)$.

Proposition. Die Polarzerlegung von $L \in Lor_+^\uparrow$ bezüglich einer Basis $\{e_\mu\}$ ist

$$L = B\,R$$

mit $R$ = speziell orthogonaler Drehung im „Raum" $\perp$ zu $e_0$

$B$ = Boost = symm. pos. def. Anteil.

Statt $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ benutzen wir

$$\vec{\beta} := \vec{b}/\gamma$$

dann $\vec{\beta}^2 = b^2/\gamma^2 = (\gamma^2-1)/\gamma^2 < 1$

d.h. $\vec{\beta} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$

Setzen wir noch

$$\beta := \|\vec{\beta}\|, \quad \hat{\beta} := \vec{\beta}/\beta$$

dann ist

$$\gamma = \gamma(\beta) = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$$

$$\vec{b} = \gamma\vec{\beta} = \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}\hat{\beta}$$

Das allgemeine Element $L \in Lor_+^\uparrow$ hat dann die Form

$$L(\vec{\beta}, D) = B(\vec{\beta}) \cdot R(D)$$

mit

$$B(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\vec{\beta}^T \\ \gamma\vec{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma-1)\hat{\beta}\otimes\hat{\beta}^T \end{pmatrix}$$

$$R(D) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & D \end{pmatrix}$$

mit $\vec{\beta} \in B_1(0)$

$D \in SO(3)$

Topologisch

$$Lor_+^\uparrow \cong B_1(0) \times \mathbb{RP}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

# Die Lie-Algebra der Lorentzgruppe

Drehungen: Betrachte Kurve in $SO(3)$

$$D(s) = D(\vec{n}(s), \theta(s))$$

$$= P_{\parallel} + [\cos(\theta(s)) + \sin(\theta(s))\, \vec{n}(s) \times] \circ P_{\perp}$$

$$= id + (\cos\theta - 1) P_{\perp} + \sin\theta\, \vec{n} \times$$

Ist $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1$, $\vec{n}(0) = e_a$

dann (beachte: $P_{\parallel}$ und $P_{\perp}$ hängen im Prinzip von $s$ durch $\vec{n}(s)$ ab, was aber egal ist wegen Vorfaktoren $(\cos\theta - 1)$ und $\sin\theta$, die bei $s = 0$ verschwinden)

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} D(s) = \dot{D}_a = \vec{e}_a \times$$

$$= -\varepsilon_a{}^{nm}\, \vec{e}_n \otimes \vec{e}^T_m$$

Beachte:

$$\dot{D}_a(e_b) = -\varepsilon_a{}^{nm}\, \vec{e}_n \otimes \vec{e}^T_m (e_b)$$

$$= -\varepsilon_a{}^{nm}\, e_n\, \delta_{mb}$$

$$= +\varepsilon_{ab}{}^{n}\, \vec{e}_n = \vec{e}_a \times \vec{e}_b$$

Also

$$[\dot{D}_a, \dot{D}_b] = \varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{D}_n$$

Lie-Algebra der SO(3).

Boosts: Betrachte Kurve von Boosts

$$B(s) = B(\vec{\beta}(s)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(s), & \gamma(s)\, \vec{\beta}^T(s) \\ \gamma(s)\,\vec{\beta}(s), & \mathbb{1}_3 + (\gamma(s)-1)\, \hat{\beta}(s) \otimes \hat{\beta}^T(s) \end{pmatrix}$$

mit $\vec{\beta}(0) = 0, \quad \dot{\vec{\beta}} = \frac{d\vec{\beta}}{ds}\Big|_{s=0} = \vec{e}_a$

dann $\gamma(0) = 1, \; \dot{\gamma} = 0$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} B(s) = \dot{B}_a = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_a^{\,T} \\ \vec{e}_a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\dot{B}_a, \dot{B}_b] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_a^{\,T} \\ \vec{e}_a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_b^{\,T} \\ \vec{e}_b & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b & 0 \\ 0 & \vec{e}_a \otimes \vec{e}_b^{\,T} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{e}_b \cdot \vec{e}_a & \vec{0}^T \\ \vec{0} & e_b \otimes \vec{e}_a^{\,T} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{e}_a \otimes \vec{e}_b^T - \vec{e}_b \otimes \vec{e}_a^T \end{pmatrix}$$

$$= - \varepsilon_{ab}{}^{n} \, R(\dot{D}_n) =: - \varepsilon_{ab}{}^{n} \, \dot{R}_n$$

Einbettung von $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$

denn

$$- \varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{D}_n = - \varepsilon_{ab}{}^{n} (-\varepsilon_{n}{}^{pq}) \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q^T$$

$$= e_a \otimes \vec{e}_b^T - \vec{e}_b \otimes \vec{e}_a^T$$

Letztlich noch

$$[\dot{R}_a, \dot{B}_b] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -\varepsilon_a{}^{nm} \vec{e}_n \otimes \vec{e}_m^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_b^T \\ \vec{e}_b & \underline{0} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \varepsilon_{ab}{}^{n} \vec{e}_n & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_{ab}{}^{m} \vec{e}_m^T \\ \vec{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$= \varepsilon_{ab}{}^{n} \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_n^T \\ \vec{e}_n & \underline{0} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{B}_n$$

Insgesamt also: Lie(Lor)

$$\left.\begin{aligned} [\dot{R}_a, \dot{R}_b] &= \varepsilon_{ab}{}^c \dot{D}_c \\ [\dot{R}_a, \dot{B}_b] &= \varepsilon_{ab}{}^c \dot{B}_c \\ [\dot{B}_a, \dot{B}_b] &= -\varepsilon_{ab}{}^c \dot{R}_c \end{aligned}\right\} \mathrm{Lie}(\mathrm{Lor})$$

Diese ist also Isomorph zu

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(SO(3))$$

vgl. Blatt 2, Aufgabe 3.

Ist $\mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Lie}(SO(3))$

und $\mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3, E_1, E_2, E_3\}$

$= \mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SO(3))$ mit $E_a := i \otimes e_a$

dann

$$[e_a, e_b] = \varepsilon_{ab}{}^c e_c$$

$$[e_a, E_b] = \varepsilon_{ab}{}^c E_c$$

$$[E_a, E_b] = -\varepsilon_{ab}{}^c e_c$$

Beachte:

- Die $\dot{D}$ (Drehungen) bilden Lie-Unteralgebra $[\dot{D}, \dot{D}] = \dot{D}$

- Die von den $\dot{D}$ gebildete Unteralgebra ist <u>kein</u> Ideal $[\dot{D}, \dot{B}] = \dot{B}$ (nicht $\dot{D}$).

- Der von den $\dot{B}$ erzeugte lineare Unterraum ist <u>keine</u> Unteralgebra $[\dot{B}, \dot{B}] = \dot{D}$ (nicht $\dot{B}$)

- Lie(Lor) ist halbeinfach. Das folgt aus der Halbeinfachheit von Lie(SO(3)) und der Tatsache, dass Lie(Lor) = $\mathbb{C} \otimes$ Lie(SO(3)) siehe Aufgabe 3 von Blatt 2. Die Killing-Form von Lie(Lor) ist

$$K_{ab} = -4 \begin{pmatrix} \overbrace{\mathbb{1}_3}^{\text{Drehungen}} & 0 \\ 0 & \underbrace{-\mathbb{1}_3}_{\text{Boosts}} \end{pmatrix}$$

hat also Signatur (3,3). Auch das folgt sofort aus Aufgabe 3 von Blatt 2

- Lie(Lor) ist sogar einfach!

Vergleich mit Lie-Algebra der Galilei-Gruppe. Hier sind die Drehungen wie im Lorentz-Fall

$$R_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{0} & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{R}_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{D}_a \end{pmatrix} =$$

$$= -\varepsilon_a{}^{nm} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{e}_n \otimes \vec{e}_m^T \end{pmatrix}$$

Aber die Boosts sind „unsymmetrisch"

$$G(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{v} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{G}_a = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{e}_a & 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$\left.\begin{aligned} [\dot{R}_a, \dot{R}_b] &= \varepsilon_{ab}{}^n \dot{R}_n \\ [\dot{R}_a, \dot{G}_b] &= \varepsilon_{ab}{}^n \dot{B}_n \\ [\dot{G}_a, \dot{G}_b] &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Lie-Algebra der Galilei Gruppe (ohne Translationen)}$$

Wie im Lorentz-Fall bilden die Drehungen hier eine Lie-Unteralgebra aber kein Ideal. Im Unterschied zum Lorentz-Fall bilden aber die Boosts ebenfalls eine Lie-Unteralgebra die nun sogar ein Ideal ist $([\mathring{R}, \mathring{B}] = \dot{B})$.

Der Übergang

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{Gal})$$

ist ein Beispiel für eine „Kontraktion" einer Lie-Algebra. Diese funktioniert so: Sei L Lie-Algebra die <u>als Vektorraum</u> gegeben ist durch

$$L = H \oplus H'$$

Sei $H = \mathrm{Span}\{X_a,\ a = 1, \ldots n\}$

$$H' = \mathrm{Span}\{X'_{a'},\ a' = 1, \ldots n'\}.$$

Dann

$$[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c + C^{c'}_{ab} X'_{c'}$$

$$[X_a, X'_{b'}] = C^c_{ab'} X_c + C^{c'}_{ab'} X'_{c'}$$

$$[X'_{a'}, X'_{b'}] = C^c_{a'b'} X_c + C^{c'}_{a'b'} X'_{c'}$$

Wir reskalieren nun die $X$ und $X'$ wie folgt

$$X_a \mapsto y_a := X_a$$

$$X'_{a'} \mapsto y'_{a'} := \varepsilon X'_{a'}$$

und fragen uns, was im Limes $\varepsilon \to 0$ passiert. Dazu schreiben wir die Lie-Algebra in die $y, y'$ um:

$$[y_a, y_b] = C^a{}_{bc}\, y_c + \frac{1}{\varepsilon} C^{c'}_{ab}\, y'_{c'}$$

$$[y_a, y'_{b'}] = \varepsilon\, C^c_{ab'}\, y_c + C^{c'}_{ab'}\, y'_{c'}$$

$$[y'_{a'}, y'_{b'}] = \varepsilon^2\, C^c_{a'b'}\, y_c + \varepsilon\, C^{c'}_{a'b'}\, y_{c'}$$

Wir stellen fest:

1.) Der Limes $\varepsilon \to 0$ existiert nur als Lie-Algebra wenn der Koeffizient von $\frac{1}{\varepsilon}$ verschwindet, d.h. $C^{c'}_{ab} = 0 \iff H$ ist Lie Unteralgebra.

2.) Ist $H$ Unteralgebra dann existiert $\lim \varepsilon \to 0$, und $H'$ wird Abel'sches Ideal, denn $[H', H'] = 0$ und $[H, H'] \in H'$

Def. Ist L Lie-Algebra und $H \subset L$ Lie-Unteralgebra. Dann ist die Kontraktion von L über H durch den obigen Prozess gegeben.

$$[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c$$

$$[X_a, X'_{b'}] = \cancel{C^c_{ab'} X_c} + C^{c'}_{ab'} X'_{c'}$$

$$[X'_{a'}, X'_{b'}] = \cancel{C^c_{a'b'} X_c} + \cancel{C^{c'}_{a'b'} X'_{c'}}$$

Dieser ist unabhängig davon, welchen Komplementärraum $H'$ zu $H$ in $L$ man gewählt hat, denn bei Redefinitionen

$$X'_{a'} \to \hat{X}'_{a'} = A^{b'}{}_{a'} X'_{b'} + B^{b}{}_{a'} X_b$$

der Form $\quad X_a \to y_a := X_a, \; X'_{a'} \to y'_{a'} = \varepsilon X'_{a'}$

gilt

$$\hat{y}'_{a'} = A^{b'}{}_{a'} y'_{b'} + \varepsilon B^{b}{}_{a'} y_b$$

fallen also die B-Matrizen im Limes $\varepsilon \to 0$ überall heraus.

Kontrahiert man Lie(Lor) über $H$ = Lie(SO(3)) mit $H' = \mathrm{Span}\{\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{B}_3\}$,

$$[\dot{R}_a, \dot{R}_b] = \varepsilon_{ab}{}^{n}\, \dot{R}_n \quad (\text{bleibt})$$

$$[\dot{R}_a, \dot{B}_b] = \varepsilon_{ab}{}^{n}\, \dot{B}_n \quad (\text{bleibt})$$

$$[\dot{B}_a, \dot{B}_b] = -\varepsilon_{ab}{}^{n}\, \dot{R}_n \quad (\to 0)$$

So erhält man Lie(Gal) falls

$$\dot{R}_a \mapsto \dot{R}_a,$$

$$\dot{B}_a \longmapsto \dot{G}_a := \varepsilon \dot{B}_a.$$

$$\dot{B}_a \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_a^{\,T} \\ \vec{e}_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_a^{\,T} \\ c\vec{e}_a^{\,T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon \dot{B}_a \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \varepsilon c \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_a^{\,T}/c \\ \vec{e}_a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Wählt man $c \to \infty$ und $\varepsilon = \frac{1}{c}$ dann

$$\lim_{c \to \infty} \left\{ \frac{1}{c} \dot{B}_a \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \right\} = \dot{G}_a \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

## Polarzerlegung

Die Zerlegung

$$L(\vec{\beta}, D) = B(\vec{\beta})\, R(D)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \vec{\beta}^T \\ \gamma \vec{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma - 1)\hat{\beta} \otimes \hat{\beta}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & D \end{pmatrix}$$

entspricht der Polarzerlegung von $L$

Proposition.

Sei $X \in GL(n, \mathbb{C})$; dann existiert ein eindeutiges $R \in U(n)$ (d.h $R^\dagger = R^{-1}$) und ein positiv Hermite'sches $B$ ($B^\dagger = B$ mit Eigenwerten $\lambda_i > 0$), so dass

$$X = BR$$

Ist $X \in GL(n, \mathbb{R})$ so ist $R \in O(n)$ ($R^T = R^{-1}$) und $B$ reell und symmetrisch.

Beweis

Definiere $A = XX^+$, A ist Hermite'sch und positiv definit $\Rightarrow$ Es existiert eindeutige positive Wurzel $B := \sqrt{A}$. Diese ist wie folgt: Sei $U$ die unitäre, A diagonalisierende Matrix; $UAU^+ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_a > 0 \;\forall a$.
Dann $\sqrt{A} = U^+ \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\, U$.
Klarerweise $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$.
Mit $B := \sqrt{A}$ definieren wir $R := B^{-1} X$
Dann $R^+ = X^+ B^{-1}$ (da $B^+ = B$).
Aus $A = B^2 = XX^+$ folgt $X^+ B^{-1} = X^{-1} B$,
also $R^+ = X^{-1} B = R^{-1} \Rightarrow R \in U(n)$.
Damit folgt die Existenz der Polarzerlegung.
Die Eindeutigkeit folgt so: Angenommen
$X = B_1 R_1 = B_2 R_2 \Rightarrow B_1 = B_2 R_3$ mit
$R_3 = R_2 R_1^{-1} \in U(n)$. Aus $B_1 = B_1^+$ folgt
$B_1^2 = B_1 B_1^+ = B_2 R_3 R_3^+ B_2^+ = (B_2^+)^2 \Rightarrow$
$B_1 = B_2$ da $B_1$ und $B_2$ pos. def. Herm.
Aber dann auch $R_1 = R_2$. Schließlich,
ist $X \in GL(n, \mathbb{R})$ dann führt $A = XX^T$
zu einer symmetrischen pos. definiten Matrix. Alle weiteren Schritte sind wie im komplexen Fall mit $+ \to T$. $\square$

# Die Lie-Algebra der inhomogenen Gruppe

Ist $G \subset GL(V)$ gegeben, dann

$$IG = V \rtimes_\alpha G$$

weil $\alpha : GL(V) \to Aut(V) \cong GL(V)$

$$A \longmapsto A$$

d.h. $\alpha = id|_{GL(V)}$. Deshalb schreiben wir $\alpha$ oft nicht an, d.h. $IG = V \rtimes GL(V)$.

Um die Lie-Algebra zu bestimmen, benutzen wir, dass $ad_X(Y) = [X,Y]$. Sind $g(s)$ und $h(t)$ zwei Kurven in $IG$ mit $g(0) = h(0) = e \in IG$ und $\dot g = X$ und $\dot h = Y$, dann

$$ad_X(Y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(s)\, h(t)\, g^{-1}(s)$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Ad_{g(s)}(Y)$$

So bekommt man aus dem Multiplikationsgesetz die Lie-Algebra

In unserem Falle $\mathbb{G} = V \rtimes G$ ist

$$g(s) = (a(s), A(s))$$
$$h(t) = (b(t), B(t))$$

mit

$$g(0) = (0, e) \quad , \quad h(0) = (0, e)$$
$$\dot{g} = (\dot{a}, \dot{A}) \quad , \quad \dot{h} = (\dot{b}, \dot{B})$$

- steht für $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}$ oder $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$.

Es ist (Argumente unterdrückt)

$$g h g^{-1} = (a, A)(b, B)(-A^{-1}a, A^{-1})$$

$$= (a, A)(b - BA^{-1}a, BA^{-1})$$

$$= (a + Ab - ABA^{-1}a, ABA^{-1})$$

$$= \big( a(s) + A(s)\,b(t) - A(s)B(t)A^{-1}(s)\,a(s) \, ,$$
$$A(s)\,B(t)\,A^{-1}(s)\big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(s)\, h(t)\, g^{-1}(s)$$

$$= \left( A(s)\,\dot{b} - A(s)\,\dot{B}\,A^{-1}(s)\,a(s), \right.$$
$$\left. A(s)\,\dot{B}\,A^{-1}(s) \right)$$

$$= Ad_{(a(s),\,A(s))}(\dot{b}, \dot{B})$$

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Ad_{(a(s),\,A(s))}(\dot{b}, \dot{B})$$

$$= [(\dot{a}, \dot{A}), (\dot{b}, \dot{B})]$$

$$= (\dot{A}\dot{b} - \dot{B}\dot{a}, \dot{A}\dot{B} - \dot{B}\dot{A})$$

$$= (\dot{A}\dot{b} - \dot{B}\dot{a}, [\dot{A}, \dot{B}])$$

Hier ist $\dot{A} \in End(V)$, $\dot{b} \in V$ und $\dot{A}\dot{b} := \dot{A}(\dot{b})$ etc.

Offensichtlich, $[(\dot{a}, 0), (\dot{b}, 0)] = 0$, d.h. Lie-Algebra der Translationsgruppe $(V, +)$ (der Abel'sche Normalteiler in $V \rtimes G$) ist Abel'sch (klar!). Weiter ist

$$[(0, \dot{A}), (\dot{b}, 0)] = \dot{A}(\dot{b}) \in V.$$

Bezogen auf die Drehgruppe werden die 6 Basiselemente $\mathring{R}_a$, $\mathring{B}_a$

$$\mathring{R}_a = -\varepsilon_a{}^{nm} \begin{pmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \vec{e}_n \otimes \vec{e}_m^T \end{pmatrix}$$

$$\mathring{B}_a = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_a^T \\ \vec{e}_a & 0 \end{pmatrix}$$

durch die Zeittranslation

$$\mathring{P}_0 = e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

und die drei Raumtranslationen

$$\mathring{P}_a = e_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}_a \end{pmatrix}$$

ergänzt. Die neu hinzukommenden Relationen sind also

$$\left.\begin{aligned} [\mathring{P}_0, \mathring{P}_a] &= [\mathring{P}_a, \mathring{P}_b] = 0 \\ [\mathring{R}_a, \mathring{P}_0] &= 0 \\ [\mathring{B}_a, \mathring{P}_0] &= \mathring{P}_a \\ [\mathring{R}_a, \mathring{P}_b] &= \varepsilon_{ab}{}^{n} \mathring{P}_n \end{aligned}\right\} \text{genauso für inhomogene Galilei Lie-Algebra}$$

$$[\mathring{B}_a, \mathring{P}_b] = \delta_{ab} \mathring{P}_0 \quad \} = 0 \text{ für IGal}$$

# Übersicht

| $Lie(\|Lor)\ \{\dot{D}_a, \dot{B}_a, \dot{P}_0 \dot{P}_a\}$ | | $Lie(\|Gal)\ \{\dot{D}_a, \dot{G}_a, T, \dot{P}_a\}$ |
|---|---|---|
| $[\dot{R}_a, \dot{R}_b] = \varepsilon_{ab}{}^n \dot{D}_n$ | (1) | $[\dot{R}_a, \dot{D}_b] = \varepsilon_{ab}{}^n \dot{D}_n$ |
| $[\dot{R}_a, \dot{B}_b] = \varepsilon_{ab}{}^n \dot{B}_n$ | (2) | $[\dot{R}_a, \dot{G}_b] = \varepsilon_{ab}{}^n \dot{G}_n$ |
| $[\dot{B}_a, \dot{B}_b] = -\varepsilon_{ab}{}^n \dot{D}_n$ | (3) | $[\dot{G}_a, \dot{G}_b] = 0$ |
| $[\dot{P}_0, \dot{P}_a] = 0$ | (4) | $[\dot{T}, \dot{P}_b] = 0$ |
| $[\dot{P}_a, \dot{P}_b] = 0$ | (5) | $[\dot{P}_a, \dot{P}_b] = 0$ |
| $[\dot{R}_a, P_0] = 0$ | (6) | $[\dot{R}_a, T] = 0$ |
| $[\dot{R}_a, \dot{P}_b] = \varepsilon_{ab}{}^n \dot{P}_n$ | (7) | $[\dot{R}_a, \dot{P}_b] = \varepsilon_{ab}{}^n \dot{P}_n$ |
| $[\dot{B}_a, \dot{P}_0] = \dot{P}_a$ | (8) | $[\dot{B}_a, T] = \dot{P}_a$ |
| $[\dot{B}_a, \dot{P}_b] = \delta_{ab} P_0$ | (9) | $[\dot{B}_a, \dot{P}_b] = 0$ |

Beachte: Die Lie-Algebra Elemente für Boosts und Zeittranslationen differieren und sind deshalb auch unterschiedlich benannt.

$\dot{B}$ : Erzeugt Boosts mit Parameter $\vec{\beta}$

$\dot{G}_a$ : " " " " $\vec{V}$

$$\exp(\dot{B}_a \beta^a) = \exp(\dot{G}_a V^a)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{G}_a = \frac{1}{c}\dot{B}_a$$

$\dot{P}_0$ : Erzeugt Transl. mit Parameter $b = c\,\Delta t$

$\dot{T}$ : " " " $\Delta t$

$$\exp(\dot{P}_0 c\Delta t) = \exp(\dot{T}\Delta t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{T} = c\dot{P}_0$$

Schreibt man Lie(ILor) auf $\{\dot{D}, \dot{G}, \dot{T}, \dot{P}\}$ um, bleiben alle Relationen unverändert (mit neuen Namen) bestehen, außer denen, die explizit c-abhängig werden; (3) und (9):

$$[\dot{G}_a, \dot{G}_b] = -\varepsilon_{ab}{}^n \dot{D}_n \, {}^1/_{c^2} \qquad (3')$$

$$[\dot{G}_a, \dot{P}_b] = \delta_{ab}\dot{T}/c^2 \qquad (9')$$

Formal entspricht der Übergang

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{ILor}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{IGal})$$

allerdings der Kontraktion von $\mathrm{Lie}(\mathrm{ILor})$ über $H = \mathrm{Span}\{\dot{P}_0, \dot{D}_1, \dot{D}_2, \dot{D}_3\}$, wobei $H' = \mathrm{Span}\{\dot{P}_1, \dot{P}_2, \dot{P}_3, \dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{B}_3\}$ [Achtung: $H$ ist Unteralgebra, $H'$ nicht].

Denn ersetzt man

$$\dot{P}_a \to \dot{T}_a = \varepsilon \dot{P}_a$$
$$\dot{B}_a \to \dot{G}_a = \varepsilon \dot{B}_a$$

So tauchen $\varepsilon$ in (1) - (9) bei den Relationen (3) und (9) auf

$$[\dot{G}_a, \dot{G}_b] = -\varepsilon^2 \varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{D}_n$$

$$[\dot{G}_a, \dot{T}_b] = \varepsilon^2 \delta_{ab} \dot{P}_0$$

Nach der Kontraktion wird $H' = \mathrm{Span}\{\dot{P}_a, \dot{B}_b\}$ ein Abelsches Ideal. Dem entspricht es, dass

$$\mathrm{IGal}^{\uparrow}_{+} \cong (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rtimes (\mathbb{R} \times SO(3))$$

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{IGal}) \cong (\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3) \rtimes (\mathbb{R} \oplus \mathrm{Lie}(SO(3)))$$

Konstruktion des Überlagerungs-Homomorphismus $SL(2,\mathbb{C}) \to Lor_+^\uparrow$

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{ A \in Mat(2\times 2, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1 \}$$

Eine Basis über $\mathbb{C}$ von $Mat(2\times 2,\mathbb{C})$ ist gegeben durch $\sigma_\mu = \{ E_2, \vec{\sigma} \}$ oder $\tilde{\sigma}_\mu = \{ E_2, -\vec{\sigma} \}$, wobei $\vec{\sigma} = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Unter Benutzung der Minkowski-Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

benutzen wir auch

$$\sigma^\mu := \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu$$

$$\tilde{\sigma}^\mu := \eta^{\mu\nu} \tilde{\sigma}_\nu$$

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ \sigma^\mu \mid \mu = 0..3 \} = Mat(2\times 2, \mathbb{C})$$

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{ \sigma^\mu \mid \mu = 0..3 \} = Herm(2\times 2, \mathbb{C})$$

= Hermite'sche $2\times 2$ Matrizen über $\mathbb{C}$.

Die $\sigma^\mu$ und $\tilde{\sigma}_\mu$ - Matrizen genügen

$$\sigma_\mu M \tilde{\sigma}^\mu = 2 \, \mathrm{Spur}(M) \, E_2$$

Das folgt aus $\sigma_a M \sigma_a = 2 \, \mathrm{Spur}(M) \, E_2 - M$, (Vgl. S. 2.43). Außerdem gilt für $\sigma_{(\mu} \tilde{\sigma}_{\nu)} := \frac{1}{2}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\sigma}_\mu)$

$$\sigma_{(\mu} \tilde{\sigma}_{\nu)} = E_2 \, \eta_{\mu\nu}$$

Das folgt aus

$$\sigma_0 \tilde{\sigma}_0 + \sigma_0 \tilde{\sigma}_0 = 2 E_2$$

$$\sigma_0 \tilde{\sigma}_b + \sigma_b \tilde{\sigma}_0 = - \sigma_b + \sigma_b = 0$$

$$\sigma_a \tilde{\sigma}_b + \sigma_b \tilde{\sigma}_a = - [\sigma_a, \sigma_b]_+ = - 2 E_2 \delta_{ab}$$

Wir definieren nun die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C})$$

$$x^\mu \longmapsto x^\mu \sigma_\mu = \sigma(x)$$

Diese ist ein linearer Isomorphismus reeller (4-dimensionaler) Vektorräume.

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} X^0 + X^3 , & X^1 - iX^2 \\ X^1 + iX^2 , & X^0 - X^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(\sigma(X)) = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = \eta(X, X)$$

Auf Herm$(2\times 2, \mathbb{C})$ besitzt $SL(2, \mathbb{C})$ die lineare Darstellung

$$\Delta : SL(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{Herm}(2\times 2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Herm}(2\times 2, \mathbb{C})$$

$$\Delta(A, M) := A M A^+$$

In der Tat ist das eine Aktion

$$\Delta(E_2, M) = M$$

$$\Delta(A, \Delta(B, M)) = A \, \Delta(B, M) \, A^+$$

$$= A B M B^+ A^+ = \Delta(A B, M)$$

und klarerweise auch linear in $M$.

Mit Hilfe des Isomorphismus $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Herm}(2, \mathbb{C})$ können wir $\Delta$ zu einer Darstellung $D$ auf $\mathbb{R}^4$ machen. Fassen wir $\Delta$ auf als Homomorphismus

$$\Delta : SL(2, \mathbb{C}) \to GL(\mathrm{Herm}(2\times 2, \mathbb{C}))$$

$$A \longmapsto \Delta_A : h \mapsto \Delta_A(h) := A h A^{+}$$

dann

$$\Delta_{E_2} = \mathrm{id}|_{\mathrm{Herm}(2\times 2, \mathbb{C})}$$

$$\Delta_A \circ \Delta_B = \Delta_{A\cdot B} \qquad (*)$$

Die Darstellung

$$D : SL(2, \mathbb{C}) \to GL(\mathbb{R}^4)$$

ist dann definiert durch

$$D_A := \sigma^{-1} \circ \Delta_A \circ \sigma \qquad (**)$$

$$D_A(x) = \sigma^{-1}(\Delta(A, \sigma(x)))$$

$$= \sigma^{-1}(A\, \sigma(x)\, A^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \quad A\, \sigma(x)\, A^{-1} = \sigma(D_A(x))$$

Aus (*) und (**) folgt sofort

$$\mathcal{D}_A \circ \mathcal{D}_B = (\sigma^{-1} \circ \Delta_A \circ \sigma) \circ (\sigma^{-1} \circ \Delta_B \circ \sigma)$$
$$= \sigma^{-1} \circ (\Delta_A \circ \Delta_B) \circ \sigma$$
$$= \sigma^{-1} \Delta_{A \cdot B} \circ \sigma$$
$$= \mathcal{D}_{A \cdot B}$$

und natürlich

$$\mathcal{D}_{E_2} = E_4$$

Wir bezeichnen die Abbildung $\mathcal{D}$ nun mit $p$, denn wir werden zeigen, daß

$$p : SU(2) \to GL(\mathbb{R}^4)$$
$$A \mapsto p(A) =: \mathcal{D}_A$$

ein Projektionshomomorphismus auf $Lor^\uparrow_+ \subset GL(\mathbb{R}^4)$ ist. Die Homomorphismus-Eigenschaft ist schon gezeigt. Dass $Bild(p) \subset Lor$ folgt so: Wegen $\det(A) = 1$

$\Rightarrow$

$$\eta(p_A(x), p_A(x)) = \det(\sigma(p_A(x)))$$
$$= \det(A\,\sigma(x)\,A^{+}) = \det(\sigma(x)) = \eta(x, x).$$

Also $p_A \in \mathrm{Lor} = O(\mathbb{R}^4, \eta)$ $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})$

Da $SL(2,\mathbb{C})$ zusammenhängend und $p$ stetig ist

$$\mathrm{Bild}(p) \subseteq \mathrm{Lor}_+^\uparrow .$$

Dass ganz $\mathrm{Lor}_+^\uparrow$ im Bild liegt sehen wir gleich explizit. Davor bemerken wir, dass

$$\mathrm{Kern}(p) = \{ \pm E_2 \}$$

denn $p_A = E_4 \iff A\,\sigma(X)\,A^+ = \sigma(X)$ für alle $X \in \mathbb{R}^4$. Wählt man zuerst $X = (1, \vec{0})$ so dass $\sigma(X) = E_2$ dann folgt $A^+ = A^{-1}$. Das aber impliziert $A\,\sigma(X) = \sigma(X)\,A$, d.h. $A$ kommutiert mit allen Hermite'schen $2\times 2$ Matrizen – und damit mit allen komplexen $2\times 2$ Matrizen. Also $A = \lambda E_2$ und wegen $\det(A) = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Setzen wir $[p(A)]^\mu{}_\nu = L^\mu{}_\nu$ dann gilt

$$A\,\sigma(X)\,A^+ = \sigma(p_A(X))$$

$$= \sigma_\mu L^\mu{}_\nu X^\nu$$

für alle $X \in \mathbb{R}^4$. Also

$$A \sigma_\nu A^+ = L^\mu{}_\nu \, \sigma_\mu . \qquad (*)$$

Multipliziert man (*) von rechts mit $\tilde{\sigma}^\lambda$ so folgt wegen

$$\mathrm{Spur}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\lambda) = \mathrm{Spur}(\sigma_{(\mu} \tilde{\sigma}_{\lambda)})$$

$$= \mathrm{Spur}(E_2 \eta_{\mu\lambda}) = 2 \eta_{\mu\lambda}$$

also $\mathrm{Spur}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}^\lambda) = 2 \delta^\lambda_\mu$ :

$$[p(A)]^\lambda{}_\nu = L^\lambda{}_\nu = \tfrac{1}{2} \mathrm{Spur}(\tilde{\sigma}^\lambda A \sigma_\nu A^+)$$

Man sieht sofort $p(A) \in L_{or}^\uparrow$, denn

$$L^0{}_0 = \tfrac{1}{2} \mathrm{Spur}(\tilde{\sigma}^0 A \sigma_0 A^+)$$

$$= \tfrac{1}{2} \mathrm{Spur}(A A^+) > 0 .$$

Ebenso

$$L^\mu{}_\mu = \mathrm{Spur}(L) = \tfrac{1}{2} \mathrm{Spur}(A \underbrace{\sigma_\mu A^+ \tilde{\sigma}^\mu}_{2\,\mathrm{Spur}(A^+) E_2})$$

$$= |\mathrm{Spur}(A)|^2 \geq 0$$

so dass $\{L^\mu{}_\nu\} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & -E_3 \end{pmatrix} \notin \text{Bild}(p)$

und somit überhaupt keine Raumspiegelungen im Bild von p sind.

Die Umkehrung $p^{-1}(L)$ folgt aus (*) durch Multiplikation mit $\tilde{\sigma}^\nu$ von rechts

$$\sigma_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu = A \sigma_\nu A^+ \tilde{\sigma}^\nu$$
$$= 2 A \, \text{Spur}(A^+) \qquad (**)$$

Bildet man davon die Determinante, so folgt wegen $\det(A) = 1$

$$4 [\text{Spur}(A^+)]^2 = \det(\sigma_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu)$$

bzw $2 \, \text{Spur}(A^+) = \pm \left[\det(\sigma_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu)\right]^{1/2}$

Eingesetzt in (**) und aufgelöst nach A folgt

$$A = p^{-1}(L) = \pm \frac{\sigma_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu}{\left[\det \sigma_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu\right]^{1/2}}$$

Ist $\{L^\mu{}_\nu\} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \{R^a{}_b\} \end{pmatrix}$, $R \in SO(3)$

dann

$$\sigma_\mu L^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu = \sigma_0 \tilde{\sigma}^0 + \sigma_a R^a{}_b \tilde{\sigma}^b$$

$$= E_2 + \underbrace{\sigma_a R^a{}_b \sigma^b}$$

hier Indizes mit $\delta^{ab}$ hochgezogen.

$$\left( \tilde{\sigma}^b = \eta^{b\lambda} \tilde{\sigma}_\lambda = \eta^{bb} \tilde{\sigma}_b = (-1)(-\sigma_b) = \sigma_b \right)$$

Also geht $p'(L)$ für $L$ = räumliche Drehung gerade in die entsprechende Formel auf S. 2.45 für die Projektion $p: SU(2) \to SO(3)$ über.

$$\Rightarrow \quad p(SU(2)) = SO(3) \subset Lor_+^\uparrow$$

Sowohl in $SL(2,\mathbb{C})$ als auch $Lor_+^\uparrow$ kann man Polarzerlegen und erhält

$\mapsto$ pos. def. von Det $= 1$

$$\begin{array}{ccccc} SL(2,\mathbb{C}) & \cong & SU(2) & \times & Herm^{(+,1)}(2\times 2, \mathbb{C}) \\ p' \downarrow & & \downarrow p_1 & \times & \downarrow p_2 \\ Lor_+^\uparrow & \cong & \underbrace{SO(3)}_{\text{Drehungen}} & \times & \underbrace{Sym^{(+,1)}(4\times 4, \mathbb{R})}_{\text{Boosts}} \end{array}$$

Zerlegt man $A \in SL(2,\mathbb{C})$ polar in eine $SU(2)$ und $Herm^{(+,1)}(2\times 2,\mathbb{C})$ (+ steht für pos. def., 1 für Det = 1) Matrix, dann sind deren Bilder unter der Projektion $p: SL(2,\mathbb{C}) \to Lor_+^\uparrow$ gerade Drehungen und Boosts. Wir bezeichnen

$$p^{-1}(\text{Drehungen}) = SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$$

auch als „Drehungen" und

$$p^{-1}(\text{Boosts}) = Herm^{(+,1)}(2\times 2,\mathbb{C}) \subset SL(2,\mathbb{C})$$

auch als „Boosts".

Lemma: Die Exponentialabbildung

$$\exp: Herm^{\text{spur}=0}(2\times 2,\mathbb{C}) \to H^{(+,1)}(2\times 2,\mathbb{C})$$

ist ein topologischer Homöomorphismus.

Da

$$\left.\begin{aligned} Herm^{\text{spur}=0}(2\times 2,\mathbb{C}) &\cong \mathbb{R}^3 \\ \text{und} \quad SU(2) &\cong S^3 \end{aligned}\right\} \text{topologisch}$$

ist

$$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{C}) & \underset{(top)}{\cong} & S^3 \times \mathbb{R}^3 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ Lor_+^\uparrow & \underset{top}{\cong} & \mathbb{RP}^3 \times \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$\pi_1(SL(2,\mathbb{C})) = \pi_1(S^3) \times \pi_1(\mathbb{R}^3)$$
$$= \{1\}$$

$\Rightarrow$ $SL(2,\mathbb{C})$ ist die universelle Überlagerungsgruppe zu $Lor_+^\uparrow$.

Die universelle Überlagerung der eigentlich orthochronen Poincaré-Gruppe ist,

$$\overline{Poin}_+^\uparrow := \mathbb{R}^4 \rtimes_\alpha SL(2,\mathbb{C})$$

mit $\alpha: SL(2,\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{R}^4) \cong GL(\mathbb{R}^4)$

$$\alpha(A) = p(A)$$

Also

$$(a,A)\cdot(b,B) = (a+p(A)b,\ AB).$$

Wie sehen nun „Drehungen" und „Boosts" explizit in $SL(2,\mathbb{C})$ aus?

$$\mathrm{Lie}(SU(2)) = \mathrm{Span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$$

$$\tau_a = -\frac{i}{2}\sigma_a$$

$$\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C})) = \mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SU(2))$$

$$= \mathrm{Span}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, i\tau_1, i\tau_2, i\tau_3\}$$

$\Rightarrow$ $-\frac{i}{2}\sigma_a \longrightarrow$ erzeugen Drehungen

$\frac{1}{2}\sigma_a \longrightarrow$ erzeugen Boosts

$$\left[-\frac{i}{2}\sigma_a, -\frac{i}{2}\sigma_b\right] = \varepsilon_{ab}{}^{n}\left(-\frac{i}{2}\sigma_n\right)$$

$$\left[-\frac{i}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b\right] = \varepsilon_{ab}{}^{n}\left(\frac{1}{2}\sigma_n\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b\right] = -\varepsilon_{ab}{}^{n}\left(-\frac{i}{2}\sigma_n\right)$$

Nennt man $-\frac{i}{2}\sigma_a = \tau_a$

$\frac{1}{2}\sigma_a = \tau_{3+a}$

dann $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\tau_1, \dots, \tau_6\} = \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C}))$.

I. Drehung um Achse $\vec{n}$, $\|\vec{n}\| = 1$ mit Winkel $\alpha$:

$$A(\vec{n}, \alpha) := \pm \exp(\alpha\, \vec{n}\cdot\vec{\tau})$$

$$= \pm \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

$$= \pm \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\alpha\right)^n \frac{1}{n!} (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n$$

$$= \pm \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\alpha\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} (n\cdot\sigma)^{2n} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\alpha\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} (n\cdot\sigma)^{2n+1} \right]$$

$$= \pm \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) E_2 - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \right]$$

1. Beispiel. $\vec{n} = \vec{e}_3$

$$\Rightarrow A(\vec{e}_3, \alpha) = \pm \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) E_2 - i\sigma_3 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$A(\vec{e}_3,\alpha)\, X^\mu \sigma_\mu\, A^+(e_3,\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0+X^3, & X^1-iX^2 \\ X^1+iX^2, & X^0-X^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}(X^0+X^3), & e^{-i\alpha/2}(X^1-iX^2) \\ e^{i\alpha/2}(X^1+iX^2), & e^{i\alpha/2}(X^0-X^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X^0+X^3, & e^{-i\alpha}(X^1-iX^2) \\ e^{i\alpha}(X^1+iX^2), & X^0-X^3 \end{pmatrix}$$

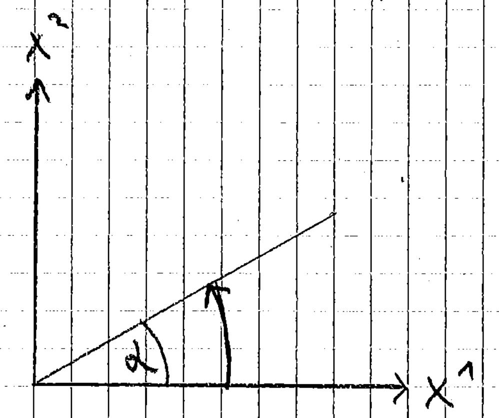
$$= \sigma_\mu L^\mu{}_\nu X^\nu = \sigma_\mu X'^\mu$$

$$\Rightarrow X'^0 = X^0 \quad , \quad X'^3 = X^3$$

$$X'^1 + iX'^2 = e^{i\alpha}(X^1+iX^2)$$

$$= \cos(\alpha) X^1 - \sin(\alpha) X^2$$
$$+ i(\sin(\alpha) X^1 + \cos(\alpha) X^2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X'^1 \\ X'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}$$




Entspricht „aktiver" Drehung im pos. Sinne um Winkel $\alpha$ in 1-2 Ebene.

II. Boost in Richtung $\vec{n}$, $\|\vec{n}\|=1$ mit Rapidität $\varrho$

$$B(\vec{n},\varrho) = \pm \exp(\varrho\, n^a\, \tau_{3+a})$$

$$= \pm \exp\left(\tfrac{1}{2}\varrho\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

$$= \pm \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n$$

$$= \pm \Big[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} (n\cdot\sigma)^2$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} (n\cdot\sigma)^{2n+1} \Big]$$

$$= \pm \left[\cosh\left(\frac{\varrho}{2}\right) E_2 + \sinh\left(\frac{\varrho}{2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\right]$$

Beachte: Hätte man nicht nochmal rechnen müssen, denn

$$B(\vec{n}, \varsigma) = A(\vec{n}, i\alpha)$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{i\alpha}{2}\right)}_{\cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right)} E_2 - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \underbrace{\sin\left(\frac{i\alpha}{2}\right)}_{i \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) E_3 + \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}).$$

2. Beispiel $\vec{n} = \vec{e}_3$

$$B(\vec{e}_3, \varsigma) = \begin{pmatrix} e^{\varsigma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varsigma/2} \end{pmatrix}$$

$$B(\vec{e}_3, \alpha)\, X^\mu \sigma_\mu\, B^+(\vec{e}_3, \alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\varsigma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varsigma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 + X^3, & X^1 - iX^2 \\ X^1 + iX^2, & X^0 - X^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varsigma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varsigma/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\varsigma/2}(X^0 + X^3), & e^{\varsigma/2}(X^1 - iX^2) \\ e^{-\varsigma/2}(X^1 + iX^2), & e^{-\varsigma/2}(X^0 - X^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\varsigma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\varsigma/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\varsigma}(X^0 + X^3), & X^1 - iX^2 \\ X^1 - iX^2, & e^{-\varsigma}(X^0 + X^3) \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_\mu L^\mu{}_\nu x^\nu = \sigma_\mu x'^\mu$$

$$\Rightarrow \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2$$

$$x'^0 + x'^3 = e^{\varrho} (x^0 + x^3)$$

$$x'^0 - x'^3 = e^{-\varrho} (x^0 - x^3)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\varrho) , & \sinh(\varrho) \\ \sinh(\varrho) , & \cosh(\varrho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma , & \beta\gamma \\ \beta\gamma , & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Entspricht „aktivem" Boost in 3-Richtung mit Geschwindigkeit $v$,

$$\frac{v}{c} = \beta = \tanh(\varrho)$$

$$\varrho = \tanh^{-1}(\beta) = \tanh^{-1}(v/c).$$

$$= \text{Rapidität}.$$

Allgemeiner Fall $O(V, \eta)$. Es ist.

$$\mathrm{Lie}(O(V,\eta)) = \{X \in \mathrm{End}(V) \mid P_+(X) = 0\}$$

$$P_\pm : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$$

$$P_\pm := \frac{1}{2}\left(\mathrm{id}|_{\mathrm{End}(V)} \pm C\right)$$

Wegen $C \circ C = \mathrm{id}|\mathrm{End}$ gilt

$$P_+^2 = P_+, \quad P_-^2 = P_-, \quad P_+ \circ P_- = P_- \circ P_+ = 0.$$

Also

$$\mathrm{Lie}(O(V,\eta)) = \mathrm{Kern}(P_+)$$
$$= \mathrm{Bild}(P_-)$$

Ist $\{e_a \mid a = 1, \dots, n\}$ Basis von $V$ und $\{\eta^a \mid a = 1, \dots, n\}$ dazu duale Basis von $V^*$, dann ist $\{e_a \otimes \eta^b \mid a,b = 1, \dots, n\}$ Basis von $V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$. Das Bild dieser Basis unter $P_-$ ist dann Erzeugendensystem von $\mathrm{Lie}(O(V,\eta))$.

$$2P_-(e_a \otimes \eta^b) = e_a \otimes \eta^b - (e_a \otimes \eta^b)^\#$$

$$= e_a \otimes \eta^b - \varepsilon\, \eta_\uparrow(\eta^b) \otimes \eta_\downarrow(e_a)$$

Die Lie-Algebra der Gruppe

$$O(V,\eta) := \{ A \in GL(V) \mid A^{\#} \circ A = id|_V \}$$

wo $C: \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}$

$$C(A) = A^{\#}$$

definiert ist durch

$$\eta(v, Aw) = \eta(A^{\#} v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

Also

$$\eta{\downarrow}(v)(Aw) = \eta{\downarrow}(A^{\#} v)(w)$$

$$A^T \circ \eta{\downarrow}(v)(w) = \eta{\downarrow} \circ A^{\#}(v)(w)$$

$\forall v, w \in V \Rightarrow \quad A^T \circ \eta{\downarrow} = \eta{\downarrow} \circ A^{\#}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{C(A) = A^{\#} = \eta{\uparrow} \circ A^T \circ \eta{\downarrow}} \quad \longrightarrow$$

Wir setzen mit $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$:

$$\eta(v,w) = \varepsilon\, \eta(w,v)$$

Dann

$$C \circ C = id|_{\mathrm{End}(V)}$$

und $\eta{\downarrow}^T = \varepsilon\, \eta{\downarrow}, \quad \eta{\uparrow}^T = \varepsilon\, \eta{\uparrow}.$

denn

$$(e_a \otimes \eta^b)^T = \eta^b \otimes e_a$$

(allg $(v \otimes \alpha)^T = \alpha \otimes v$)

und somit

$$(e_a \otimes \eta^b)^\# = \eta_\uparrow \circ (e_a \otimes \eta^b)^T \circ \eta_\downarrow$$

$$= \eta_\uparrow \circ \eta^b \otimes e_a \circ \eta_\downarrow$$

$$= \eta_\uparrow (\eta^b) \otimes \eta_\downarrow^T (e_a)$$

$$= \varepsilon \; \eta_\uparrow (\eta^b) \otimes \eta_\downarrow (e_a)$$

wobei $\eta_\downarrow^T = \varepsilon \eta_\downarrow$

benutzt wurde.

Setzt man

$$\eta_\downarrow (e_a) = \eta_a = \eta_{ab} \eta^b$$

$$\eta_\uparrow (\eta^a) = e^a = \eta^{ba} e_b$$

dann sind

$$M_{ab} := e_a \otimes \eta_b - \varepsilon\, e_b \otimes \eta_a$$

für $a \leq b$

Basis von $\mathrm{Lie}(O(V,\eta))$

Es gilt

$$\eta_a(e_b) = \eta_\downarrow(e_a)(e_b) = \eta_{ab}.$$

$$\mathrm{Lie}(O(V,\eta)) = \begin{cases} \mathrm{Span}\{M_{ab} \mid 1 \leq a < b \leq n\}, & \varepsilon = 1 \\ \mathrm{Span}\{M_{ab} \mid 1 \leq a \leq b \leq n\}, & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

$$\dim[\mathrm{Lie}(O(V,\eta))] = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1), & \varepsilon = 1 \\ \frac{1}{2}n(n+1), & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Die Lie-Klammern der Basis sind

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \varepsilon\, \eta_{ac} M_{bd} - \varepsilon\, \eta_{bd} M_{ac}$$

$$= \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ca} M_{bd} - \eta_{db} M_{ac}$$

Für die inhomogene Gruppe $V \rtimes O(V,\eta)$ kommen noch 4 Translationen hinzu:

$$P_a := e_a$$

mit

$$[(P_a, M_{bc}), (P_k, M_{\ell m})]$$

$$= \left(M_{bc}(P_k) - M_{\ell m}(P_a), [M_{bc}, M_{\ell m}]\right)$$

$$= \big( \eta_{ck} P_b - \varepsilon \eta_{bk} P_c - \eta_{ma} P_\ell + \varepsilon \eta_{\ell a} P_m ,$$

$$\eta_{bm} M_{c\ell} + \eta_{c\ell} M_{bm} - \varepsilon \eta_{b\ell} M_{cm} - \varepsilon \eta_{cm} M_{b\ell} \big)$$

Identifiziert man $P_a$ mit $(P_a, 0)$ und $M_{ab}$ mit $(0, M_{ab})$ in $\mathrm{Lie}(V \rtimes O(V,\eta))$, dann

$$[P_a, P_b] = 0$$

$$[M_{ab}, P_c] = M_{ab}(P_c) = \eta_{bc} P_a - \varepsilon \eta_{ac} P_b$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad}$$

$$- \varepsilon \eta_{ac} M_{bd} - \varepsilon \eta_{bd} M_{ac}$$

Spezialisieren wir wieder auf den Fall der Lorentzgruppe d.h. $V =$ 4-dim reeller VR, $\eta \in V^* \vee V^*$ mit Signatur $(+,-,-,-)$, mit Basis $\{e_\mu \mid \mu = 0,\ldots,3\}$ so dass

$$\eta(e_\mu, e_\nu) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

und $\{\theta^\mu \mid \mu = 0,\ldots,3\}$ dual zu $\{e_\mu\}$

$$\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$$

sowie

$$\eta\downarrow(e_\mu) = \theta_\mu = \eta_{\mu\nu}\theta^\nu$$

d.h. $\quad \theta_\mu = (\theta^0, -\theta^1, -\theta^2, -\theta^3)$

mit $\quad \theta_\mu(e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$.

Dann

$$\left.\begin{aligned} \dot{B}_a &= - M_{0a} \\ \dot{R}_a &= \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_a{}^{nm}\, M_{nm} \end{aligned}\right\}(*)$$

bzw $\quad M_{nm} = \varepsilon_{nm}{}^a\,\dot{R}_a$

(Indizes an $\varepsilon$ mit $\delta^{nm}$ verschoben!)

In der Tat ist nach den $[\cdot,\cdot]$ - Formeln auf S. 3.55:

$$[\dot{R}_a, \dot{R}_b] = \varepsilon_a{}^{nm} \varepsilon_b{}^{kl} \frac{1}{4} [M_{nm}, M_{kl}]$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_a{}^{nm} \varepsilon_b{}^{kl} ( \eta_{nl} M_{mk} + \eta_{mk} M_{nl}$$

$$- \eta_{nk} M_{ml} - \eta_{ml} M_{nk})$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_a{}^{nm} \varepsilon_b{}^{kl} ( \delta_{nk} M_{ml} + \delta_{ml} M_{nk}$$

$$- \delta_{nl} M_{mk} - \delta_{mk} M_{nl})$$

$$= \frac{1}{4} ( M_{ab} + M_{ab} + M_{ab} + M_{ab}) = M_{ab}$$

$$= \varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{R}_n$$

$$[\dot{R}_a, \dot{B}_b] = -\frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{nm} [M_{nm}, M_{0b}]$$

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{nm} (\eta_{nb} M_{m0} - \eta_{mb} M_{n0})$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_a{}^{nm} ( \delta_{nb} \dot{B}_m - \delta_{mb} \dot{B}_n)$$

$$= \varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{B}_n$$

$$[\dot{B}_a, \dot{B}_b] = [M_{0a}, M_{0b}]$$

$$= -\eta_{00} M_{ab}$$

$$= -\varepsilon_{ab}{}^{n} \dot{R}_n$$

Die Identifikation (*):

$$M_{0a} = -\dot{B}_a$$

$$M_{ab} = \varepsilon_{ab}{}^{c} \dot{R}_c$$

führt also genau zu den früher (S. B.18) angegeben Relationen.