5. Spinoralgebra

Die definierende Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ ist auf $V \cong \mathbb{C}^2$. Auf $\mathbb{C}^2$ existiert invariante antisymmetrische Bilinearform $\varepsilon \in V^* \wedge V^*$

$$\varepsilon : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$(v,w) \mapsto \varepsilon(v,w) = -\varepsilon(w,v).$$

Diese benutzen wir in der üblichen Weise (siehe Ergänzungen) um Isomorphismen

$$\varepsilon_\downarrow : V \to V^*$$

$$\varepsilon_\uparrow := (\varepsilon_\downarrow)^{-1} : V^* \to V$$

einzuführen. Ist $\{e_A \mid A = 1,2\}$ Basis von V und $\{\theta^A \mid A = 1,2\}$ dann duale Basis in V^*, dann

$$\varepsilon_\downarrow(e_a) = \varepsilon_{ab}\,\theta^b$$

$$\varepsilon_\uparrow(\theta^a) = e_b\,\varepsilon^{ba}$$

mit $\varepsilon_{ab} = \varepsilon(e_a, e_b)$

$$\varepsilon^{ab} = \varepsilon^{-1}(\theta^a, \theta^b)$$

und
$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon \circ \varepsilon_\uparrow \times \varepsilon_\uparrow$$

d.h. $\varepsilon^{-1}(\alpha, \beta) = \varepsilon(\varepsilon_\uparrow(\alpha), \varepsilon_\uparrow(\beta))$

Es folgt
$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon^{AC}\,\varepsilon^{BD}\,\varepsilon_{CD}$$

also $\varepsilon^{BD}\varepsilon_{CD} = \delta^B{}_C$

Das heißt, die Matrix $\{\varepsilon^{AB}\}$ ist zur Matrix $\{\varepsilon_{AB}\}$ transponiert invers.

Wählt man $\{e_A \mid A = 1, 2\}$ so dass

$$\{\varepsilon_{AB}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dann $\{\varepsilon^{AB}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \{\varepsilon_{AB}\}$.

In Komponenten $V = V^a e_a$, $\alpha = \alpha_a \theta^a$

$\Rightarrow \varepsilon_\downarrow(V) = V^a\,\varepsilon_{ab}\,\theta^b =: V_b\,\theta^b$

$\varepsilon_\uparrow(\alpha) = \alpha_a\,\varepsilon^{ba}\,e_b =: \alpha^b\,e_b$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi^A &\xrightarrow{\downarrow} \varphi_B := \varphi^A\,\varepsilon_{AB} \\ \varphi_B &\xrightarrow{\uparrow} \varphi^A := \varepsilon^{AB}\,\varphi_B \end{aligned}}$$

Ist $A \in SL(2,\mathbb{C})$ und

$$A^A{}_B = \theta^A (A(e_b))$$

d.h. $A = A^A{}_B \, e_A \otimes \theta^B$

Dann

$$\varepsilon(A(e_A), A(e_A))$$
$$= \varepsilon(A^C{}_A e_C, A^D{}_B e_D)$$
$$= \varepsilon_{CD} A^C{}_A A^D{}_B$$
$$= \varepsilon_{AB} \det\{A^C{}_D\}$$
$$= \varepsilon_{AB}$$

$\Rightarrow$ ε ist invariant unter $SL(2,\mathbb{C})$.

Zusammen mit V, dem Darstellungsraum von $SL(2,\mathbb{C})$ gibt es drei weitere komplexe Vektorräume: den Dualraum V^*, den komplex-konjugierten Vektorraum $\bar{V}$ und den komplex-konjugierten Dualraum $\bar{V}^*$. Zwischen diesen gibt es folgende Abbildungen

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varepsilon_\downarrow"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/\!/"] & V^* \arrow[d, "\bar{j}"] \\ \bar{V} \arrow[r, "\bar{\varepsilon}_\downarrow"'] & \bar{V}^* \end{tikzcd} \quad , \quad \bar{j} := (j^T)^{-1}$$

$j =$ kan. antilinearer anti-Isomorphismus

Kommutativität des Diagramms bedeutet z.B.

$$\bar{\varepsilon}_\downarrow = \bar{j} \circ \varepsilon_\downarrow \circ j^{-1}$$

$$= (j^T)^{-1} \circ \varepsilon_\downarrow \circ j^{-1}$$

In natürlich assoziierten Basen

$$\{e_A\} \qquad \{\theta_A\}$$

$$\{\bar{e}_{A'}\} \qquad \{\bar{\theta}_{A'}\}$$

Wo e_A, θ^A dual

$$\theta^A(e_B) = \delta^A{}_B$$

Achtung: $\theta^A \neq \varepsilon_\downarrow(e_A) = \varepsilon_{AB}\,\theta^B$

und

$$\bar{e}_{A'} = j(e_A)$$

Wir sehen $j(\varphi^A e_A) =: \bar{\varphi}^{A'} \bar{e}_{A'}$

Bezogen auf natürliche assoziierte Basen für die $\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\{\varepsilon_{AB}\} = \{\varepsilon^{AB}\} = \{\bar{\varepsilon}_{A'B'}\} = \{\bar{\varepsilon}^{A'B'}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass in diesen Basen

$$\{\varepsilon_{AB}\} = i\sigma_2$$

Die Relation von S. 4.62

$$D_R^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha}) = \sigma_2 \overline{D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})} \sigma_2^{-1}$$

kann dann so interpretiert werden:

$$D_R^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha}) = \bar{\varepsilon}_\downarrow \circ \overline{D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})} \circ \bar{\varepsilon}_\uparrow$$

D.h. $D_R^{1/2}$ wirkt in $\bar{V}^*$. Die Matrixkomponenten genügen dann

$$D_R^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})(\bar{\theta}^{B'}) = [D_R^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})]_{D'}{}^{B'} \bar{\theta}^{D'}$$

$$= \bar{\varepsilon}_\downarrow \circ \overline{D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})} \circ \bar{\varepsilon}_\uparrow (\bar{\theta}^{B'})$$

$$= \bar{\varepsilon}_\downarrow \circ \overline{D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})} (\bar{\varepsilon}^{A'B'} \bar{e}_{A'})$$

$$= \bar{\varepsilon}_\downarrow (\bar{\varepsilon}^{A'B'} \overline{[D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})]^{C'}{}_{A'}} \bar{e}_{C'})$$

$$= \bar{\varepsilon}^{A'B'} \overline{D_L^{1/2}(\vec{u}, \vec{\alpha})]^{C'}{}_{A'}} \bar{\varepsilon}_{C'D'} \bar{\theta}^{D'}$$

Also

$$\left[D^{1/2}{}_R(\vec{\mu},\vec{\alpha})\right]_{D'}{}^{B'}$$

$$= \bar{\varepsilon}_{C'D'} \overline{\left[D^{1/2}_L(\vec{\mu},\vec{\alpha})\right]^{C'}{}_{A'}} \bar{\varepsilon}^{A'B'}$$

$$= - \bar{\varepsilon}_{D'C'} \overline{\left[D^{1/2}_L(\vec{\mu},\vec{\alpha})\right]^{C'}{}_{A'}} \bar{\varepsilon}^{A'B'}$$

$$= \left[- (i\sigma_2) \overline{A(\vec{\mu},\vec{\alpha})} (i\sigma_2)\right]_{D'}{}^{B'}$$

$$= \left[\sigma_2 \overline{A(\mu,\alpha)} \sigma_2^{-1}\right]_{D'}{}^{B'}$$

Das ist genau die auf S. 4.62 angegebene Formel für $D^{1/2}{}_R$.

Wir werden also zukünftig den Vektorraum in dem die Fundamentaldarstellung der rechten SU(2) wirkt mit $\bar{V}^*$ identifizieren, wenn V den Vektorraum bezeichnet, in dem die Fundamentaldarstellung der linken SU(2) wirkt.

Die Irreduziblen Darstellungsräume von SL(2,C) sind dann

$$V^p_q := \left(\bigotimes_S^p V\right) \otimes \left(\bigotimes_S^q \bar{V}^*\right)$$

$$= (\underbrace{V \vee \cdots \vee V}_{p}) \otimes (\underbrace{\bar{V}^* \vee \cdots \vee \bar{V}^*}_{q})$$

Die zugehörige irreduzible Darstellung ist

$$D^{(p/2,\, q/2)} := \left(\bigotimes_S^{p} D_L^{1/2}\right) \otimes \left(\bigotimes_S^{q} D_R^{1/2}\right)$$

entsprechend ($A \in SL(2, \mathbb{C})$)

$$\varphi^{A_1 \cdots A_p}_{\dot{B}_1 \cdots \dot{B}_q} \xrightarrow{A} \varphi'^{C_1 \cdots C_p}_{\dot{D}_1 \cdots \dot{D}_q} :=$$

$$\varphi^{A_1 \cdots A_p}_{B_1 \cdots B_q}\, A^{C_1}_{A_1} \cdots A^{C_p}_{A_p}\, \left(\overline{A^{-1}}\right)^{B_1}_{D_1} \cdots \left(\overline{A^{-1}}\right)^{B_q}_{D_q}$$

Jeder obere Index mit der definierenden Darstellung, jeder untere mit der transponiert-invers-komplex konjugierten.

Die Clebsch Gordon-Reihe ist dann die Tensorfaktor weise Anwendung der Clebsch-Gordon-Reihe für $SU(2)$:

$$D^{p} \otimes D^{p'} = \bigoplus_{\substack{r=|p-p'| \\ \mathbb{N}\text{-Schritte}}}^{p+p'} D^{r} \qquad p, p' \in \tfrac{1}{2}\mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad D^{p/2} \otimes D^{p'/2} = \bigoplus_{\substack{r=|p-p'| \\ 2\cdot\mathbb{N}\text{-Schritte}}}^{p+p'} D^{r/2}$$

Also

$$D^{(p/2,\, q/2)} \otimes D^{(p'/2,\, q'/2)}$$

$$= \underbrace{\bigoplus_{r=|p-p'|}^{p+p'} \bigoplus_{s=|q-q'|}^{q+q'}}_{\text{summen in geradzahligen Schritten.}} D^{(r/2,\, q/2)}$$

z.B.

$$D^{(1/2,\, 1/2)} \otimes D^{(1/2,\, 1/2)}$$

$$= \underbrace{D^{(0,0)}}_{\text{Skalar}} + \underbrace{D^{(1,0)} + D^{(0,1)}}_{\text{selbst- und anti-selbst-duale 2-Formen}} + \underbrace{D^{(1,1)}}_{\text{Spurfreie symm. Tensoren 2. Stufe}}$$

Entspricht (Vierervektoren) $\otimes$ (Vierervektoren)

= Tensoren 2. Stufe

$$= \underbrace{\text{Antisymmetrischer}}_{\text{Selbst- } \oplus \text{ anti-selbstdual}} \oplus \underbrace{\text{Symmetrischer}}_{\text{Symmetrisch-Spurlos } \oplus \text{ Spuranteil}}$$

Bei der Diskussion von $SL(2,\mathbb{C})$ als universelle Überlagerung von $\mathrm{Lor}_+^\uparrow$ hatten wir (S. 3.40)

$$A \, \sigma_\nu \, A^+ = L^\mu{}_\nu \, \sigma_\mu \qquad (*)$$

mit $\sigma_\nu = (E_2, \vec{\sigma})$. Das interpretieren wir nun so. Sei

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E_2{}^{A\dot{A}}, \vec{\sigma}^{A\dot{A}} \right)$$

$\uparrow$

Normierung der späteren Bequemlichkeit hier hinzugefügt

$$\in (V_4^{\mathbb{C}})^* \otimes_{\mathbb{C}} V_2 \otimes_{\mathbb{C}} \bar{V}_2$$

V_2 = $\mathbb{C}$-VR der Spinoren in Fund. Darst.

$\bar{V}_2$ = $\mathbb{C}$-VR der kompl.-konj. Spinoren

V_4 = $\mathbb{R}$-VR zum Minkowski-Raum

$V_4^{\mathbb{C}}$ = $(\mathbb{C} \otimes V_4)^{\mathbb{C}}$. komplexifizierter "Mink.-Raum"

(*) besagt die Invarianz des Tensors

$$\sigma : \sigma_\mu{}^{A\dot{A}} \, \theta^\mu \otimes e_A \otimes \bar{e}_{\dot{A}}$$

$$(L^{-1})^\mu{}_\nu \, A^B{}_A \, \bar{A}^{\dot{B}}{}_{\dot{A}} \, \sigma_\mu{}^{A\dot{A}} = \sigma_\nu{}^{B\dot{B}}$$

Mit seiner Hilfe kann man jeden Vektor

$$V = V^\mu e_\mu$$

in einen Spinor-Tensor

$$\tilde{V} = V^{A\dot{A}} \, e_A \otimes \bar{e}_{\dot{A}}$$

mit $V^{A\dot{A}} := V^\mu \sigma_\mu{}^{A\dot{A}}$

umwandeln, d.h. σ definiert einen Isomorphismus

$$\sigma : V_4^{\mathbb{C}} \to V_2 \otimes \bar{V}_2$$

der eine Äquivalenz der Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ auf $V_4^{\mathbb{C}}$ (definierende Darstellung der Lorentzgruppe) mit dem Tensorprodukt der Definierenden Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ und ihrer komplex-konjugierten ist.

Wir ziehen auch an $\sigma_\mu{}^{A\dot{A}}$ Indizes mit η und ε bzw $\bar{\varepsilon}$ herauf und herunter:

$$\sigma^{\mu A\dot{A}} := \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu{}^{A\dot{A}}$$

$$\sigma_{\mu A\dot{A}} := \sigma_\mu{}^{B\dot{B}} \varepsilon_{BA} \varepsilon_{\dot{B}\dot{A}}$$

Es gilt (hierfür war die $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nötig)

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{A}} \sigma_{\nu A\dot{A}} = \eta_{\mu\nu} \qquad (**)$$

Beweis in Komponenten: $\{\varepsilon_{AB}\} = i\sigma_2$

$\Rightarrow \sigma_\mu{}^{B\dot{B}} \varepsilon_{BA} \varepsilon_{\dot{B}\dot{A}} = \sqrt{2}\, \sigma_2 \sigma_\mu \sigma_2$

$= \sqrt{2}\,(E_2, -\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3) = \sqrt{2}\,(E_2, -\sigma_a^T)$

$= \sqrt{2}\, \tilde{\sigma}_\mu^T$. Also $\sigma_\mu{}^{A\dot{A}} \sigma_{\nu A\dot{A}} = \frac{1}{2} \mathrm{Spur}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu)$

$= \eta_{\mu\nu}$.

Außerdem gilt

$$\sigma_\mu{}^{A\dot{A}} \sigma^{\mu B\dot{B}} = \varepsilon^{AB} \bar{\varepsilon}^{\dot{A}\dot{B}}$$

Das sieht man so: Sei $\sigma : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2 \otimes \bar{\mathbb{C}}^2$

$$X^\mu \longmapsto X^\mu \sigma_\mu{}^{A\dot{A}} =: X^{A\dot{A}}$$

$$\Rightarrow X^\mu \sigma_\mu{}^{A\dot{A}} \sigma_{\nu A\dot{A}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nach } (**) \text{ oben}}}{=} X_\nu = \sigma_{\nu A\dot{A}} X^{A\dot{A}}$$

Also

$$\left.\begin{aligned} X^{A\dot{A}} &= X^{\mu}\,\sigma_{\mu}{}^{A\dot{A}} \\ X_{\nu} &= \sigma_{\nu A\dot{A}}\,X^{A\dot{A}} \end{aligned}\right\}\; X^{A\dot{A}} = \sigma^{\mu A\dot{A}}\,\sigma_{\mu B\dot{B}}\,X^{B\dot{B}}$$

gilt $\forall\, X^{A\dot{A}}$ $\Longleftrightarrow$

$$\sigma_{\mu}{}^{A\dot{A}}\,\sigma^{\mu}{}_{B\dot{B}} = \delta^{A}_{B}\,\delta^{\dot{A}}_{\dot{B}} \quad \Big|\ \varepsilon^{CB}\,\bar{\varepsilon}^{\dot{C}\dot{B}}$$

$$\Longleftrightarrow\ \sigma_{\mu}{}^{A\dot{A}}\,\sigma^{\mu C\dot{C}} = \varepsilon^{AC}\,\varepsilon^{\dot{A}\dot{C}}\,.$$

Jeder Vektorindex μ kann somit in ein Paar $A\dot{A}$ Spinorindizes verwandelt werden, und umgekehrt. Alle Tensoren können also als Spinor-Tensoren geschrieben werden

$$T^{\cdots\mu\cdots} \longleftrightarrow T^{\cdots A\dot{A}\cdots}$$

z.B.

$$\eta_{\mu\nu} \longleftrightarrow \eta_{A\dot{A}B\dot{B}} := \sigma^{\mu}{}_{A\dot{A}}\,\sigma^{\nu}{}_{B\dot{B}}\,\eta_{\mu\nu}$$

$$= \varepsilon_{AB}\,\bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}}$$

Achtung:

$$V_4^{\mathbb{C}} := (\mathbb{C} \otimes V_4)^{\mathbb{C}}$$

ist die Komplexifizierung eines reellen Vektorraums und trägt damit eine reelle Struktur. Der Isomorphismus

$$\sigma : V_4^{\mathbb{C}} \to V_2 \otimes \overline{V}_2$$

induziert eine reelle Struktur auf $V_2 \otimes \overline{V}_2 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ wie folgt. Sei

$$j : V_2 \to \overline{V}_2$$

die kanonische antilineare Bijektion und

$$Ex : V_2 \otimes \overline{V}_2 \to \overline{V}_2 \otimes V_2$$

$$\alpha \otimes \overline{\beta} \mapsto Ex(\alpha \otimes \overline{\beta}) := \overline{\beta} \otimes \alpha$$

$$+ \text{ lineare Fortsetzung}$$

der lineare Austausch-Isomorphismus; dann ist

$$C := (j^{-1} \otimes j) \circ Ex : V_2 \otimes \overline{V}_2 \to V_2 \to \overline{V}_2$$

ein antilinearer Isomorphismus

Es gewinnt $\forall \alpha \in V_2, \bar{\beta} \in \bar{V}_2$:

$$C \circ C\,(\alpha \otimes \bar{\beta}) = C\,(\bar{j}^{-1}(\bar{\beta}) \otimes j(\alpha))$$

$$= \bar{j}^{-1} \otimes j\,(j(\alpha) \otimes \bar{j}^{-1}(\bar{\beta})) = \alpha \otimes \bar{\beta}\,.$$

$$\Rightarrow \quad C \circ C = id|_{V \otimes \bar{V}}$$

$\Rightarrow$ C ist reelle Struktur.

In Komponenten bezüglich natürlich angeordneter Basen $\{e_A\}$ $\{\bar{e}_{\dot{A}}\}$ heißt das: Ist $X = X^\mu e_\mu$ reell $\Leftrightarrow$ $X^\mu \in \mathbb{R}$ $\{X^{A\dot{A}}\}$ sind Hermite'sche 2×2 Matrizen.

$$X^\mu \in \mathbb{R} \rightarrow X^\mu \sigma_\mu{}^{A\dot{A}} = X^{A\dot{A}} = \overline{X^{\dot{A}A}}\,.$$

Somit gilt: Die Umwandlung der Tensoralgebra über V_4 in eine Spinoralgebra über V_2 (und $\bar{V}_2$) gelingt nur nach vorheriger Komplexifizierung, diese trägt jedoch eine reelle Struktur auf der Spinoralgebra die es gestattet, reelle Tensoren zu identifizieren.

Der Punkt ist: Die Spinoralgebra über V_2 hat wegen $\dim_{\mathbb{C}} V_2 = 2$ sehr „nette" Eigenschaften.

Beispiele (für die „Nettigkeit")

1) Lichtartige Vektoren haben besonders einfache Spinor-Äquivalente:

$$\eta(X,X)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\eta_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu}{}_{A\dot A}\,\sigma^{\nu}{}_{B\dot B}}_{\varepsilon_{AB}\bar\varepsilon_{\dot A\dot B}}\, X^{A\dot A}X^{B\dot B}=0$$

$$=2\det\{X^{A\dot A}\}$$

Also $X\neq 0$ und $\eta(X,X)=0 \Longleftrightarrow$
Rang $\{X^{A\dot A}\}=1 \Longleftrightarrow X^{A\dot A}=\alpha^{A}\bar\beta^{\dot B}$, d.h.
$X^{A\dot A}\,e_A\otimes\bar e_{\dot A}$ ist von der Form $\alpha\otimes\bar\beta$ (reines Tensorprodukt). Ist X zusätzlich reell, also $X^{A\dot A}=\overline{X^{A\dot A}} \Rightarrow \bar\beta^{\dot B}=\bar\alpha^{\dot A}$.

Lemma: Ist $V\in V_4^{\mathbb{C}}$ lichtartig reell und nicht Nullvektor, dann existiert Spinor $\alpha\in V_2-\{0\}$

$$X=\alpha\otimes\bar\alpha$$

α ist bis auf Phase (multiplikative komplexe Zahl vom Betrag 1) eindeutig.

Reelle Nullvektoren $\longleftrightarrow$ Spinoren $/\,U(1)$.

2) Da der Raum $V_2^* \wedge V_2^*$, in dem auch ε liegt, eindimensional ist, ist φ_{AB} mit $\varphi_{AB} = -\varphi_{BA}$ immer proportional zu ε_{AB}

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \, \varphi_C{}^C$$

Achtung: $\varphi_C{}^C = - \varphi^C{}_C$,

denn $\underbrace{\varepsilon^{AB} \varphi_{AB}}_{\varphi_A{}^A} = - \underbrace{\varepsilon^{BA} \varphi_{AB}}_{\varphi^B{}_B}$

Allgemein gilt

$$\varphi_{\ldots A \ldots B \ldots} = \varphi_{\ldots (A| \ldots |B) \ldots} + \varphi_{\ldots [A| \ldots |B] \ldots}$$

$$= \varphi_{\ldots (A| \ldots |B) \ldots} + \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \, \varphi_{\ldots C \ldots}{}^{C}{}_{\ldots}$$

Das gibt ein allgemeines Verfahren an die Hand Spinoren systematisch in die Summe von symmetrisierten Spinoren gleicher Stufe und solchen niedrigerer Stufe (sog. „Verkürzten" Spinoren) zu zerlegen:

Spinor = Symmetrischer Spinor + ε × Spinor niedrigerer Stufe.

Zerlegung von Spinoren in irreduzible Bestandteile: Beispiel Vakuum E-Dynamik.

Feld $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \theta^\mu \wedge \theta^\nu$

$F_{\mu\nu} = - F_{\mu\nu}$

$F_{\mu\nu} \to F_{A\dot{A}B\dot{B}} := F_{\mu\nu} \sigma^\mu{}_{A\dot{A}} \sigma^\nu{}_{B\dot{B}}$

Wir schreiben $F_{AB\dot{A}\dot{B}}$ statt $F_{A\dot{A}B\dot{B}}$, d.h. ordnen alle ungepunkteten und gepunkteten Indizes in disjunkten Gruppen (unter Beibehaltung der Reihenfolge in jeder Gruppe). Das ist schreibtechnisch bequemer, da die Symmetrisierungen sich ja nur auf jede dieser Gruppen separat beziehen. Wir symmetrisieren dann erst in AB und dann in $\dot{A}\dot{B}$.

$$F_{AB\dot{A}\dot{B}} = F_{(AB)\dot{A}\dot{B}} + \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} F_C{}^C{}_{\dot{A}\dot{B}}$$

$$= \qquad = F_{(AB)(\dot{A}\dot{B})} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} F_{(AB)\dot{C}}{}^{\dot{C}}$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} F_C{}^C{}_{(\dot{A}\dot{B})} + \frac{1}{4} \varepsilon_{AB} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} F_C{}^C{}_{\dot{C}}{}^{\dot{C}}$$

Wegen Antisymmetrie $F_{AB\dot{A}\dot{B}} = - F_{BA\dot{B}\dot{A}}$ ist $F_{(AB)(\dot{A}\dot{B})} = 0$ und $F_C{}^C{}_{\dot{C}}{}^{\dot{C}} = \varepsilon^{AB} \bar{\varepsilon}^{\dot{A}\dot{B}} F_{AB\dot{A}\dot{B}} = 0$.

Setze

$$\Phi_{AB} := \frac{1}{2} F_{(AB)\dot{C}}{}^{\dot{C}}$$

$$\psi_{\dot{A}\dot{B}} := \frac{1}{2} F_{C}{}^{C}{}_{(\dot{A}\dot{B})}$$

$$\Rightarrow \quad F_{AB\dot{A}\dot{B}} = \Phi_{AB} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} + \psi_{\dot{A}\dot{B}} \varepsilon_{AB}$$

Ist F reell, d.h. $F_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ und damit

$$F_{AB\dot{A}\dot{B}} = \overline{F}_{AB\dot{A}\dot{B}}$$

dann $\psi_{\dot{A}\dot{B}} = \overline{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}}$

$$\Rightarrow \quad F_{AB\dot{A}\dot{B}} = \Phi_{AB} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} + \overline{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} \varepsilon_{AB} \qquad (*)$$

Spinor Form des Levi-Civita Tensors

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \to \varepsilon_{A\dot{A}B\dot{B}C\dot{C}D\dot{D}} =: \varepsilon_{ABCD\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$$

$$= i \, (\varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{D}} \bar{\varepsilon}_{\dot{B}\dot{C}} - \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{C}} \bar{\varepsilon}_{\dot{B}\dot{D}})$$

(Beweis: Zeige vollst. Antisymmetrie und $\varepsilon(e_0, e_1, e_2, e_3) = 1$).

Dualer Feldstärketensor:

$$*F_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$$

$$**F = -F$$

da $$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta} \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2} (\delta^\gamma_\alpha \delta^\delta_\beta - \delta^\delta_\alpha \delta^\gamma_\beta)$$

$\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$

Also

$$* F_{AB\dot{A}\dot{B}} = i(\varepsilon_{AB} \bar{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} \Phi_{AB}) \quad (**)$$

$$*(F + i*F) = -i(F + i*F)$$

$$*(F - i*F) = +i(F - i*F)$$

Also sind $F - i*F$ selbstdual und
$F + i*F$ anti-selbstdual.

Aus (*) und (*) folgt

$$F^+_{AB\dot{A}\dot{B}} := \frac{1}{2}(F + i*F)_{AB\dot{A}\dot{B}}$$
$$= \Phi_{AB} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} \quad \text{(anti-selbstdual)}$$

$$F^-_{AB\dot{A}\dot{B}} := \frac{1}{2}(F - i*F)_{AB\dot{A}\dot{B}}$$
$$= \bar{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} \varepsilon_{AB} \quad \text{(selbstdual)}$$

Vakuum Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \epsilon_0 j^\nu = 0$$

$$\partial_{[\mu} F_{\lambda\sigma]} = 0 \iff \partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0$$

$$\iff \partial^\mu (F_{\mu\nu} + i * F_{\mu\nu}) = 0$$

$$\iff \partial^\mu F^+_{\mu\nu} = 0$$

$$\iff \partial^{A\dot{A}} (\phi_{AB} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}}) = 0$$

$$\iff (\partial^{A\dot{A}} \phi_{AB}) \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = 0$$

$$\iff \partial^{A\dot{A}} \phi_{AB} = 0 \qquad (*)$$

Hier ist $\partial^{A\dot{A}} = \sigma^{\mu A\dot{A}} \partial_\mu$

Die Maxwell-Gleichung (*) im Vakuum ist ein Beispiel einer Poincaré-Invarianten linearen Gleichung eines Feldes

$$\phi_{AB} : M^4 \to V^* \vee V^*$$

deren Lösungsmenge einen irreduziblen Teilraum bezüglich der Poincaré-Gruppe bildet. Dieser

Ist charakterisiert durch Spin = 1 und Masse $m = 0$. Was das bedeutet sehen wir unten.

Zunächst machen wir noch eine Bemerkung zu den Invarianten des EM-Feldes. Diese sind

$$I_1 := \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$I_2 := \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} {}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{B}$$

Mit $\quad F_{AB\dot{A}\dot{B}} = \Phi_{AB} \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} + \bar{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} \varepsilon_{AB}$

$$^*F_{AB\dot{A}\dot{B}} = i(\varepsilon_{AB} \bar{\Phi}_{\dot{A}\dot{B}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{A}\dot{B}} \Phi_{AB})$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}(\Phi_{AB} \Phi^{AB} + \text{k.k.}) = \mathrm{Re}(\Phi_{AB} \Phi^{AB})$$

$$I_2 = -\frac{i}{2}(\Phi_{AB} \Phi^{AB} - \text{k.k.}) = \mathrm{Im}(\Phi_{AB} \Phi^{AB})$$

Zerlegt man $\Phi_{AB} = \alpha_{(A} \beta_{B)}$ (α und β sind die Hauptspinoren von Φ), dann

$$\Phi_{AB} \Phi^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\alpha_A \beta_B + \alpha_B \beta_A)(\alpha^A \beta^B + \alpha^B \beta^A)$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha_A \beta^A)^2 = -\frac{1}{2}[\varepsilon(\alpha, \beta)]^2$$

Bezüglich der Hauptspinoren sind zwei Fälle denkbar:

1\. Fall: α und β sind nicht proportional (generischer Fall) $\Longleftrightarrow \varepsilon(\alpha, \beta) \neq 0$

$\Longleftrightarrow I_1 \neq 0$ und/oder $I_2 \neq 0$

(Allgemeiner Petrov Typ)

2\. Fall: $\alpha = z\beta,\ z \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \varepsilon(\alpha, \beta) = 0$

$\Longleftrightarrow I_1 = 0$ und $I_2 = 0$

$\Longleftrightarrow \|\vec{E}(t, \vec{x})\| = \|\vec{B}(t, \vec{x})\|$ und

$\vec{E}(t, \vec{x}) \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$

$\Longleftrightarrow$ Strahlungsfeld

(Spezieller Petrov Typ)