Etwas über Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})$.

Def. (Wiederholung). Eine lineare Darstellung der Gruppe G ist ein Homomorphismus

$$\rho : G \to GL(V)$$

Sie heißt komplex / reell falls V Vektorraum über $\mathbb{C}$ / $\mathbb{R}$. $V' \subseteq V$ heißt invarianter Teilraum falls $\rho(g)(V') \subseteq V'$ $\forall g \in G$. V' heißt nicht trivial falls $V' \neq V$ und $V' \neq \{0\}$.

Def. (ρ, V) heißt reduzibel falls V einen nicht-trivialen invarianten Teilraum enthält. Andernfalls heißt (ρ, V) irreduzibel

Def. Ist (ρ, V) reduzibel und existiert zu jedem invarianten Teilraum $V' \subset V$ ein invarianter Komplementärraum $V'' \subset V$, so dass also $V = V' \oplus V''$ und V' bzw V'' invariant sind, so heißt (ρ, V) voll reduzibel oder zerfällbar

Bemerkung: Reduzibilität bedingt nicht automatisch Zerfällbarkeit. Als Beispiel sei $G = (\mathbb{R}, +)$ mit der 2-dim Darstellung

$$\rho : \mathbb{R} \ni a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^2)$$

angeführt. Ein invarianter Teilraum ist

$$V' = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

da $\quad \rho(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gäbe es einen invarianten Komplementärraum V'', so dass $V' = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right\}$, so wäre $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ ein von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängiger Eigenvektor zum Eigenwert 1 für alle $\rho(a)$, denn $\det(\rho(a) - \lambda E_2) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$. Das ist aber unmöglich, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + aq \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow q = 0 \quad \text{für } a \neq 0.$$

Mit anderen Worten: $\rho(a)$ ist nicht diagonalisierbar für $a \neq 0$.

Proposition: Ist $\omega: V \times V \to \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) nicht ausgeartete Bilinearform oder semi-Hermite'sche Form falls $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (d.h. $\omega(v,w) = \overline{\omega(w,v)}$ und $\omega(v,w) = 0 \ \forall w \in V \Leftrightarrow v = 0$, aber nicht notwendig $\omega(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$) und sei ϱ isometrische (d.h. ω erhaltende) Darstellung, d.h. $\forall v,w \in V$ gilt

$$\omega(\varrho(g)(v), \varrho(g)(w)) = \omega(v,w),$$

und sei $V' \subset V$ invariant, dann ist auch $(V')^\perp = \{v \in V \mid \omega(v,v') = 0 \ \forall v' \in V'\}$ invariant.

Beweis: Ist $v \in (V')^\perp$, d.h. $\omega(v,v') = 0$ $\forall v' \in V'$, dann gilt für $v' \in V'$

$$\omega(\varrho(g)v, v') = \omega(v, \underbrace{\varrho(g^{-1})v'}_{\in V'}) = 0$$

für alle $g \in G$. $\square$

Ist $(V')^\perp \cap V' = \{0\}$ so folgt daraus die Zerfällbarkeit. Dies ist sicher dann der Fall, wenn ω pos. def. ist, d.h. bei einem Euklidischen Produkt in einem reellen oder einem Hermite'schen Produkt in komplexen Vektorraum.

Korollar: Für orthogonale (im engeren Sinn) oder unitäre Darstellungen sind Reduzibilität und Zerfällbarkeit äquivalent.

Darüberhinaus gibt es rein gruppentheoretische Eigenschaften von Gruppen, die diese Äquivalenz für alle Darstellungen garantieren

Satz: Für halbeinfache Gruppen sind alle reduziblen Darstellungen auch voll reduzibel = zerfällbar.

Beweis: Gehört in die Theorie der Gruppenkohomologie; können wir hier nicht geben.

Für kompakte Gruppen kann eine Darstellung durch Wahl (→ Konstruktion) immer unitär (orthogonal im reellen Fall) gemacht werden.

Beweis: Sei $(\cdot | \cdot)$ ein Hermite'sches Inneres Produkt auf V und $\rho : G \to GL(V)$ Darstellung. Wir definieren ein neues Hermite'sches Inneres Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ durch

$$\langle v | w \rangle := \int_G d\mu(h) \; (\rho(h)v \,|\, \rho(h)w)$$

Dabei ist $d\mu(g)$ ein rechtsinvariantes Maß auf G, d.h. invariant unter

$$R_g : G \to G, \quad h \longmapsto R_g(h) = h \cdot g$$

Es ist

$$\langle \rho(g)v \,|\, \rho(g)w \rangle$$

$$= \int_G d\mu(h) \; (\rho(h)\rho(g)v \,|\, \rho(h)\rho(g)w)$$

$$= \int_G d\mu(h) \; (\rho(\underbrace{h \cdot g}_{k})v \,|\, \rho(hg)w)$$

$$= \int_G d\mu \circ R_{g^{-1}}(k) \; (\rho(k)v \,|\, \rho(k)w)$$

$$= \int_G d\mu(k) \; (\rho(k)v \,|\, \rho(k)w)$$

$$= \langle v | w \rangle$$

Proposition: Für kompakte Gruppen impliziert Reduzibilität Zerfällbarkeit. [Beachte: Kompakte Gruppen müssen nicht halbeinfach sein; Beispiel $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ ist Abel'sch aber kompakt.]

Def. Seien (G, ρ_1, V_1) und (G, ρ_2, V_2) zwei Darstellungen von G. Eine lineare Abb. $f: V_1 \to V_2$ heißt „Intertwiner" falls

$$f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$$

Ist f ein Isomorphismus, dann heißt er eine Äquivalenz der beiden Darstellungen.

Lemma: Ist f „Intertwiner" zwischen (G, ρ_1, V_1) und (G, ρ_2, V_2). Dann sind $\mathrm{Kern}(f) \subseteq V_1$ und $\mathrm{Bild}(f) \subseteq V_2$ invariante Unterräume

Beweis: $v \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(\rho_1(v)) = \rho_2(f(v)) = 0 \Rightarrow \rho_1(v) \in \mathrm{Ker}(f)$.
$w = f(v) \Rightarrow \rho_2(g)(w) = \rho_2(g) f(v) = f(\rho_1(g)(v)) \Rightarrow \rho_2(g)(w) \in \mathrm{Bild}(f)$ □.

Lemma: Ist f „interturner" zwischen (G, ρ_1, V_1) und (G, ρ_2, V_2). Dann gilt

1.) (G, ρ_1, V_1) ist irreduzibel $\Rightarrow$
f ist entweder injektiv oder $\equiv 0$

2.) (G, ρ_2, V) ist irreduzibel $\Rightarrow$
f ist entweder surjektiv oder $\equiv 0$.

Beweis. Das vorhergehende Lemma impliziert (G, ρ_1, V_1) irreduzibel $\Rightarrow$ Kern(f) ist entweder $\{0\}$ (d.h. f ist inj.) oder V_1 (d.h. $f \equiv 0$). Genauso impliziert es: (G, ρ_2, V_2) irreduzibel $\Rightarrow$ Bild(f) ist entweder V_2 (d.h. f ist surj.) oder Bild$(f) = \{0\}$ (d.h $f \equiv 0$). $\square$

Lemma (Schur'sches Lemma):
Seien (G, ρ_1, V_1) und (G, ρ_2, V_2) irreduzibel und $f: V_1 \to V_2$ ein „interturner". Dann

1. Teil: f ist entweder Isomorphismus oder $f \equiv 0$

2. Teil: Seien $V_1 = V_2 = V$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ und $f \not\equiv 0$. Hat f einen Eigenvektor $\neq 0$ dann $f = a\, \mathrm{id}|_V$, $a \neq 0$.

Beweis. Der 1. Teil folgt sofort aus dem vorhergehenden Lemma. Für den 2. Teil stellen wir fest, dass ein Eigenraum von f notwendig invariant ist: Sei $f(v) = av \Rightarrow f(D(g)v) = D(g)(f(v)) = \lambda D(g) v$. Irreduzibilität impliziert, dass der Eigenraum ganz V ist und somit $f = a\, id|_V$. □

Das Schur'sche Lemma hat insbesondere starke Konsequenzen für komplexe Vektorräume, in denen ja immer Eigenvektoren zu Intertwinern existieren. Oft wird es dann so ausgesprochen:

Sei (G, ρ, V) irreduzible Darstellung über dem komplexen VR V und $f: V \to V$ lineare Abb. mit

$$f \circ \rho(g) = \rho(g) \circ f$$

d.h. f vertauscht mit allen $\rho(g)$ $\forall g \in G$. Dann

$$f = a\, id|_V, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Korollar: Irreduzible Darstellungen Abel'scher Gruppen auf komplexen VR sind immer eindimensional

Beweis: Sei G Abel'sch und $h \in G$, $h \neq e$. Da $hg = gh$ $\forall g \in G$ gilt $\rho(h) \circ \rho(g) = \rho(hg) = \rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h)$. Nach dem Schur'schen Lemma $\rho(h) = a(h)\, id|_V$. Hier ist $a: G \to \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^\times$ eine Funktion mit $a(g)\, a(h) = a(gh)$. Also ist jeder Teilraum invariant. Irreduzibilität impliziert, dass $\dim(V) = 1$. $\square$

Bemerkung: Über den reellen Zahlen ist diese Aussage falsch. Beispielsweise ist die definierende Darstellung der $SO(2)$

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cdot 2\pi : \varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^2)$$

2-dimensional und irreduzibel, wobei $SO(2)$ Abel'sch.

Zusammenhang zwischen Darstellungen einer Lie-Gruppe und ihrer Lie-Algebra – Weyls „unitärer Trick".

Wir werden zeigen, dass bezüglich Darstellungen in komplexen VR folgende Äquivalenzen gelten

$$G \leftrightarrow \mathrm{Lie}(G) \leftrightarrow [\mathrm{Lie}(G)]^{\mathbb{C}}$$

Dabei ist mit $\{\cdot\}^{\mathbb{C}}$ folgendes gemeint:

Def. Sei V reeller VR; der reelle VR $\mathbb{C} \otimes V$ hat eine kanonische komplexe Struktur $J \in \mathrm{End}(\mathbb{C} \otimes V)$ mit $J \circ J = -\mathrm{id}|_{\mathbb{C}\otimes V}$, nämlich $J(z \otimes v) = iz \otimes v$ plus lineare Fortsetzung. Damit können wir $\mathbb{C} \otimes V$ zu einem komplexen VR machen durch die Fortsetzung

$$(a+ib) \cdot z \otimes v := (a + bJ)\, z \otimes v$$
$$= [(a+ib) \cdot z] \otimes v$$

plus $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung. Dieser komplexe VR heißt die Komplexifizierung von V und wird mit $V^{\mathbb{C}}$ bezeichnet. Es gilt: $\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}\otimes V)$.

Ist $L = (V, [\,,\,])$ reelle Lie-Algebra dann ist ihre Komplexifizierung

$$L^{\mathbb{C}} := (V^{\mathbb{C}}, [\,,\,]^{\mathbb{C}})$$

definiert durch

$$[z_1 \otimes X_1, z_2 \otimes X_2]^{\mathbb{C}} := z_1 z_2 \otimes [X_1, X_2]$$

und $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung auf ganz $V^{\mathbb{C}}$.

Achtung: Begrifflich ist $L^{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C} \otimes L$ zu unterscheiden, denn $L^{\mathbb{C}}$ ist Lie-Algebra über $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \otimes L$ über $\mathbb{R}$, mit $\dim_{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes L)$.

Den Prozess $L \to \mathbb{C} \otimes L$ haben wir bereits ausführlich in Aufgabe 3 von Blatt 2 diskutiert.

Für eine ausführlichere Diskussion der Begriffe von komplexen und reellen Strukturen auf reellen bzw. komplexen VR, siehe das Ergänzungs-Skript zur Vorlesung (→ Homepage).

Lemma: Seien (G, D_1, V_1) und (G, D_2, V_2) Darstellungen der Lie Gruppe G mit assoziierten Darstellungen $(\mathrm{Lie}(G), \dot{D}_1, V_1)$ und $(\mathrm{Lie}(G), \dot{D}_2, V_2)$ ihrer Lie-Algebra. Dann gilt

(i): Jeder D_1-invariante Unterraum ist auch $\dot{D}_1$-invariant

(ii): D_1 und D_2 sind äquivalent $\Rightarrow$ $\dot{D}_1$ und $\dot{D}_2$ sind äquivalent.

(iii): Ist G zusammenhängend dann gelten von (i) und (ii) auch die Umkehrungen.

Beweis.

(i) Sei $V_1' \subseteq V_1$ D_1-invariant $\Rightarrow$ $D_1(\exp(tX))V_1' \subseteq V_1'$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$ und $\forall t \in \mathbb{R}$ $d/dt|_{t=0}$ $\Rightarrow$ $\dot{D}_1(X)V_1' \subseteq V_1'$ $\forall X$.

(ii) Sei $f: V_1 \to V_2$ Äquivalenz, d.h. $D_2(g) = f \circ D_1(g) \circ f^{-1}$ $\forall g \in G$. Dann $f \circ D_1(\exp(tX)) \circ f^{-1} = D_2(\exp(tX))$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. $d/dt|_{t=0}$ $\Rightarrow$ $f \circ \dot{D}_1(X) \circ f^{-1} = \dot{D}_2(X)$ $\forall X$.

(iii) Umkehrung von (i): Sei $V_1' \subseteq V_1$ $\dot{D}_1$-invariant; dann folgt mit $\phi \circ \exp = \exp \circ \dot{\phi}$ (allg.) dass $D_1(\exp(X))V_1' = \exp(\dot{D}_1(X))V_1' \subseteq V_1$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$ also auch $D_1(\exp(X_1)\cdots\exp(X_n))V_1' \subseteq V_1$ $\forall X_1, \dots, X_n \in \mathrm{Lie}(G)$. Ist G zushgd., so folgt $D_1(g)V_1' \subseteq V_1$ $\forall g \in G$.

Umkehrung von (ii): Seien $\dot{D}_1$ und $\dot{D}_2$ äquivalent, d.h. $\dot{D}_2(X) = f \circ \dot{D}_1(X) \circ f^{-1}$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$; dann $D_2(\exp(X)) = \exp(\dot{D}_2(X)) = \exp(f \circ \dot{D}_1(X) \circ f^{-1}) = f \circ \exp(\dot{D}_1(X)) \circ f^{-1} = f \circ D_1(\exp(X)) \circ f^{-1}$ $\forall X \in G$. Also auch $D_2(\exp(X_1)\cdots\exp(X_n)) = f \circ D_1(\exp(X_1)\cdots\exp(X_n)) \circ f^{-1}$ $\forall X_1, \dots, X_n \in \mathrm{Lie}(G)$. Ist G zushgd. so folgt $D_2(g) = f \circ D_1(g) f^{-1}$ $\forall g \in G$.

Korollar: Sei G zusammenhängende Lie Gruppe. Dann gilt

(i): Eine Darstellung (G, D, V) ist reduzibel oder zerfällbar genau dann, wenn das entsprechende für $(\mathrm{Lie}(G), \dot{D}, V)$ zutrifft.

(ii) : Zwei Darstellungen (G, D_1, V_1) und (G, D_2, V_2) sind äquivalent genau dann, wenn $(\mathrm{Lie}(G), \dot{D}_1, V_1)$ und $(\mathrm{Lie}(G), \dot{D}_2, V_2)$ es sind.

Beweis: Folgt sofort aus der vorhergehenden Proposition.

Seien $\mathrm{Rep}(G, V)$ und $\mathrm{Rep}(\mathrm{Lie}(G), V)$ die Mengen der Darstellungen von G bzw $\mathrm{Lie}(G)$ auf dem Vektorraum V. Dann existiert Abbildung

$$\Delta : \mathrm{Rep}(G, V) \to \mathrm{Rep}(\mathrm{Lie}(G), V)$$
$$D \longmapsto \Delta(D) := \dot{D}$$

Proposition. Die Abbildung Δ ist
(i) injektiv falls G zusammenhängt
(ii) surjektiv falls G einfach-zusammenhängt.

Beweis. Sei $\dot{D}_1 = \dot{D}_2$; dann $D_1(\exp(X)) = \exp(\dot{D}_1(X)) = \exp(\dot{D}_2(X)) = D_2(\exp(X))$ $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$, also $D_1(\exp(X_1) \cdots \exp(X_n)) = D_2(\exp(X_1) \cdots \exp(X_n)) \Rightarrow D_1 = D_2$ falls G zusammenhängt.

Wie in der Proposition auf S. 2.34 bereits bemerkt (aber auch dort nicht bewiesen), existiert zu Lie-Homomorphismus $f: \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G')$ ein Gruppen-homomorphismus $\phi: G \to G'$ falls G einfach zusammenhängend ist.
Daraus folgt sofort die Surjektivität. $\square$.

Bemerkung. Aus (ii) der Proposition S. (4.14) folgt, dass Δ zu einer Abbildung $\bar{\Delta}$ der Äquivalenzklassen von Darstellungen projeziert

$$\pi_G : \mathrm{Rep}(G, V) \to [\mathrm{Rep}(G, V)]$$

$$\pi_{\mathrm{Lie}(G)} : \mathrm{Rep}(\mathrm{Lie}(G), V) \to [\mathrm{Rep}(\mathrm{Lie}(G), V)]$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}(G, V) & \xrightarrow{\Delta} & \mathrm{Rep}(\mathrm{Lie}(G), V) \\ \pi_G \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathrm{Lie}(G)} \\ [\mathrm{Rep}(G, V)] & \xrightarrow[\bar{\Delta}]{} & [\mathrm{Rep}(\mathrm{Lie}(V), V)] \end{array}$$

Dann gilt alternativ zu Prop. auf S. 4.14

Proposition. Sei G zusammenhängend, dann ist $\bar{\Delta}$ injektiv. $\bar{\Delta}$ ist eine Bijektion falls G einfach zusammenhängt.

Sei L eine reelle Lie-Algebra, V ein komplexer Vektorraum und

$$\rho : L \to \mathrm{End}(V)$$

eine Darstellung, d.h. ρ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit

$$\rho([X,Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y)\,\rho(X).$$

Da V komplex ist, erhalten wir gleichzeitig auch eine Darstellung

$$\rho_{\mathbb{C}} : L^{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(V)$$

indem wir setzen

$$\rho_{\mathbb{C}}(z \otimes X) := z\,\rho(X)$$

Beachte: ρ ist $\mathbb{R}$-linear also auch $\rho_{\mathbb{C}}$.

Klarerweise gilt $\rho_{\mathbb{C}}|_L = \rho$. Umgekehrt, ist $\rho : L^{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(V)$ eine ($\mathbb{C}$-lineare) Darstellung, dann $(\rho|_L)_{\mathbb{C}} = \rho$, denn $(\rho|_L)_{\mathbb{C}}(z \otimes X) = z \cdot (\rho|_L(X)) = z\,\rho(1 \otimes X)$ $= \rho(z \otimes X)$; weil $\mathbb{C}$-Linearität folgt Beh.

Definition. Sei L eine reelle Lie-Algebra und V ein komplexer Vektorraum. Dann ist $\mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(L,V)$ die Menge der $\mathbb{R}$-linearen Darstellungen. Ist L komplex, dann ist $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(L,V)$ die Menge der $\mathbb{C}$-linearen Darstellungen. Das heißt, die Abbildungen $\rho : L \to \mathrm{End}(V)$ sind $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-linear.

Wir betrachten die Abbildungen

$$\Gamma : \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(L,V) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}},V);\ \rho \mapsto \rho_{\mathbb{C}}$$

$$\Gamma^{-1} : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}},V) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(L,V);\ \rho \mapsto \rho|_L$$

Dass Γ^{-1} in der Tat invers zu Γ ist folgt aus obiger Diskussion

Es folgt nun, dass Darstellungen, die durch Γ bzw Γ^{-1} in Beziehung stehen die gleichen Reduzibilitäts- und Äquivalenz-Eigenschaften haben.

Proposition. Sei $\rho \in Rep_{\mathbb{R}}(L, V)$ und $\rho_{\mathbb{C}} \in Rep_{\mathbb{C}}(L^{\mathbb{C}}, V)$ mit $\rho_{\mathbb{C}} = \Gamma(\rho)$ wie oben beschrieben. Dann gilt

(i): Γ ist Bijektion mit Inverser Γ^{-1}

(ii): $V' \subseteq V$ ist invariant unter ρ genau dann wenn es invariant unter $\rho_{\mathbb{C}}$ ist.

(iii): ρ ist (voll) reduzibel genau dann wenn $\rho_{\mathbb{C}}$ voll reduzibel ist.

(iv): ρ_1 und ρ_2 sind äquivalent genau dann wenn $(\rho_1)_{\mathbb{C}}$ und $(\rho_2)_{\mathbb{C}}$ äquivalent sind.

Beweis: (i) haben wir bereits gezeigt.

(ii): Ist $V' \subseteq V$ $\mathbb{C}$-linearer, (ρ, L)-invarianter Unterraum. Dann gilt für jedes $v \in V'$ und alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $X \in L$, dass $\rho_{\mathbb{C}}(z \otimes L)(v) = z\rho(X)(v) = \rho(X)(zv) \in V'$. Also ist V' auch $(\rho_{\mathbb{C}}, L^{\mathbb{C}})$-invariant. Umgekehrt, sei $V' \subseteq V$ ein $\mathbb{C}$-linearer, $(\rho_{\mathbb{C}}, L^{\mathbb{C}})$-invarianter Unterraum, dann ist er trivialerweise auch

(ρ, L)-invariant, da für jedes $v \in V'$ gilt $\rho(X)(v) = \rho_{\mathbb{C}}(1 \otimes X)(v) \in V'$ $\forall X \in L$.

(iii): Folgt aus (ii)

(iv): Seien ρ_1 und ρ_2 äquivalent.
Da V komplexer VR heißt das, es existiert eine $\mathbb{C}$-lineare Bijektion $f: V \to V$ mit $\rho_2(X) = f \circ \rho_1(X) \circ f^{-1}$.
Dann haben wir für alle $z \in \mathbb{C}$ und $X \in L$ $(\rho_2)_{\mathbb{C}}(z \otimes X) = z\, \rho_2(X)$
$= z\,(f \circ \rho_1(X) \circ f^{-1}) = f \circ (z\, \rho_1(X)) \circ f^{-1}$
$= f \circ (\rho_1)_{\mathbb{C}}(z \otimes X) \circ f^{-1}$. $\mathbb{C}$-Linearität von $(\rho_1)_{\mathbb{C}}$ und $(\rho_2)_{\mathbb{C}}$ impliziert $(\rho_2)_{\mathbb{C}} = f \circ (\rho_1)_{\mathbb{C}} \circ f^{-1}$.
Sind umgekehrt $(\rho_1)_{\mathbb{C}}$ und $(\rho_1)_{\mathbb{C}}$ äquivalent, d.h. $(\rho_2)_{\mathbb{C}}(z \otimes X) = f \circ (\rho_1)_{\mathbb{C}}(z \otimes X) \circ f^{-1}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ und $X \in L$, dann insbesondere
$\rho_2(X) = (\rho_2)_{\mathbb{C}}(1 \otimes X) = f \circ (\rho_1)_{\mathbb{C}}(1 \otimes X) \circ f^{-1} = f \circ \rho_1(X) \circ f^{-1}$ $\forall X \in L$.

Als Korollar formulieren wir den Zentralen

Satz: Seien die reellen Lie-Algebren L_1 und L_2 reelle Formen der komplexen Lie-Algebra L, d.h. gilt

$$L_1^{\mathbb{C}} = L_2^{\mathbb{C}} = L$$

Sei ferner V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum. Dann existiert eine Bijektion

$$\beta : \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(L_1, V) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(L_2, V),$$

so dass für $\varrho_1, \varrho' \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(L_1, V)$ gilt

(i): $V' \subseteq V_1$ ist ϱ_1-invariant $\Longleftrightarrow$
 " ist $\varrho_2 := \beta(\varrho_1)$-invariant

(ii): ϱ_1 und ϱ_1' sind äquivalent $\Longleftrightarrow$
$\varrho_2 = \beta(\varrho_1)$ und $\varrho_2' = \beta(\varrho_2)$ sind äquivalent.

Ist G zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so haben wir also die folgenden Äquivalenzen

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G,V) \arrow[rr, "\Gamma\circ\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}((\mathrm{Lie}\,G)^{\mathbb{C}},V) \\
& \mathrm{Rep}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Lie}(G),V) \arrow[ur, "\Gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

Satz: Seien G_1 und G_2 zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppen deren komplexifizierte Lie-Algebren isomorph sind:

$$[\mathrm{Lie}(G_1)]^{\mathbb{C}} \cong [\mathrm{Lie}(G_2)]^{\mathbb{C}}$$

Sei ferner V endlich dimensionaler komplexer Vektorraum. Dann existiert Bijektion

$$B : \mathrm{Rep}(G_1,V) \to \mathrm{Rep}(G_2,V)$$

so dass für $D_1, D_1' \in \mathrm{Rep}(G_1,V)$

(i): $V' \subseteq V$ ist D_1-invariant $\Leftrightarrow$ V' ist $D_2 = B(D_1)$ - invariant

(ii): D_1 und D_1' sind äquivalent $\Leftrightarrow$
$D_2 := B(D_1)$ und $D_2' := B(D_1')$ sind äquivalent.

Die vorherige Diskussion wollen wir auf die Lorentzgruppe bzw. ihre Lie-Algebra anwenden. Der Punkt ist, dass $Lie(SL(2,\mathbb{C})) \cong \mathbb{C} \otimes Lie(SU(2))$. Das heißt $Lie(SL(2,\mathbb{C}))$ hat eine komplexe Struktur.

Wir wiederholen —

Def. Eine komplexe Struktur auf einer reellen Lie-Algebra $L = (V, [\cdot,\cdot])$ ist eine (reell-) lineare Abbildung

$$J : V \to V \quad \text{mit} \quad J \circ J = -\mathrm{id}_V$$

$$\text{und} \quad J([X,Y]) = [J(X), Y] = [X, J(Y)] \qquad (*)$$

Also eine komplexe Struktur auf V die (*) genügt.

Def. Eine reelle Struktur auf einer komplexen Lie-Algebra $L = (V, [\cdot,\cdot])$ ist eine antilineare Involution, d.h. antilineare Abbildung

$$C : V \to V \quad \text{mit} \quad C \circ C = \mathrm{id}_V$$

$$\text{mit} \quad C[X,Y] = [C(X), C(Y)] \qquad (**)$$

Also eine reelle Struktur auf V die (**) genügt.

— Ende der Wiederholung

Die für uns entscheidende Aussage ist nun, daß die Komplexifizierung $L^{\mathbb{C}}$ einer reellen Lie-Algebra mit komplexer Struktur

$$J : L \to L \,,\; J \circ J = -id|_L$$

in eine direkte Summe zweier Ideale zerfällt.

Proposition: Sei L reelle Lie-Algebra mit komplexer Struktur J und

$$L_{\mathbb{C}} := \{L \mid (a+ib)X := aX + bJ(X)\}$$

die zugehörige komplexe Lie-Algebra
[Beachte: $\dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}(L)$.]

Dann gilt

$$L^{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{C}} \oplus \overline{L}_{\mathbb{C}}$$

wobei $\overline{L}_{\mathbb{C}}$ die zu $L_{\mathbb{C}}$ komplex konjugierte Lie-Algebra ist, d.h. $\mathbb{C}$ wirkt auf $\overline{L}_{\mathbb{C}}$ mit k.K.

Wir erinnern daran, daß $L^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \otimes L)_{\mathbb{C}}$, wobei die komplexe Struktur $J_2 := \mathbb{C} \otimes L \to \mathbb{C} \otimes L$ gegeben ist durch $J_2(z \otimes X) = iz \otimes X$ $\forall z \in \mathbb{C}, X \in L$ und $\mathbb{R}$-linearer Fortsetzung.

Beweis. Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $J: L \to L$ setzt sich zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $J_1: L^{\mathbb{C}} \to L^{\mathbb{C}}$ fort durch

$$J_1(z \otimes X) := z \otimes J(X)$$

und $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung auf $\mathbb{C} \otimes L$.
Da J komplexe Struktur von L gilt

$$J([X,Y]) = [J(X),Y] = [X,J(Y)]$$

in L. Also in $\mathbb{C} \otimes L$

$$J_1 [z \otimes X, w \otimes Y]$$

$$= J_1(zw \otimes [X,Y])$$

$$= zw \otimes J[X,Y]$$

$$= zw \otimes [J(X),Y] = zw \otimes [X, J(Y)]$$

$$= [J_1(z \otimes X), w \otimes Y]$$

$$= [z \otimes X, J_1(w \otimes Y)]$$

Also $J_1[X,Y] = [J_1(X),Y] = [X, J_1(Y)]$ in $L^{\mathbb{C}}$. Außerdem

$$J_1^2 = -\mathrm{id}_{L^{\mathbb{C}}}$$

Wir betrachten die $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $P_\pm : L^{\mathbb{C}} \to L^{\mathbb{C}}$

$$P_\pm = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{id}_{L^{\mathbb{C}}} \mp i J_1 \right)$$

Es gilt

$$P_+ + P_- = \mathrm{id}_{L^{\mathbb{C}}}$$

$$P_\pm^2 = P_\pm \,, \quad P_+ \circ P_- = P_- \circ P_+ = 0$$

und

$$P_\pm [X, Y] = [P_\pm X, Y] = [X, P_\pm Y]$$

Außerdem

$$J_1 \circ P_\pm = P_\pm \circ J_1 = \pm i \, P_\pm$$

Seien also $L^{\mathbb{C}}_\pm := P_\pm (L^{\mathbb{C}})$ die Eigenräume von J_1 zu den Eigenwerten $\pm i$ dann

$$L^{\mathbb{C}} = L^{\mathbb{C}}_+ \oplus L^{\mathbb{C}}_- .$$

Also $L^{\mathbb{C}}_+ \cong \underbrace{L_{\mathbb{C}}}_{J_1 = +i}$ und $L^{\mathbb{C}}_- \cong \underbrace{\overline{L_{\mathbb{C}}}}_{J_1 = -i}$ $\square$

Wenden wir dies auf $L = \mathbb{C} \otimes L'$ mit L' = reelle Lie-Algebra an, so dass

$$L_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \otimes L')_{\mathbb{C}} = (L')^{\mathbb{C}}$$

dann

$$(\mathbb{C} \otimes L')^{\mathbb{C}} \cong (L')^{\mathbb{C}} \oplus \overline{(L')^{\mathbb{C}}}$$

Insbesondere ist (Vgl. Blatt 2, Aufg. 3)

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Lor}) = \mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SU(2)).$$

Also

$$[\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C}))]^{\mathbb{C}} \cong [\mathrm{Lie}(SU(2))]^{\mathbb{C}} \oplus \overline{[\mathrm{Lie}(SU(2))]^{\mathbb{C}}}$$

Korollar: Die komplexifizierte Lie-Algebra der Lorentzgruppe ist isomorph der direkten Summe zweier komplexifizierter Lie-Algebren der $SU(2)$.
Beachte: Ohne das Wort „komplexifiziert" ist diese Aussage falsch:

$$\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C})) \not\cong \mathrm{Lie}(SU(2)) \oplus \mathrm{Lie}(SU(2))$$

Eine äquivalente Aussage in der Kategorie der reellen Lie-Algebren ist

$$\mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C})) \cong$$

$$\mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SU(2)) \oplus \mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(SU(2))$$

Allgemein

$$\mathbb{C} \otimes (\mathbb{C} \otimes L) \cong = \mathbb{C} \otimes L \oplus \mathbb{C} \otimes L$$

In der Tat: schreibt man

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= J \otimes id_{\mathbb{C}} \otimes id_L \\ J_2 &= id_{\mathbb{C}} \otimes J \otimes id_L \end{aligned}\right\} : \begin{aligned} &\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes L \to \\ &\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes L \end{aligned}$$

mit $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto J(z) = iz$ (Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) der komplexen Struktur im reellen VR $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, dann definieren wir $P_\pm \in \mathrm{End}(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes L)$ durch

$$P_\pm := \frac{1}{2}\left(id_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\otimes L} \pm J_1 J_2\right)$$

Da $J_1^2 = J_2^2 = -id_{\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\otimes L}$ und $J_1 \circ J_2 = J_2 \circ J_1$

gilt wieder

$$P_+ + P_- = \mathrm{id}_{C \otimes C \otimes L}$$

$$P_\pm^2 = P_\pm \circ P_\pm = P_\pm$$

$$P_+ \circ P_- = P_- \circ P_+ = 0$$

Außerdem ist

$$[z_1 \otimes z_2 \otimes X, w_1 \otimes w_2 \otimes Y]_{C \otimes C \otimes L}$$

$$= z_1 w_1 \otimes [z_2 \otimes X, w_2 \otimes Y]_{C \otimes L}$$

$$= z_1 w_1 \otimes z_2 w_2 \otimes [X, Y]_L$$

Also $J_1 [z_1 \otimes z_2 \otimes X, w_1 \otimes w_2 \otimes Y]$

$$= i z_1 w_1 \otimes z_2 w_2 \otimes [X, Y]$$

$$= [J_1 (z_1 \otimes z_2 \otimes X), w_1 \otimes w_2 \otimes Y]$$

$$= [z_1 \otimes z_2 \otimes X, J_1 (w_1 \otimes w_2 \otimes Y)]$$

u. analog mit J_2. Also

$$P_\pm [X, Y]_{C \otimes C \otimes L} = [P_\pm X, Y]_{C \otimes C \otimes L}$$

$$= [X, P_\pm Y]_{C \otimes C \otimes L}$$

Mit $P_\pm(\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\otimes L) = (\mathbb{C}\otimes L)_\pm$

folgt

$$\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\otimes L = (\mathbb{C}\otimes L)_+ \oplus (\mathbb{C}\otimes L)_-$$

Ist $\{e_a \mid a = 1, \dots, n\}$ Basis von L mit

$$[e_a, e_b]_L = C_{ab}^c e_c$$

dann ist

$$\{E_a^{(1,1)}, E_a^{(1,2)}, E_a^{(2,1)}, E_a^{(2,2)} \mid a = 1, \dots, n\}$$

Basis von $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\otimes L$ mit

$$E_a^{(1,1)} = 1\otimes 1\otimes e_a$$

$$E_a^{(1,2)} = 1\otimes i\otimes e_a$$

$$E_a^{(2,1)} = i\otimes 1\otimes e_a$$

$$E_a^{(2,2)} = i\otimes i\otimes e_a$$

Beachte: J_1 ist i-Multiplikation im 1. Tensorfaktor, J_2 ist i-Mult. im 2. Tensorfaktor

Also ist

$$P_\pm E_a^{(1,1)} = \frac{1}{2}\left(E_a^{(1,1)} \pm E_a^{(2,2)}\right)$$

$$P_\pm E_a^{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(E_a^{(1,2)} \mp E_a^{(2,1)}\right)$$

$$P_\pm E_a^{(2,1)} = \frac{1}{2}\left(E_a^{(2,1)} \mp E_a^{(1,2)}\right)$$

$$= \mp P_\pm E_a^{(1,2)}$$

$$P_\pm E_a^{(2,2)} = \frac{1}{2}\left(E_a^{(2,2)} \pm E_a^{(1,1)}\right)$$

$$= \pm P_\pm E_a^{(1,1)}$$

Also ist $\{E^{(\pm,1)}{}_a, E_a^{(\pm,2)} \mid a = 1, .., n\}$

Basis von $P_\pm(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes L)$, mit

$$E^{(\pm,1)}{}_a = P_\pm E_a^{(1,1)} = \frac{1}{2}\left(E_a^{(1,1)} \pm E_a^{(2,2)}\right)$$

$$E_a^{(\pm,2)} = P_\pm E_a^{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(E_a^{(1,2)} \mp E_a^{(2,1)}\right)$$

Die Lie-Klammern dieser Basis-Vektoren sind wie folgt

- $$[E_a^{(+,1)}, E_b^{(+,1)}] = \frac{1}{4}[E_a^{(1,1)} + E_a^{(2,2)}, E_b^{(1,1)} + E_b^{(2,2)}]$$
  $$= C_{ab}^c E_c^{(+,1)}$$

- $$\left[E^{(+,1)}_a, E^{(+,2)}_b\right] = \frac{1}{4}\left[E^{(1,1)}_a + E^{(2,2)}_a, E^{(1,2)}_b - E^{(2,1)}_b\right]$$

$$= \frac{1}{4} C^c_{ab}\left(E^{(1,2)}_c - E^{(2,1)}_c - E^{(2,1)}_c + E^{(1,2)}_c\right)$$

$$= C^c_{ab} E^{(+,2)}_c$$

- $$\left[E^{(+,2)}_a, E^{(+,2)}_b\right] = \frac{1}{4}\left[E^{(1,2)}_a - E^{(2,1)}_a, E^{(1,2)}_b - E^{(2,1)}_b\right]$$

$$= \frac{1}{4} C^c_{ab}\left(- E^{(1,1)}_c + E^{(2,2)}_c - E^{(2,2)}_c - E^{(1,1)}_c\right)$$

$$= - C^c_{ab} E^{(+,1)}_c$$

- $$\left[E^{(-,1)}_a, E^{(-,1)}_b\right] = \frac{1}{4}\left[E^{(1,1)}_a - E^{(2,2)}_a, E^{(1,1)}_b - E^{(2,2)}_b\right]$$

$$= \frac{1}{4} C^c_{ab}\left(E^{(1,1)}_c - E^{(2,2)}_c - E^{(2,2)}_c + E^{(1,1)}_c\right)$$

$$= C^c_{ab} E^{(-,1)}$$

- $$\left[E^{(-,1)}_a, E^{(-,2)}_b\right] = \frac{1}{4}\left[E^{(1,1)}_a - E^{(2,2)}_a, E^{(1,2)}_b + E^{(2,1)}_b\right]$$

$$= \frac{1}{4} C^c_{ab}\left(E^{(1,2)}_c + E^{(2,1)}_c + E^{(2,1)}_c + E^{(1,2)}_c\right)$$

$$= C^c_{ab} E^{(-,2}_c$$

- $$\left[E^{(-,2)}_a, E^{(-,2)}_b\right] = \frac{1}{4}\left[E^{(1,2)}_a + E^{(2,1)}_a, E^{(1,2)}_b + E^{(2,1)}_b\right]$$

$$= \frac{1}{4} C^c_{ab}\left(- E^{(1,1)}_c + E^{(2,2)}_c + E^{(2,2)}_c - E^{(1,1)}_c\right)$$

$$= - C^c_{ab} E^{(-,1)}_c$$

- $[E_a^{(+,1)}, E_b^{(-,1)}] = \frac{1}{4}[E_a^{(1,1)} + E_a^{(2,2)}, E_b^{(1,1)} - E_b^{(2,2)}]$

$= \frac{1}{4} C_{ab}^{c} (E_c^{(1,1)} - E_c^{(2,2)} + E_c^{(2,2)} - E_c^{(1,1)})$

$= 0$

- $[E_a^{(+,1)}, E_b^{(-,2)}] = \frac{1}{4}[E_a^{(1,1)} + E_a^{(2,2)}, E_b^{(1,2)} + E_b^{(2,1)}]$

$= \frac{1}{4} C_{ab}^{c} (E_c^{(1,2)} + E_c^{(2,1)} - E_c^{(2,1)} - E_c^{(1,2)})$

$= 0$

- $[E_a^{(+,2)}, E_b^{(-,1)}] = \frac{1}{4}[E_a^{(1,2)} - E_a^{(2,1)}, E_b^{(1,1)} - E_b^{(2,2)}]$

$= \frac{1}{4} C_{ab}^{c} (E_c^{(1,2)} + E_c^{(2,1)} - E_c^{(2,1)} - E_c^{(1,2)})$

$= 0$

- $[E_a^{(+,2)}, E^{(-,2)}] = \frac{1}{4}[E_a^{(1,2)} - E_a^{(2,1)}, E_b^{(1,2)} + E_b^{(2,1)}]$

$= \frac{1}{4} C_{ab}^{c} (-E_c^{(1,1)} + E_c^{(2,2)} - E_c^{(2,2)} + E_c^{(1,1)})$

$= 0.$

Damit ist explizit nachgerechnet, dass

$$B^{\pm} := \{ E^{(\pm,1)}_a, E^{(\pm,2)}_a \mid a = 1, \dots, n \}$$

jeweils die Lie-Relationen der kanonischen Basen von $\mathbb{C} \otimes L$ erfüllen, und dass die von B^+ mit denen von B^- verschwinden.

$$\Rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes L \cong \mathbb{C} \otimes L \oplus \mathbb{C} \otimes L .$$

Die Lie-Algebra der $SL(2,\mathbb{C})$ ist in der Rotation-Boost-Basis gegeben durch

$$[\dot{R}_a, \dot{R}_b] = \varepsilon_{ab}{}^c \dot{R}_c$$

$$[\dot{R}_a, \dot{B}_b] = \varepsilon_{ab}{}^c \dot{B}_c$$

$$[\dot{B}_a, \dot{B}_b] = -\varepsilon_{ab}{}^c \dot{R}_c$$

Dies ist eine 6-dimensionale reelle Lie-Algebra mit komplexer Struktur

$$J(\dot{R}_a) = \dot{B}_a, \quad J(\dot{B}_a) = -\dot{R}_a$$

[$\mathbb{R}$-linear fortgesetzt]

$J^2 = -\mathrm{id}$ ist klar. Außerdem

- $$J([\dot{R}_a, \dot{R}_b]) = \varepsilon_{ab}{}^c J(\dot{R}_c) = \varepsilon_{ab}{}^c \dot{B}_c$$
$$= [\dot{R}_a, \dot{B}_b] = [\dot{B}_a, \dot{R}_b]$$
$$= [\dot{R}_a, J(\dot{R}_b)] = [J(\dot{R}_a), \dot{R}_b]$$

- $$J([\dot{R}_a, \dot{B}_b]) = \varepsilon_{ab}{}^c J(\dot{B}_c) = -\varepsilon_{ab}{}^c \dot{R}_c$$
$$= [\dot{B}_a, \dot{B}_b] = -[\dot{R}_a, \dot{R}_b]$$
$$= [J(\dot{R}_a), \dot{B}_b] = [\dot{R}_a, J(\dot{B}_b)]$$

• $\gamma([\dot{B}_a, \dot{B}_b]) = -\varepsilon_{ab}{}^c B_c$

$= -[\dot{R}_a, \dot{B}_b]$

$= [\gamma(\dot{B}_a), \dot{B}_b] = [\dot{B}_a, \gamma(\dot{B}_b)]$.

In der Komplexifizierung

$[\mathrm{Lie}(Lor)]^{\mathbb{C}} = [\mathbb{C} \otimes \mathrm{Lie}(Lor)]_{\mathbb{C}}$

ist die Basis

$E^{(1,1)}_a = 1 \otimes R_a$, $E^{(1,2)}_a = 1 \otimes B_a$

$E^{(2,1)}_a = i \otimes R_a$, $E^{(2,2)}_a = i \otimes B_a$

Wir betrachten

$P_\pm : [\mathrm{Lie}(Lor)]^{\mathbb{C}} \to [\mathrm{Lie}(Lor)]^{\mathbb{C}}$

$P_\pm E^{(1,1)}_a = P_\pm(1 \otimes R_a) = \frac{1}{2}(1 \otimes R_a \pm i \otimes B_a)$

$P_\pm E^{(1,2)}_a = P_\pm(1 \otimes B_a) = \frac{1}{2}(1 \otimes B_a \mp i \otimes R_a)$

Über $\mathbb{R}$ sind diese linear unabhängig, über $\mathbb{C}$ ist $P_\pm E^{(1,2)}_a = \mp i P_\pm E^{(1,1)}_a$

Als komplexe Lie-Algebren sind die Basen von $P_\pm (\mathrm{Lie}(Lor))^{\mathbb{C}} = [\mathrm{Lie}(Lor)]^{\mathbb{C}}_\pm$

also gerade

$$B^{\pm} = \{ E^{\pm}_a \mid a = 1, \dots, n \}$$

$$E^{\pm}_a = \frac{1}{2} (1 \otimes R_a \pm i \otimes B_a)$$

Es gilt

- $$[E^+_a, E^+_b] = \frac{1}{4} [1 \otimes R_a + i \otimes B_a , 1 \otimes R_b + i \otimes B_b]$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}{}^c [1 \otimes R_c + i \otimes B_c + i \otimes B_c + 1 \otimes R_c]$$

$$= \varepsilon_{ab}{}^c E^+_c$$

- $$[E^-_a, E^-_b] = \frac{1}{4} [1 \otimes R_a - i \otimes B_a , 1 \otimes R_b - i \otimes B_b]$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}{}^c (1 \otimes R_c - i \otimes B_c - i \otimes B_c + 1 \otimes R_c)$$

$$= \varepsilon_{ab}{}^c E^-_c$$

- $$[E^+_a, E^-_b] = \frac{1}{4} [1 \otimes R_a + i \otimes B_a , 1 \otimes R_b - i \otimes B_b]$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_{ab}{}^c (1 \otimes R_c - i \otimes B_c + i \otimes B_c - 1 \otimes R_c)$$

$$= 0.$$

$$\rightarrow \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ E^{\pm}_a \mid a = 1,2,3 \} \cong [\mathrm{Lie}(SU(2))]^{\mathbb{C}}$$

Satz: Ist $G = G_1 \times G_2$, d.h.

$$G = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$$

und

$$(g_1, g_2)\cdot(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

$$(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$$

$$e_{G_1\times G_2} = (e_1, e_2)$$

und haben G_1 und G_2 die Eigenschaft, dass reduzible Darstellungen vollreduzibel sind (also etwa $G_{1,2}$ halbeinfach oder kompakt), dann hat auch $G_1 \times G_2$ diese Eigenschaft und die irreduziblen Darstellungen von $G_1 \times G_2$ sind gerade die Tensorprodukte der irreduziblen Darstellungen von G_1 mit denen von G_2.
Sind also (ρ_1, G_1, V_1) und (ρ_2, G_2, V_2) irreduzible Darstellungen von G_1 und G_2, mit $\rho_{1,2} \in \mathrm{Hom}(G_{1,2}, GL(V_{1,2}))$, dann ist $(\rho_1 \otimes \rho_2, G_1 \times G_2, V_1 \otimes V_2)$ eine irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$, mit $\rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathrm{Hom}(G_1 \times G_2, GL(V_1 \otimes V_2))$ gegeben durch

$$\rho_1 \otimes \rho_2 (g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2).$$

Alle irreduziblen Darstellungen von $G_1 \times G_2$ sind von dieser Form. $\square$

Wiederholung: Die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$.

Da $SU(2) \underset{top}{\cong} S^3$ ist $SU(2)$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend. Also ist die Darstellungstheorie von $SU(2)$ äquivalent zu der von $[Lie(SU(2))]^{\mathbb{C}}$. Außerdem können wir wegen der Kompaktheit von $SU(2)$ uns auf unitäre Darstellungen einschränken.

Sei also $(\rho, SU(2), V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ unitäre Darstellung von $SU(2)$ im komplexen Vektorraum V mit Hermite'schen inneren Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Sei $\{ e_a | a = 1,2,3 \}$ Basis von $Lie(SU(2))$ mit

$$[e_a, e_b] = \varepsilon_{ab}{}^{c} e_c$$

Dann sind $\dot{\rho}(e_a)$ anti-Hermite'sch in $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ bzw

$$J_a := i \, \dot{\rho}(e_a)$$

Hermite'sch in $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$: $J_a^+ = J_a$

Wegen

$$\dot{\varrho}([e_a, e_b]) = \varrho(e_a)\circ\varrho(e_b) - \varrho(e_b)\circ\varrho(e_a)$$

$$\varepsilon_{ab}{}^c\,\dot{\varrho}(e_c) = [\varrho(e_a), \varrho(e_b)]_{End(V)}$$

$$-i\,\varepsilon_{ab}{}^c\, J_c = (-i)^2\,[J_a, J_b]$$

$$\Rightarrow [J_a, J_b] = i\,\varepsilon_{ab}{}^c\, J_c$$

Sei $J_\pm := J_1 \pm i J_2$

Dann

$$\operatorname{Span}\{J_1, J_2, J_3\} = \operatorname{Span}\{J_+, J_-, J_3\}$$

mit

$$[J_+, J_-] = [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2]$$
$$= -i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] = 2J_3$$

$$[J_\pm, J_3] = [J_1 \pm iJ_2, J_3]$$
$$= -iJ_2 \pm i\,i\,J_1 = \mp J_1 - iJ_2$$
$$= \mp J_\pm$$

Also

$$[J_+, J_-] = 2 J_3$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$$

In End(V) betrachten wir

$$J^2 = \sum_{a=1}^{3} J_a \circ J_a = \vec{J}^2$$

Wegen

$$J_+ J_- = (J_1 + i J_2)(J_1 - i J_2)$$
$$= J_1^2 + J_2^2 - i [J_1, J_2]$$
$$= J_1^2 + J_2^2 + J_3$$

ist

$$J^2 = J_+ J_- - J_3 + J_3^2$$
$$= J_- J_+ + J_3 + J_3^2$$
$$= J_\pm J_\mp \mp J_3 + J_3^2$$

Es gilt in End(V)

$$[J_a, J^2] = J_a J^2 - J^2 J_a$$
$$= \sum_{b=1}^{3} (J_a \circ J_b^2 - J_b^2 \circ J_a)$$
$$= \sum_{b=1}^{3} ([J_a, J_b] J_b + J_b [J_a, J_b])$$

$$= \sum_{b=1}^{3} i\, \varepsilon_{ab}{}^{c} J_c J_b + J_b\, i\, \varepsilon_{ab}{}^{c} J_c$$

$$= i\, \varepsilon_a{}^{bc} (J_b J_c + J_c J_b) = 0$$

$\Rightarrow$ J^2 vertauscht mit allen Darstellungs-operatoren J_a und damit auch mit allen $\rho(g)$ $\forall g \in SU(2)$. Nach dem Schur'schen Lemma ist J^2 ein Vielfaches des Einheitsoperators falls ρ irreduzibel ist.

$$J^2 = \lambda\, \mathrm{id}|_V$$

$$\langle v, J^2 v \rangle = \sum_{a=1}^{3} \langle v, J_a J_a v \rangle = \lambda \|v\|^2$$

$$= \sum_{a=1}^{3} \langle J_a v, J_a v \rangle = \sum_{a=1}^{3} \|J_a v\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \geq 0$$

mit $\lambda = 0 \Leftrightarrow \|J_a v\| = 0 \quad \forall v \in V$,

d.h. falls $J_a = 0$ $\forall a$, $\Leftrightarrow$ ρ trivial.

Da $J_3 = J_3^+$ existiert in $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.

Sei zunächst X_m irgendein Eigenvektor:

$$J_3 X_m = m X_m \qquad \|X_m\| = 1$$

dann

$$J_3 J_\pm X_m = (m \pm 1) J_\pm X_m$$

Anwenden von $J_\pm$ auf X_m erhöht / erniedrigt also den Eigenwert um eine Einheit. Es ist

$$\langle J_\pm X_m | J_\pm X_m \rangle =$$

$$\langle X_m | J_\mp J_\pm X_m \rangle =$$

$$\langle X_m | (J^2 \mp J_3 - J_3^2) X_m \rangle$$

Falls $X_m \in$ irreduzibler Unterraum also

$$\langle J_\pm X_m | J_\pm X_m \rangle = \lambda \mp m - m^2$$

Es gibt jeweils zwei Möglichkeiten für $J_\pm X_m$: Entweder $J_\pm X_m$ ist der Nullvektor oder $J_\pm X_m$ ist ebenfalls Eigenvektor von J_3 zum Eigenwert $m \pm 1$.

Da die Darstellung endlichdimensional sein soll, existiert ein größter und ein kleinster Eigenwert von J_3.
Ist $j = m_{max}$ der größte, dann

$$J_+ X_j = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda - j - j^2 = 0$$

$$\text{bzw} \quad \lambda = j(j+1)$$

Durch wiederholtes Anwenden von J_- auf X_j erhält man Eigenvektoren (nicht normiert) zu kleineren Eigenwerten, so dass nach $(N-1)$ maliger Anwendung von J_- der kleinste J_3-Eigenwert $j' = m_{min}$ erreicht wird und nach N-maliger Anwendung der Nullvektor:

$$J_3 J_-^{(N-1)} X_j = j' J_-^{(N-1)} X_j$$

$$J_- J_-^{(N-1)} X_j = 0$$

Also $\quad j(j+1) = \lambda = j'(j'-1)$

mit $\quad N-1 = j - j'$ $\quad$ Ex.

$$j(j+1) = j'(j'-1) \quad \Longleftrightarrow$$

$$j^2 + j - j'^2 + j' = 0 \Longleftrightarrow (j+j')(j-j'+1) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad j' = -j$ oder $j' = j+1$

da wir aber vom größten Eigenwert $j = m_{max}$ ausgingen muss $j' < j$ sein also

$$j' = -j$$

Mit $j - j' = N-1$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

ist $2j = N-1$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2}(N-1)$$

Mögliche Werte von j sind also

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}, \ldots$$

j nennt man das „Gewicht" der Darstellung.

Ausgehend von X_j mit $\|X_j\| = 1$ und

$$J_3 X_j = j X_j,$$

$$J_+ X_j = 0 \quad \Rightarrow \lambda = j(j+1)$$

konstruiert man nun sukzessive (bel. Phase)

$$X_{m-1} := J_- X_m \,/\, \|J_- X_m\|,$$

mit $\|J_- X_m\| = j(j+1) - m(m-1)$, Ex.

dann erhält man in $2j$ Schritten zusammen mit X_j die $2j+1$ Vektoren

$$X_j, X_{j-1}, \dots, X_{-j+1}, X_{-j}.$$

Ihre lineare Hülle $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{X_j, \dots, X_{-j}\}$ spannt einen unter $SU(2)$ invarianten $(2j+1)$-dimensionalen Teilraum $V_j \subset V$ auf. Dass dieser Raum unter J_3 und J_- invariant ist, ist klar, denn

$$J_3 X_m = m X_m$$

$$J_- X_m = X_{m-1}$$

Dass er auch unter J_+ invariant ist folgt so: Es ist für $k \in \mathbb{N}$

$$J_+ (J_-)^k = J_+ J_- (J_-)^{k-1}$$

$$= [J_+, J_-] (J_-)^{k-1} + J_- J_+ (J_-)^{k-1}$$

$$= 2 J_3 (J_-)^{k-1} + J_- J_+ (J_-)^{k-1}$$

Angewandt auf X_j folgt für $k=1$

$$J_+ J_- X_j = 2j X_j \qquad (\text{wegen } J_+ X_j = 0)$$

für $k=2$

$$J_+(J_-)^2 X_j = \underbrace{2 J_3 J_- X_j}_{\sim X_{j-1}} + \underbrace{J_- J_+ J_- X_j}_{\sim X_{j-1}}$$

$$\sim X_{j-1}$$

und allgemein per Induktion:

Ist $J_+(J_-)^{k-1} X_j \sim X_{j-(k-2)}$

(Induktionsvoraussetzung), dann

$$J_+(J_-)^k X_j = \underbrace{2 J_3 (J_-)^{k-1} X_j}_{\sim X_{j+1-k}} + \underbrace{J_- J_+ (J_-)^{k-1} X_j}_{\sim X_{j+1-k}}$$

$$\sim X_{j+(k-1)}$$

Also sind alle $J_+ X_m \in V_j$

Ist die Darstellung irreduzibel, so kann es keine zwei linear unabhängigen Vektoren X_j und X'_j mit $J_3 X_j = J_3 X'_j = j$ geben, denn sonst wären die mit X_j und X'_j konstruierten Darstellungsräume V_j und V'_j nicht gleich und invariant, im Widerspruch zur Irreduzibilität.

In jeder irreduziblen Darstellung ist also ein Eigenvektor X_m von J_3 eindeutig bis auf Normierung und Phase durch

$$X_m \sim (J_-)^{j-m} X_j$$

gegeben sofern $X_j \neq 0$ mit

$$J_3 X_j = j X_j$$

und $J_+ X_j = 0$

vorliegt. Wählt man $\| X_j \| = 1$ und dann induktiv

$$X_{m-1} := J_- X_m / \| J_- X_m \|$$

mit $\| J_- X_m \| = | \langle J_- X_m | J_- X_m \rangle |^{1/2}$

$$= \langle X_m | J_+ J_- X_m \rangle |^{1/2}$$

$$= [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2}$$

also $$X_{m-1} = \frac{J_- X_m}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}}$$

dann ist $\{ X_m \mid m = j, j-1, \ldots, 1-j, -j \}$ eine Orthonormalbasis von V_j.

Die definierende Darstellung $D^{1/2}$ von $SU(2)$ auf $\mathbb{C}^2$ ist die zu $j = \frac{1}{2}$.

Es ist

$$\dot{D}^{1/2}(e_a) = -\frac{i}{2}\sigma_a$$

mit Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also

$$L_a := i e_a = \frac{1}{2}\sigma_a$$

$$\Rightarrow L_+ = L_1 + iL_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_- = L_1 - iL_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Setzt man $X_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dann

$$L_3 X_{\pm\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2} X_{\pm\frac{1}{2}}$$

$$L_+ X_{\frac{1}{2}} = 0, \quad L_- X_{\frac{1}{2}} = X_{-\frac{1}{2}}$$

$$L_+ X_{-\frac{1}{2}} = X_{\frac{1}{2}}, \quad L_- X_{-\frac{1}{2}} = 0$$

Wir betrachten die symmetrisierten Tensorprodukte von n $\mathbb{C}^2$'s

$$V_n := \mathbb{C}^2 \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{\text{symmetrisiert}} \mathbb{C}^2 = \bigotimes_S^n \mathbb{C}^2$$

Es gilt allgemein

$$\dim_{\mathbb{F}}\left(\bigotimes_S^n \mathbb{F}^d\right) = \frac{(n+d-1)!}{n!\,(d-1)!}$$

Beweis: Ist $\{e_a \mid a = 1, \ldots, d\}$ Basis von $\mathbb{F}^d$ (z.B. $e_1 = (1, 0, \cdots 0)^T$ etc) dann ist eine Basis von $\bigotimes_S^n \mathbb{F}^d$ durch n Tensorprodukte von e_a's gegeben, bei denen es auf die Reihenfolge nicht ankommt, sondern nur darauf, wie viele Male e_1, e_2, e_3 etc im Tensorprodukt sind. Dies ist gleich der Anzahl von Möglichkeiten, eine Anzahl n von ununterscheidbaren Objekten (hier Tensorfaktoren) auf d Kästen (hier die Basisvektoren) zu verteilen.

Trick von Max Planck: Repräsentiere jedes Objekt durch einen Punkt, also n Stück, und die Kästen durch $(d-1)$ vertikale Striche, also z. B. 9 Obj. in 6 K.:

$$\cdot\cdot\,|\,\cdot\cdot\cdot\,|\,\cdot\,|\,|\,\cdot\cdot\cdot\,|$$

$\hat{=}$ 2 Objekte im 1. Kasten, 3 im 2., einen im 3., keines im 4., 3 im 5. und keines im 6.

Die Anzahl n unterscheidbare Punkte und $(d-1)$ unterscheidbare Striche anzuordnen ist $(n+d-1)!$ Da die Punkte ununterscheidbar sein sollen teilen wir durch $n!$ Da die Kästen durch die lineare Anordnung der Striche bereits feststehen, die Striche dann also ebenfalls als ununterscheidbar angenommen werden dürfen, teilen wir noch durch $(d-1)!$

Speziell für $d=2$ ist

$$\dim_{\mathbb{C}} \underbrace{\left(\bigotimes_{s}^{n} \mathbb{C}^2\right)}_{V_n} = \frac{(n+1)!}{n!\,1!} = n+1$$

Auf V_n ist $SU(2)$ durch das n-Fache Tensorprodukt von $D^{1/2}$ dargestellt.

$$\left(D^{1/2}\right)^{\otimes n} = \underbrace{D^{1/2} \otimes \cdots \otimes D^{1/2}}_{n \text{ Faktoren}} =: D^{n/2}$$

Für die Lie-Algebra bedeutet das (Ableiten und Produktregel anwenden)

$$\begin{aligned}\dot{D}^{n/2}(e_a) = \; & \dot{D}^{1/2}(e_a) \otimes 1\!\!1 \otimes 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 \\ & + 1\!\!1 \otimes \dot{D}^{1/2}(e_a) \otimes 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 \\ & + \cdots \\ & + 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes \dot{D}^{1/2}(e_a) \otimes 1\!\!1 \\ & + 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 \otimes \dot{D}^{1/2}(e_a)\end{aligned}$$

Also

$$\left(L_a^{n/2}\right)^{\otimes n/2} = L_a^{1/2} \otimes 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 + \cdots + 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 \otimes L_a^{1/2}$$

Insbesondere

$$\left(L_3^{n/2}\right)^{\otimes n} = L_3^{1/2} \otimes 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 + \cdots + 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 \otimes L_3^{1/2}$$

$$L_\pm^{n/2} \; {}^{\otimes n} = L_\pm^{1/2} \otimes 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 + \cdots + 1\!\!1 \otimes \cdots \otimes 1\!\!1 \otimes L_\pm^{1/2}$$

Für $X_{\frac{n}{2}} := X_{\frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes X_{\frac{1}{2}} \in V_n$ gilt

$$L_3^{n/2} X_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \cdot X_{\frac{n}{2}}$$

$$L_+^{n/2} X_{\frac{n}{2}} = 0$$

Also erzeugt wiederholtes Anwenden von $(L_-)^{\otimes n}$ einen irreduziblen Darstellungsraum der Dimension $(2 \cdot \frac{n}{2} + 1) = n+1$. Dieser ist aber gerade ganz V_n

Satz: Alle irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ entstehen aus der definierenden Darstellung durch symmetrisiertes Tensorprodukt.

Achtung: Betrachtet man gewöhnliche Tensorprodukte irreduzibler Darstellungen, also ohne Symmetrisierung, so gilt die Clebsch-Gordan-Reihe

$$D^k \otimes D^l = \bigoplus_{n=|k-l|}^{k+l} D^n$$

z.B. $D^{1/2} \otimes D^{3/2} = D^2 \oplus D^1$

Check der Dimensionen

$$\dim(D^k \otimes D^l) = (2k+1)\cdot(2l+1)$$

$$\dim\left(\bigoplus_{|k-l|}^{k+l} D^n\right) = \sum_{n=|k-l|}^{k+l} (2n+1)$$

In der Tat:

$$\sum_a^b (2n+1) = 2\cdot\left(a + (a+1) + \cdots + (a+(b-a))\right) + (b-a+1)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\left(\begin{matrix} a & + (a+1) + \cdots & + (a+(b-a)) \\ + a+(b-a) & + & + \quad a \end{matrix}\right) + (b-a+1)$$

$$= (a+b)(b-a+1) + (b-a+1) = (a+b+1)(b-a+1)$$

Sei o.B.d.A. $k \geq l$; dann $b = k+l$
$a = k-l$, also $a+b = 2k$, $b-a = 2l$

$$\Rightarrow \sum_{n=|k-l|}^{k+l} (2n+1) = (2k+1)(2l+1).$$

Für SO(3) und deren differenzierende Darstellung $\mathcal{D}^1$ in $\mathbb{C}^3$ (sie ist reell) kann man ganz entsprechend vorgehen:

$$[\dot{\mathcal{D}}^1(e_a)]_{bc} = -\varepsilon_{abc}$$

Beachte

$$(-\varepsilon_{ank})(-\varepsilon_{bkm}) - (a \leftrightarrow b)$$

$$= \varepsilon_{abc}(-\varepsilon_{cnm}), \quad \text{also}$$

$$[\dot{\mathcal{D}}^1(e_a), \dot{\mathcal{D}}^1(e_b)]_{nm} = \varepsilon_{abc}[\dot{\mathcal{D}}^1(e_c)]_{nm}$$

wie es sein muss.

Also

$$[J_a]_{bc} = -i\,\varepsilon_{abc}$$

$$\Rightarrow J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Für

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$$

ist

$$J_3 X_1 = 1 \cdot X_1$$

und $\quad J_+ X_1 = 0$

Also entsteht durch wiederholtes Anwenden von J_- ganz $\mathbb{C}^3$

$$J_- X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_0 := -\frac{1}{\sqrt{2}} J_- X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$J_- X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{-1} := \frac{1}{\sqrt{2}} J_- X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)$$

Die irreduziblen Darstellungen der SO(3) kann man nun erneut durch Tensorproduktbildung aus der definierenden Darstellung erhalten, wobei man sich nun nicht nur auf symmetrische sondern auch auf spurfreie Tensoren einschränkt. Deren Dimension ist allgemein

$$\underbrace{\frac{(n+d-1)!}{n!\,(d-1)!}}_{\substack{\#\text{ symm. Tensoren der Stufe}\\ n}} - \underbrace{\frac{(n+d-3)!}{(n-2)!\,(d-1)!}}_{\substack{\#\text{ symm. Tensoren der Stufe } (n-2)\\ = \#\text{ Spurbedingungen.}}}$$

Speziell für $d=3$ also

$$\frac{(n+2)!}{n!\,2} - \frac{n!}{(n-2)!\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(n+1)(n+2) - n(n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n^2+3n+2-n^2+n\right] = 2n+1$$

In $V_n := \bigotimes_S^n \mathbb{C}^3$

ist wieder analog

$$L_a^n = L_a^1 \otimes E_3 \otimes \cdots \otimes E_3$$
$$+ \cdots + E_3 \otimes \cdots \otimes E_3 \otimes L_a^1$$

Entsprechend auch für $a = \pm$.

Setzt man

$$X_n := X_1 \otimes \cdots \otimes X_1$$

dann $L_3^n X_n = n X_n$

$$L_+^n X_n = 0$$

Also erhält man einen irreduziblen Unterraum zu V_n durch wiederholtes Anwenden von L_-^n, $(2n+1) - 1 = 2n$ Mal. Das ist nicht der Unterraum der symmetrischen spurlosen Tensoren, aber isomorph zu ihm.

$SL(2,\mathbb{C})$:

Endlich dimensionale irreduzible Darstellungen

$$\text{Lie}\, SL(2,\mathbb{C}) = \text{Span}\{\dot{R}_a, \dot{B}_a \mid a = 1,2,3\}$$

$$[\dot{R}_a, \dot{R}_b] = \varepsilon_{abc}\dot{R}_c$$

$$[\dot{R}_a, \dot{B}_b] = \varepsilon_{abc}\dot{B}_c$$

$$[\dot{B}_a, \dot{B}_b] = -\varepsilon_{abc}\dot{R}_c$$

Komplexifiziere zu $[\text{Lie}\, SL(2,\mathbb{C})]^{\mathbb{C}}$ und betrachte

$$M_a^{\pm} := \frac{1}{2}(\dot{R}_a \mp i\dot{B}_a)$$

$$\rightarrow [M^+_a, M^+_b] = \frac{1}{4}[\dot{R}_a + i\dot{B}_a, \dot{R}_b - i\dot{B}_b]$$

$$= \frac{1}{4}(2\varepsilon_{abc}\dot{R}_c - 2i\,\varepsilon_{abc}\dot{B}_c)$$

$$= \varepsilon_{abc} M^+_c$$

$$[M^-_a, M^-_b] = \frac{1}{4}[\dot{R}_a + i\dot{B}_a, \dot{R}_b + i\dot{B}_b]$$

$$= \frac{1}{4}[2\varepsilon_{abc}\dot{R}_c + 2i\,\varepsilon_{abc}\dot{B}_c]$$

$$= \varepsilon_{abc} M^-_c$$

$$[M^+_a, M^-_b] = \frac{1}{4}[\dot{R}_a - i\dot{B}_a, R_a + i\dot{B}_b]$$

$$= 0.$$

[Lie SL(2,C)]$^{\mathbb{C}}$ hat eine reelle Struktur mit der reellen Basis $\{\dot{R}_a, \dot{B}_b\}$.

$$\dot{R}_a = M_a^+ + M_a^-$$

$$\dot{B}_a = i\,(M_a^+ - M_a^-)$$

Ein allgemeines durch Boost-Parameter

$$\vec{\mu} = \tanh^{-1}(\beta)\,\hat{\beta} \;,\; \hat{\beta} := \vec{\beta}/\beta$$

und Drehwinkel

$$\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{n} \quad , \quad \|\vec{n}\| = 1$$

parametrisiertes Element $L(\vec{\mu},\vec{\alpha}) \in SL(2,\mathbb{C})$ ist

$$L(\vec{\mu},\vec{\alpha}) = \exp(\vec{\mu}\cdot\vec{\dot{B}})\cdot\exp(\vec{\alpha}\cdot\vec{\dot{R}})$$

$$= \exp(i\vec{\mu}(\vec{M}^+ - \vec{M}^-))\cdot\exp(\vec{\alpha}(\vec{M}^+ + \vec{M}^-))$$

$$= \exp(i\vec{\mu}\vec{M}^+)\cdot\exp(-i\vec{\mu}\vec{M}^-)\cdot\exp(\vec{\alpha}\vec{M}^+)\exp(\vec{\alpha}\vec{M}^-)$$

[da $\vec{M}^+$ und $\vec{M}^-$ vertauschen]

$$\exp(i\vec{\mu}\vec{M}^+)\exp(\vec{\alpha}\vec{M}^+)\exp(-i\vec{\mu}\vec{M}^-)\exp(\vec{\alpha}\vec{M}^-)$$

[wieder da $\vec{M}^+$ und $\vec{M}^-$ vertauschen]

Achtung: $\exp(i\vec{\mu}\vec{M}^+)\exp(\vec{\alpha}\vec{M}^+) \neq \exp((\vec{\alpha}+i\vec{\mu})\vec{M}^+)$.

$$L(\vec{u},\vec{\alpha}) := \exp(i\vec{u}\vec{M}^+)\exp(\alpha\vec{M}^+) \cdot$$
$$\times \exp(-i\vec{u}\vec{M}^-)\cdot\exp(\alpha\vec{M}^-)$$

$$[\mathrm{Lie}(SL(2,\mathbb{C}))]^{\mathbb{C}} = \underbrace{[\mathrm{Lie}(SU(2))]^{\mathbb{C}}}_{\mathrm{Span}\{\vec{M}^+\}} \oplus \underbrace{[\mathrm{Lie}(SU(2))]^{\mathbb{C}}}_{\mathrm{Span}\{\vec{M}^-\}}$$

„Linke SU(2)" „Rechte SU(2)"

In der Fundamentaldarstellung $D^{1/2}$ von SU(2) (Spin 1/2) ist

$$\dot{D}^{1/2}(M_a) = -\frac{i}{2}\sigma_a$$

in $V \cong \mathbb{C}^2$

$$D_L^{1/2}(\vec{u},\vec{\alpha}) = \exp(\tfrac{1}{2}\vec{u}\vec{\sigma})\exp(-\tfrac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma})$$
$$=: A(\vec{u},\vec{\alpha})$$

$$D_R^{1/2}(\vec{u},\vec{\alpha}) = \exp(-\tfrac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{\sigma})\exp(-\tfrac{i}{2}\vec{\alpha}\vec{\sigma})$$

$$= A(-\vec{u},\vec{\alpha})$$

Beachte

$$\sigma_2 \, \sigma_1 \, \sigma_2^{-1} = -\sigma_1 = -\overline{\sigma_1}$$

$$\sigma_2 \, \sigma_2 \, \sigma_2^{-1} = \sigma_2 = -\overline{\sigma_2}$$

$$\sigma_2 \, \sigma_3 \, \sigma_2^{-1} = -\sigma_3 = -\overline{\sigma_3}$$

Also

$$D_R^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha}) = A(-\vec{u}, \vec{\alpha})$$

$$= \sigma_2 \, \overline{A(\vec{u}, \vec{\alpha})} \, \sigma_2^{-1}$$

$$= \sigma_2 \, \overline{D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})} \, \sigma_2^{-1}$$

D.h. $D_R^{1/2}$ ist äquivalent (σ_2 ist der Intertwiner; was der zu bedeuten hat sehen wir später noch) zur komplex-konjugation von $D_L^{1/2}$.

Beachte $D^{1/2}_L(\vec{0}, \vec{\alpha}) = D^{1/2}_R(\vec{0}, \vec{\alpha})$, d.h. Drehungen wirken gleich auf V_L und V_R, Boosts nicht.