6. Darstellungen der Poincaré-Gruppe $\overline{P}_+^\uparrow$

$$\cong \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2,\mathbb{C})$$

Auf $\mathbb{R}^4 \times SL(2,\mathbb{C})$ ist das Multiplikationsgesetz

$$(a', A')(a, A) = (a' + \underbrace{\Pi(A')\, a}_{=:A'\cdot a},\ A'A)$$

wo

$$\Pi : SL(2,\mathbb{C}) \to L_{or}{}_+^\uparrow$$

der Projektionshomomorphismus der doppelten (= universellen) Überlagerung ist.

Wir stellen $\overline{P}_+^\uparrow$ auf Feldern

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to V \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^4, V)$$

dar, wobei V ein irreduzibler Darstellungsraum von $SL(2,\mathbb{C})$ ist. Dann soll

$$U : \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2,\mathbb{C}) \times C^\infty(\mathbb{R}^4, V) \to C^\infty(\mathbb{R}^4, V)$$

$$(U(a,A)\,\varphi)(x) := D(A)\,\varphi(A^{-1}\cdot(x-a))$$

Hier ist (D,V) die besagte irred. Darst. von $SL(2,\mathbb{C})$ im komplexen VR V, also $D = D^{(p/2,\, q/2)}$.

Wir werden später $C^\infty(\mathbb{R}^4, V)$ verallgemeinern zu distributiven Feldern.

Wir betrachten die Fourier-Transformierte von φ $(p \cdot x := \eta(p, x))$

$$F[\varphi](p) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x \, e^{ip \cdot x} \varphi(x) = \tilde{\varphi}(p)$$

$$F^{-1}[\tilde{\varphi}](x) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \, e^{-ip \cdot x} \tilde{\varphi}(p)$$

Dann ist die auf den Fourier-Transformierten Feldern induzierte Darstellung gegeben durch

$$\tilde{U}(a, A) := F \circ U(a, A) \circ F^{-1}$$

Nun ist

$$U(a, A) \, F^{-1}[\tilde{\varphi}](x) = D(A) \, F^{-1}[\tilde{\varphi}](A^{-1}(x-a))$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4p \, e^{-ip \cdot A^{-1}(x-a)} D(A) \, \tilde{\varphi}(p)$$

Ersetze dann $p = A^{-1} \cdot p'$ und benutze p' als neue Integrationsvariable, dann folgt mit

$$d^4p = \det\left(\frac{\partial p}{\partial p'}\right) \cdot d^4p' = \underbrace{\det(\Pi(A^{-1}))}_{=1} \, d^4p'$$

$$\Rightarrow U(a,A)\, F^{-1}[\tilde{\varphi}](x) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p'\, e^{-i\, A^{-1}p \cdot A^{-1}(x-a)}\, D(A)\,\tilde{\varphi}(A^{-1}p')$$

$$\left[\text{mit}\quad A^{-1}p \cdot A^{-1}(x-a) := \eta(A^{-1}p,\, A^{-1}(x-a))\right.$$

$$\left. = \eta(p,\, x-a) = p\cdot(x-a).\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4p'\, e^{-i\, p'\cdot(x-a)}\, D(A)\,\tilde{\varphi}(A^{-1}p')$$

Anwenden von F

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{ipx}\int d^4p'\, e^{-ip'(x-a)}\, D(A)\,\tilde{\varphi}(A^{-1}p)$$

$$\int d^4p' \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{i(p-p')\cdot x}}_{\delta^{(4)}(p-p')}\, e^{ip'a}\, D(A)\,\tilde{\varphi}(A^{-1}p)$$

$$= e^{ipa}\, D(A)\,\tilde{\varphi}(A^{-1}\cdot p) \qquad \Rightarrow$$

$$[(F\circ U(a,A)\circ F^{-1})\,\tilde{\varphi}](p) = \tilde{U}(a,A)\,\tilde{\varphi}(p)$$

$$= e^{ip\cdot a}\, D(A)\,\tilde{\varphi}(A^{-1}\cdot p) \qquad (*)$$

Der Unterschied zu $U(a,A)\varphi$ liegt also nur darin, dass die Translation $x \to x-a$ des Arguments von φ in eine Phasenmultiplikation

$\tilde{\varphi}(p) \to e^{ip\cdot a}\,\tilde{\varphi}(p)$ übersetzt wurde.

Zwei Irreduzibilitäts-Aspekte sieht man an * sofort:

1. Ist $(D, SL(2,\mathbb{C}), V)$ reduzibel, so auch $(U, \overline{P}_+^{\uparrow}, C^\infty(\mathbb{R}^4, V))$. Denn ist $V' \subset V$ invarianter Teilraum, so auch $C^\infty(\mathbb{R}^4, V')$. Also können wir uns bei der Suche nach irreduziblen Darstellungen von $\overline{P}_+^{\uparrow}$ von vornherein auf irreduzible Darstellungen (D, V) von $SL(2,\mathbb{C})$ beschränken, wie bereits zu Beginn gesagt

2. Unter $\tilde{U}(a,A)$ wird der Träger $T \subset \mathbb{R}^4_p$ von $\tilde{\varphi}$ in den Träger $A^{-1}\cdot T \subset \mathbb{R}^4_p$ von $\tilde{U}(a,A)\tilde{\varphi}$ transformiert. Der lineare Unterraum von Funktionen in $C^\infty(\mathbb{R}^4_p, V)$, die ihren Träger in einer offenen Vereinigung $M = \bigcup_{p\in I} O_p$ von $SL(2,\mathbb{C})$-Orbits

$$O_p := \{A\cdot p \mid A \in SL(2,\mathbb{C})\} \subset \mathbb{R}^4_p$$

hat, ist unter $\overline{P}_+^{\uparrow}$ invariant.

Das bedeutet, dass <u>kein</u> Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R}^4_p, V)$ irreduzibel ist, denn jeder

Träger einer C^∞-Funktion wird von mehr als einem SL(2,C) Orbit geschnitten. Wir müssen also „Verallgemeinerte Funktionen" zulassen, deren Träger auf einzelnen Orbits der SL(2,C) in $\mathbb{R}^4$ konzentriert sind.

Klassifikation der SL(2,C)-Orbits in $\mathbb{R}^4$.

Die SL(2,C) wirkt auf $\mathbb{R}^4$ durch

$$(A,p) \longmapsto A\cdot p := \Pi(A)\,p,$$

wobei $\Pi(A) = L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, die per definierender Darstellung auf $\mathbb{R}^4$ wirkt. Daraus ergeben sich sofort die Orbits:

$O_p^\pm$ für $p^2 = m^2 > 0$, $p^0 \gtrless 0$:

$$- V_p^\pm := \{ p \in \mathbb{R}^4_p \mid p^2 = m^2 > 0,\ p^0 \gtrless 0 \}$$

O_p für $p^2 = 0$, $p^0 \gtrless 0$:

$$- V_0^\pm := \{ p \in \mathbb{R}^4_p \mid p^2 = 0,\ p^0 \gtrless 0 \}$$

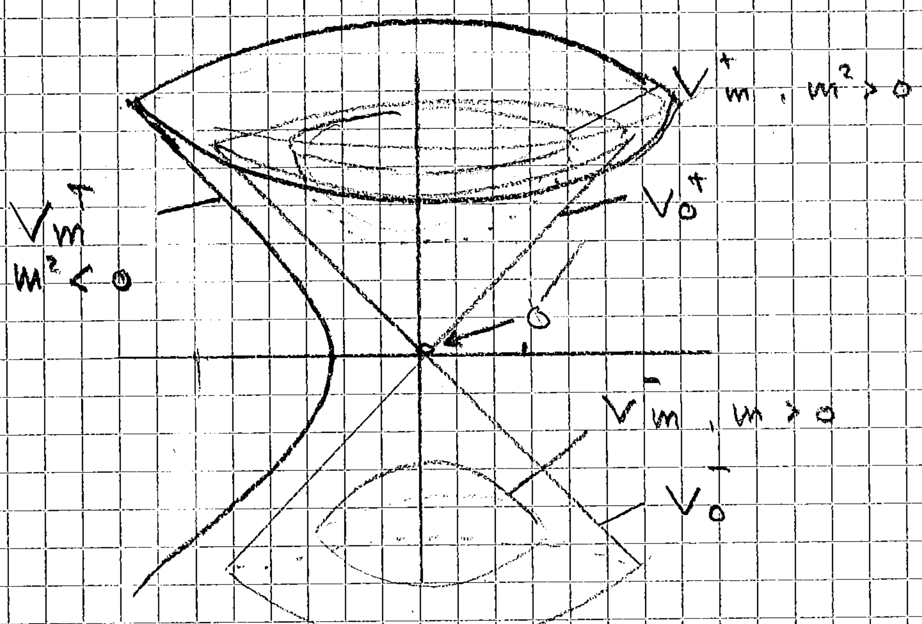
O_p für $p = m^2 < 0$

$$- V_m^\uparrow := \{ p \in \mathbb{R}^4 p \mid p^2 = m^2 < 0 \}$$

und wie immer bei linearen Darst. den Nullvektor

$$O_p \text{ für } p = 0$$

$$O = \{ p \in \mathbb{R}^4_p \mid p = 0 \}.$$



$V_m^\pm$ sind jeweils einschalige raumartige Hyperboloide (Massenschalen), V_m^+ zu positiver Energie p_0, V_m^- zu negativer. $V_0^\pm$ sind der Vorwärts- und Rückwärts-Lichtkegel (im Impulsraum), V^T das einschalige zeitartige Hyperboloid aller raumartigen Vektoren p mit negativen $p^2 = m^2 < 0$ (Tachyonen-Hyperboloid) und letztlich der Null-Impulsvektor O. Insgesamt gibt es also 6 Orbit-Typen $V_m^\pm$, $V_0^\pm$, V^T, O wobei V_m^+ und V_m^- sowie V_0^+ und V_0^- gleiche

Geometrie haben.

Durch $\overline{P}_+^\uparrow$ - Transformationen werden Amplituden $\tilde{\varphi}(p)$ nur innerhalb eines festen Orbits ineinander transformiert (gemischt). Es ist daher natürlich, die d^4p Integration nach Variablensubstitution in eine Integration über m^2 und eine über den durch m^2 charakterisierten Orbit auszuführen. Das auf dem Orbit definierte $SL(2,\mathbb{C})$ invariante Maß sei $d\mu m$, so dass

$$d^4p = dm^2 \wedge d\mu m$$

Auf $V_m^\pm$ und $V_0^\pm$ ist

$$p^0 = \pm (m^2 + \vec{p}^{\,2})^{1/2}$$

$$\Rightarrow dp^0 = \pm \frac{dm^2}{2(m^2+\vec{p}^{\,2})^{1/2}} + \text{Terme} \sim d\vec{p}$$

$$\Rightarrow dp^0 \wedge d^3p = dm^2 \wedge d\mu m$$

mit
$$d\mu m = \frac{d^3p}{2E(\vec{p},m)}$$

und $E(\vec{p},m) := (m^2+\vec{p}^{\,2})^{1/2}$

Auf V^T hat man

$$\|\vec{p}\| = \left((p^0)^2 + |m^2|\right)^{1/2}$$

so dass man hat

$$d^4p = dp^0 \wedge d^3p = dp^0 \wedge d(\|\vec{p}\|) \wedge \|p\|^2 d\Omega$$

und $$d\|\vec{p}\| = \frac{d|m^2|}{2\sqrt{(p^0)^2 + |m^2|}} + \text{Terme} \sim dp^0$$

$$\Rightarrow \quad d^4p = d|m^2| \wedge d\mu_m$$

mit $$d\mu_m = -\frac{1}{2}\left((p^0)^2 + |m^2|\right)^{1/2} dp^0 \wedge d\Omega$$

Wir wählen aber die umgekehrte Orientierung, so dass das Minuszeichen wieder verschwindet

$$\Rightarrow d\mu_m = \begin{cases} \dfrac{d^3p}{2E(\vec{p},m)}, \quad E(\vec{p},m) = (m^2 + \vec{p}^{\,2})^{1/2}, & m^2 \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}\, dp^0 \wedge \left((p^0)^2 + |m^2|\right)^{1/2} d\Omega, & m^2 < 0 \end{cases}$$

$d\Omega$ = Volumenform der $S^2 \in \mathbb{R}^3_{\vec{p}}$.

Also gilt die Zerlegung von φ

$\varphi(X) =$

1) $$\int_{m^2>0} dm^2 \int_{V_m^+} d\mu_m \, e^{-i(E(m,p)X^0-\vec{p}\cdot\vec{X})} \, \tilde{\varphi}_m^+(\vec{p})$$

2) $$+ \int_{m^2>0} dm^2 \int_{V_m^-} d\mu_m \, e^{i(E(m,p)X^0-\vec{p}\cdot\vec{X})} \, \tilde{\varphi}_m^-(\vec{p})$$

3) $$+ \int_{V_0^+} d\mu_0 \, e^{-i(|\vec{p}|X^0-\vec{p}\cdot\vec{X})} \, \tilde{\varphi}_0^+(\vec{p})$$

4) $$+ \int_{V_0^-} d\mu_0 \, e^{i(|\vec{p}|X^0-\vec{p}\cdot\vec{X})} \, \tilde{\varphi}_0^-(\vec{p})$$

5) $$+ \int_{m^2<0} dm^2 \int_{V_m^T} d\mu_m \, e^{-i(p^0X^0-(p_0^2+|m^2|)^{1/2}\vec{n}\cdot\vec{X})} \, \tilde{\varphi}_m^T(p_0,\vec{n})$$

6) $$+ \tilde{\varphi}_0$$

Wobei

$$\tilde{\varphi}^{\pm}_{m}(\vec{p}) := \tilde{\varphi}(p^0 = \pm(m^2 + \vec{p}^2), \vec{p})$$

$$\tilde{\varphi}^{\pm}_{0}(\vec{p})\,\delta(m^2) := \tilde{\varphi}(p^0 = \pm\|\vec{p}\|, \vec{p})$$

$$\tilde{\varphi}^{T}_{m}(p^0, \vec{n}) := \tilde{\varphi}(p^0, \vec{p} = ((p^0)^2 + |m^2|)^{1/2}\,\vec{n})$$

$$\tilde{\varphi}_0\,\delta^{(4)}(p) := \tilde{\varphi}(p \to 0)$$

In physikalischen Anwendungen geht man bisher stets davon aus, dass φ keine Beiträge der Form 5 (tachyonisch) und 6 ($p \equiv 0$) enthält. φ kann nur dann in einem irreduziblen Unterraum von $\overline{P}^{\uparrow}_{+}$ liegen, falls sein Träger auf <u>einem</u> der Orbits $V^{\pm}_{m}$, $V^{\pm}_{0}$ liegt; d.h.

$$\varphi^{\pm}_{m'}(p) = \delta(m'^2 - m^2)\,\tilde{\varphi}_m(\vec{p}) \quad \text{etc.}$$

Sei nun O_m ein Orbit zu einem festen Massenwert m und $\tilde{\varphi} \in L^2(O_m, d\mu_m, V, D)$ eine V-wertige Funktion auf O_m mit quadratintegrablen Komponenten bzgl. einer festen, d.h. vom Punkt $p \in O_m$ unabhängigen, Basis $\{e_a\}$ von V.

Ist $\{e_a \mid a = 1, \ldots, n\}$ Basis von V, dann

$$\tilde{\varphi}(p) = e_a \tilde{\varphi}^a(p)$$

Also

$$(U(a,A)\tilde{\varphi})(p) = e^{ip\cdot a} D(A)(e_a)\, \tilde{\varphi}^a(A^{-1}p)$$

$$= e^{ip\cdot a} e_b D^b{}_a(A)\, \tilde{\varphi}^a(A^{-1}p)$$

d.h. $(U(A)\tilde{\varphi})^a(p) = D^a{}_b(A)\, \tilde{\varphi}^b(A^{-1}p)$

bezüglich der Komponenten der festen Basis $\{e_a\}$.

Wir haben aber die Freiheit, die Basis von V in einer unter Umständen von $p \in O_m$ abhängigen Weise zu wählen; dann

$$\tilde{\varphi}(p) = e_a \tilde{\varphi}^a(p) = e'_a(p)\, \tilde{\varphi}'^a(p)$$

Ist $p_* \in O_m$ ein fest gewählter Referenzpunkt und $\Lambda_p \in SL(2,\mathbb{C})$ so, daß

$$\Lambda_p(p_*) = p$$

was wegen der Transitivität von $SL(2,\mathbb{C})$ auf einem Orbit immer möglich ist [ohne daß damit gesagt sei, daß die Abbildung $\Lambda : O_m \to SL(2,\mathbb{C})$, $p \mapsto \Lambda_p$ stetig ist], dann können wir mit $e_a = e'_a(p^*)$ sehen

$$e'_a(p) = D(\Lambda_p)(e_a)$$

$$= D^b{}_a(\Lambda_p)\, e_b$$

[Wigner Basis(-feld) auf O_m]

Aus

$$e'_a(p)\, \tilde{\varphi}'^a(p) = e_a\, \tilde{\varphi}^a(p) \quad \text{folgt}$$

$$\tilde{\varphi}'^a(p) = D^a{}_b(\Lambda_p^{-1})\, \tilde{\varphi}^b(p)$$

Indem wir von jetzt an mit $\tilde{\varphi}(p) \in \mathbb{C}^n$ die Komponentenfunktionen bezeichnen, haben wir

$$\tilde{\varphi}'(p) = D(\Lambda_p^{-1})\, \tilde{\varphi}(p)$$

Auf diesen wirkt $\tilde{U}(A) := \hat{U}(a=0, A)$ wie folgt:

$$(\tilde{U}(A)\tilde{\varphi})'(p) = D(\Lambda_p^{-1})\,(\hat{U}(A)\tilde{\varphi})(p)$$

$$= D(\Lambda_p^{-1})\, D(A)\, \tilde{\varphi}(A^{-1}p)$$

$$= D(\Lambda_p^{-1} A\, \Lambda_{A^{-1}p})\, \tilde{\varphi}'(A^{-1}p)$$

$$= D(W(A^{-1}\cdot p, A))\, \tilde{\varphi}'(A^{-1}\cdot p)$$

Mit der Wigner-Rotation

$$W(p, A) := \Lambda^{-1}_{A \cdot p} \cdot A \cdot \Lambda_p$$

so dass

$$A = \Lambda_{A \cdot p} \cdot W(p, A) \Lambda^{-1}_p$$

Wir definieren die Stabilisatorgruppe eines Punktes $p \in O_m$ durch

$$\mathrm{Stab}(p) := \{ A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid A \cdot p = p \}$$

Es gilt für $A \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\mathrm{Stab}(A \cdot p) = A \cdot \mathrm{Stab}(p) \cdot A^{-1}$$

Nun ist

$$W(p, A) \in \mathrm{Stab}(p^*) \quad \forall A \in SL(2, \mathbb{C})$$

denn

$$W(p, A)\, p^* = \Lambda^{-1}_{A \cdot p}\, A \cdot \underbrace{\Lambda_p (p^*)}_{p} = p^*$$

Daraus sieht man: D (und damit $\tilde{U}$) ist durch $D|_{\mathrm{Stab}(p^*)}$ bestimmt. Man nennt $\tilde{U}$ bzw. U die von $D|_{\mathrm{Stab}(p^*)}$ induzierte Darstellung (→ Mackey-Theorie)

Im Folgenden beschränken wir uns auf solche Darstellungen D (von $SL(2,\mathbb{C})$ auf V), für die $D|_{Stab(p_*)}$ unitär ist.

Beachte: D ist als endlichdimensionale Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ nie unitär [Vgl. Blatt 3 Aufg. 2], die Einschränkung aber sehr wohl.

Ist $D|_{Stab(p_*)}$ unitär, so auch $\tilde{U}$ bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle \varphi | \phi \rangle := \int_{O_m} d\mu_m \underbrace{[\tilde{\varphi}'(p)]^\dagger \, \tilde{\phi}'(p)}_{\text{Skalarprod. in } \mathbb{C}^n} \quad (*)$$

Klarerweise sind die Translationen unitär (nur Phasen). Für $SL(2,\mathbb{C})$ Transformationen folgt dies aus

$(\tilde{U}(A)\tilde{\varphi}')(p) = D(W(A^{-1}\cdot p, A))\,\tilde{\varphi}'(A^{-1}\cdot p)$,
$W(A^{-1}\cdot p, A) \in Stab(p_*)$ und der Unitarität von $D|_{Stab(p_*)}$, sowie der Invarianz des Maßes $d\mu_m$ unter $SL(2,\mathbb{C})$.

Übersetzt man $(*)$ zurück auf die Komponentenfelder bezüglich der festen Basis $\{e_a \mid 1,\dots,n\}$, so ist mit

$$\tilde{\varphi}'(p) = D(\Lambda_p^{-1})\,\tilde{\varphi}(p)$$

$$\tilde{\phi}'(p) = D(\Lambda_p^{-1})\,\tilde{\phi}(p)$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\phi\rangle = \int_{O_m} d\mu_m \,[\tilde{\varphi}(p)]^+ [D(\Lambda_p^{-1})]^+ D(\Lambda_p^{-1})\,\tilde{\phi}(p)$$

Beachte: $[D(\Lambda_p^{-1})]^+ D(\Lambda_p^{-1})$ hängt nur von p aber nicht von der Wahl der $\Lambda_p \in SL(2,\mathbb{C})$ mit $\Lambda_p p_* = p$ ab. Sind nämlich $\Lambda_p : p_* \to p$, $\Lambda'_p : p_* \to p$ zwei verschiedene Wahlen, so dass $\Lambda_p^{-1} \Lambda'_p \in \mathrm{Stab}(p_*)$, d.h. $\Lambda'_p = \Lambda_p \circ K$, $K \in \mathrm{Stab}(p_*)$, dann

$$[D(\Lambda'^{-1}_p)]^+ D(\Lambda'^{-1}_p) =$$

$$[D(\Lambda_p^{-1})]^+ \underbrace{[D(K^{-1})]^+ D(K^{-1})}_{id} D(\Lambda_p^{-1})$$

$$= [D(\Lambda_p^{-1})]^+ D(\Lambda_p^{-1})$$

da $D|_{\mathrm{Stab}(p_*)}$ unitär.

Beispiel: Träger auf $V_m^\pm$, $m^2 > 0$

(hier geht $m \neq 0$ ein)

Wähle $p_* = \varepsilon m (1, \vec{0}) \in \begin{cases} V_m^+ & \text{für } \varepsilon = +1 \\ V_m^- & \text{für } \varepsilon = -1 \end{cases}$

$$\mathrm{Stab}(p_*) = \{ A \in SL(2,\mathbb{C}) \mid A\, p_*^\mu \sigma_\mu A^+ = p_*^\mu \sigma_\mu \}$$

$$= \{ A \in SL(2,\mathbb{C}) \mid A A^+ = E_2 \} = SU(2)$$

denn $p_*^\mu \sigma_\mu \sim E_2$.

Also gilt nach Def von Λ_p: $\Lambda_p \underbrace{p_*^\mu \sigma_\mu}_{\varepsilon m E_2} \Lambda_p^+ = p^\mu \sigma_\mu$

$$\Lambda_p^+ \Lambda_p = \frac{\varepsilon}{m} p^\mu \sigma_\mu$$

Auf der Massenschale $V_m^\pm$ kann man Λ_p als reinen Boost wählen

$$\Lambda_p = \frac{\varepsilon p^\mu \sigma_\mu + m E_2}{[2 \varepsilon m (\varepsilon m + p^0)]^{1/2}}$$

$$= \frac{m E_2 + \varepsilon p^\mu \sigma_\mu}{[2 m (m + \varepsilon p^0)]^{1/2}}$$

In der Tat: wegen $\sigma_\mu^+ = \sigma_\mu$ ist $\Lambda_p^+ = \Lambda_p$ (Λ_p hermitesch); außerdem

$$\Lambda_p \Lambda_p^+ = \Lambda_p^2 = (m^2 E_2 + 2 \varepsilon m\, p^\mu \sigma_\mu + p^\mu p^\nu \sigma_\mu \sigma_\nu) / [\ldots]$$

$$p^\mu p^\nu \sigma_\mu \sigma_\nu = p_0^2 + \vec{p}^2 + 2 p^0\, \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = p_0^2 + \vec{p}^2 + 2 p^0 p^\mu \sigma_\mu - 2 p_0^2$$
$$= -(p_0^2 - \vec{p}^2) + 2 p^0 p^\mu \sigma_\mu = -m^2 + 2 p^0 p^\mu \sigma_\mu$$

also

$$\Lambda_p \Lambda_p^+ = p^\mu \sigma_\mu 2 (p^0 + \varepsilon m) / [2 \varepsilon m (\varepsilon m + p^0)]$$

$$= \frac{\varepsilon}{m} p^\mu \sigma_\mu$$

$$\det \Lambda_p = (p^0 + \varepsilon m)^2 - \vec{p}^{\,2} / 2 \varepsilon m (\varepsilon m + p^0)$$

$$= (2 m^2 + 2 \varepsilon m p^0) / 2 \varepsilon m (\varepsilon m + p^0)$$

$$= 1$$

$$\mathrm{Spur}\,(\Lambda_p) = 2 m + 2 \varepsilon p^0 / [2 m (m + \varepsilon p^0)]^{1/2}$$

$$= 2 (m + \varepsilon p^0) / [2 m (m + \varepsilon p^0)]^{1/2}$$

$$= [2 (1 + \varepsilon p^0/m)]^{1/2} > 0$$

Für die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von Λ_p gilt also

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = [2 (1 + \varepsilon p^0/m)]^{1/2}$$

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} - 2 [(1 + \varepsilon p^0/m)/2]^{1/2} = 0$$

$$\lambda_1^2 - 2 \lambda_1 [(1 + \varepsilon p^0/m)/2]^{1/2} + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = [(1 + \varepsilon p^0/m)/2]^{1/2} \pm [(-1 + \varepsilon p^0/m)/2]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\varepsilon p^0/m + 1)^{1/2} \pm (\varepsilon p^0/m - 1)^{1/2} \right] > 0$$

Also ergibt sich, dass Λ_p eine pos. def. Hermite'sche Matrix ist, d.h. ein reiner Boost.

Es gilt für $D = D^{(p/2,q/2)}$

$$D(A^+) = [D(A)]^+$$

denn das ist wahr für $D^{(1/2,0)}(A) = A$ (def. Darst.) und $D^{(0,1/2)}(A) = (A^{-1})^+$, und außerdem $(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+$.

Das Skalarprodukt ist also

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{V_m^\varepsilon} d\mu_m [\tilde{\psi}(p)]^+ D^+(\Lambda_p^{-1}) D(\Lambda_p^{-1}) \tilde{\phi}(p)$$

$$= \int_{V_m^\varepsilon} d\mu_m [\tilde{\psi}(p)]^+ D((\Lambda_p \Lambda_p^+)^{-1}) \tilde{\phi}(p)$$

Wie auf S. 6.17 oben gezeigt, ist

$$\Lambda_p \Lambda_p^+ = \frac{\varepsilon}{m} p^\mu \sigma_\mu \qquad \sigma_\mu = (E_2, \vec{\sigma})$$

$$(\Lambda_p \Lambda_p^+)^{-1} = \frac{\varepsilon}{m} p^\mu \tilde{\sigma}_\mu, \qquad \tilde{\sigma}_\mu = (E_2, -\vec{\sigma})$$

$$\Rightarrow \langle \psi, \phi \rangle = \int_{V_m^\varepsilon} d\mu_m [\tilde{\psi}(p)]^+ D\left(\frac{\varepsilon}{m} p^\mu \tilde{\sigma}_\mu\right) \tilde{\phi}(p)$$

mit $d\mu_m = \dfrac{d^3 p}{2(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}}$

Die Darstellung U von $\tilde{P}_+^\uparrow$ ist irreduzibel genau dann wenn $D|_{Stab(p*)}$ irreduzibel ist. Ist $D = D^{(p/2,q/2)}$, dann ist wegen

$$D^{(p/2,q/2)}\Big|_{SU(2)} = D^{p/2} \otimes D^{q/2}$$

$$= \bigoplus_{\substack{l=|p-q| \\ \text{gerade} \\ \text{Schritte}}}^{p+q} D^{l/2}$$

Also ist für $D = D^{(p/2,q/2)}$ $D|_{SU(2)}$ genau dann irreduzibel, wenn $q=0$ oder $p=0$.

Felder die nur ungepunktete bzw nur gepunktete Indizes haben, bilden bereits einen irreduziblen Darstellungsraum. Sind beide Arten von Indizes vorhanden, so ist $D|_{SU(2)}$ reduzibel. Um einen irreduziblen Unterraum herauszuprojezieren, geht man so vor: Zunächst muss $D = D^{(p/2,q/2)}$ sein. Auf Wigner Feldern $\tilde{\varphi}'$ operiert dann $D|_{SU(2)}$. Sei $\Pi_* : V \to V'$ der Projektor auf höchsten Spin Anteil (diesen wählt man konventionell). Dann ist

$$\Pi_* : \tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}'$$

die Zusatzbed. an die $\tilde{\varphi}'$.

Mit $\tilde{\varphi}'(p) = D(\Lambda_p^{-1})\tilde{\varphi}(p)$ ist das äquivalent zu

$$\Pi(p)\,\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\varphi}(p) \qquad (*)$$

wo $\quad \Pi(p) := D(\Lambda_p) \circ \Pi_* \circ D(\Lambda_p^{-1})$

Dieser Projektor hängt wieder nur von p und nicht der Wahl der Λ_p ab. Ist wieder $\Lambda'_p = \Lambda_p \circ K$, $K \in \mathrm{Stab}(p_*) = SU(2)$, dann

$$D(\Lambda'_p) \circ \Pi_* \circ D(\Lambda'^{-1}_p)$$

$$= D(\Lambda_p) \circ \underbrace{K \circ \Pi_* \circ K^{-1}}_{\Pi_*} \circ D(\Lambda^{-1}_p)$$

da K mit Π_* vertauscht.

Daraus folgt auch die $SL(2,\mathbb{C})$-Äquivarianz der Gleichung $(*)$. Denn es ist

$$D(A)\,D(\Lambda_p) = D(A\Lambda_p) = D(\Lambda'_{A\cdot p})$$

$$= D(\Lambda_{A\cdot p})\,D(K), \quad K \in SU(2)$$

Dann ist

$$D(A)\,\Pi(p)\,D(A^{-1}) = \Pi(A\cdot p)$$

und als Folge

$(*) \Longleftrightarrow$

$$D(A)\,\Pi(p)\,D(A^{-1})\,D(A)\,\tilde{\varphi}(p) = D(A)\,\tilde{\varphi}(p)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Pi(A\cdot p)\;D(A)\;\tilde{\varphi}(p) = D(A)\,\tilde{\varphi}(p)$$

bzw $\quad \Pi(p)\,(U(a,A)\,\tilde{\varphi})(p) = (U(a,A)\,\tilde{\varphi})(p)$

Dies zeigt: $(*)$ ist $\bar{P}_+^\uparrow$ - kovariant; d.h.: Erfüllt $\tilde{\varphi}$ die Gleichung, so auch $U(a,A)\,\tilde{\varphi}$ (dieselbe Gleichung).

Irreduzibilitätsaspekte:

1.) Träger von $\tilde{\varphi}$ auf V_m^ε

$\Leftrightarrow \quad (p^2 - m^2)\,\tilde{\varphi}(p) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0$

Massenaspekt

2.) $\quad \Pi(p)\,\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\varphi}(p)$

$(\Pi(i\partial) - 1)\,\varphi(x) = 0$

Spin-Aspekt.

Beispiel : Dirac Gleichung Spin 1/2

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi^A \\ \chi_{\dot{A}} \end{pmatrix}$$

$$\partial^{AA'} \chi_{A'} = \varepsilon \frac{m}{i\sqrt{2}} \phi^A$$

$$\partial_{A'A} \phi^A = \varepsilon \frac{m}{i\sqrt{2}} \chi_{A'}$$

Proca Gleichung Spin 1

$$(\Box + m^2) \varphi^\mu = 0$$

$$\partial_\mu \varphi^\mu = 0$$

Rarita Schwinger Spin $s + \frac{1}{2}$

$$\partial^{AA'} \chi_{A'}{}^{m_1 \cdots m_s}_{\dot{m}_1 \cdots \dot{m}_s} = \frac{\varepsilon m}{i\sqrt{2}} \phi^{A\, m_1 \cdots m_s}_{\dot{m}_1 \cdots \dot{m}_s}$$

$$\partial_{AA'} \phi^{A\, m_1 \cdots m_s}_{\dot{m}_1 \cdots \dot{m}_s} = \frac{\varepsilon m}{i\sqrt{2}} \chi_{\dot{A}}{}^{m_1 \cdots m_s}_{\dot{m}_1 \cdots \dot{m}_s}$$

Spin