Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 1

Aufgabe 1

Unter einem n-dimensionalen *Minkowskiraum* versteht man einen reellen $n \geq 2$ dimensionalen affinen Raum M, dessen zugehöriger Vektorraum V (reell, Dimension n) eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform η der Signatur $(-, +, \cdots, +)$ besitzt. η heißt *Minkowskimetrik*. Wir schreiben im Folgenden auch oft $v \cdot w$ statt $\eta(v, w)$, v^2 statt $\eta(v, v)$ und $\|v\|_\eta$ für $\sqrt{|\eta(v, v)|}$ (obwohl es sich bei $\| \cdot \|_\eta$ nicht um eine Norm im eigentlichen Sinne handelt.)

Erklären Sie jeden der eben benutzen Begriffe in ihrer mathematischen Bedeutung ausführlich.

Aufgabe 2

Eine Vektor $v \in V$ heißt zeit-, licht- oder raumartig, je nachdem v^2 kleiner, gleich oder größer Null ist. Die Mengen der zeit- und lichtartigen Vektoren werde mit $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{L}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} \subset V$ offen ist und dass $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{L}$, wobei $\bar{\mathcal{C}}$ den Abschluss von $\mathcal{C}$ bezeichnet. Mann nennt $\bar{\mathcal{C}}$ auch die Menge der *kausalen* Vektoren. Diese ist identisch mit der Menge der nicht raumartigen Vektoren. Beachten Sie, dass gemäß unserer Definition der Nullvektor lichtartig ist.

Aufgabe 3

Auf der Menge $\mathcal{C}$ der zeitartigen Vektoren definieren wir eine Relation durch $v \sim w \Leftrightarrow v \cdot w < 0$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. [Tipp: Nur die Transitivität ist nicht trivial. Um zu zeigen, dass mit $u \sim v$ und $v \sim w$ auch $u \sim w$ gilt, ist es günstig, u und w in ihre Komponenten parallel und senkrecht zu v zu zerlegen.] Die Äquivalenzklassen heißen $\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$. Es gilt also $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ mit $\mathcal{C}^+ \cap \mathcal{C}^- = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$ offene konvexe Kegel in V sind und damit insbesondere zusammenhängend. Die Äquivalenzklassen $\mathcal{C}^+$ und $\mathcal{C}^-$ entsprechen also gerade den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{C}$.

Die Auszeichnung einer der beiden Komponenten, etwa durch Wahl eines Repräsentanten $v_* \in \mathcal{C}^+$, nennt man eine *Zeitorientierung*. Ein Vektor $v \in \mathcal{C}$ heißt dann positiv- oder zukunftsorientiert, wenn $v \cdot v_* < 0$ und negativ- oder vergangenheitsorientiert, wenn $v \cdot v_* > 0$. Die Abschlüsse von $\mathcal{C}^{(+,-)}$ werden mit $\bar{\mathcal{C}}^{(+,-)}$ bezeichnet, die Randpunkte mit $\mathcal{L}^{(+,-)} = \bar{\mathcal{C}}^{(+,-)} - \mathcal{C}^{(+,-)}$. Entsprechend spricht man von zukunfts-, bzw. vergangenheitsorientierten kausalen und lichtartigen Vektoren, wobei wegen $\bar{\mathcal{C}}^+ \cap \bar{\mathcal{C}}^- = \mathcal{L}^+ \cap \mathcal{L}^- = \{0\}$ zu beachten ist, dass der Nullvektor dann beide Orientierungen trägt.

Aufgabe 4

Sei (M, V, η) Minkowskiraum. Zu jedem Punkt $p \in M$ definieren wir folgende Teilmengen von M:

$$\mathcal{C}_p^{(+,-)} := p + \mathcal{C}^{(+,-)}, \tag{1a}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_p^{(+,-)} := p + \bar{\mathcal{C}}^{(+,-)}, \tag{1b}$$

$$\mathcal{L}_p^{(+,-)} := p + \mathcal{L}^{(+,-)}. \tag{1c}$$

Diese heißen die zu p gehörige chronologische (zeitartige), kausale und lichtartige Zukunft/Vergangenheit. Diese Teilmengen können ihrerseits dazu benutzt werden, weitere (sogenannte „kausale“) Relationen (genannt $\ll$, $<$ und $\lessdot$) auf M zu definieren

$$p < q \Leftrightarrow q \in \bar{\mathcal{C}}_p^+ \Leftrightarrow p \in \bar{\mathcal{C}}_q^-, \tag{2a}$$

$$p \ll q \Leftrightarrow q \in \mathcal{C}_p^+ \Leftrightarrow p \in \mathcal{C}_q^-, \tag{2b}$$

$$p \lessdot q \Leftrightarrow q \in \mathcal{L}_p^+ \Leftrightarrow p \in \mathcal{L}_q^-. \tag{2c}$$

Zeigen Sie, dass $<$ reflexiv ($p < p$), antismmetrisch ($p < q \wedge q < p \Rightarrow p = q$) und transitiv ($p < q \wedge q < r \Rightarrow p < r$) ist, während $\ll$ nicht reflexiv und $\lessdot$ nicht transitiv sind. Zeigen Sie weiter, dass $\lessdot$ mit Hilfe von $\ll$ und ihrer Negation $\not\ll$ definiert werden kann; und genauso umgekehrt $\ll$ mit Hilfe von $\lessdot$ und ihrer Negation $\not\lessdot$:

$$p \lessdot q \Leftrightarrow (p \not\ll q) \wedge (q \ll r \Rightarrow p \ll r), \tag{3a}$$

$$p \ll q \Leftrightarrow (p \not\lessdot q) \wedge (\exists r \in M : p \lessdot r \lessdot q). \tag{3b}$$

Aufgabe 5

Sei V ein reeller Vektorraum mit Minkowskimetrik. Zeigen Sie, dass die folgenden modifizierten Cauchy-Schwarz-Ungleichungen gelten:

$$v^2 w^2 \star (v \cdot w)^2, \quad \text{wobei} \star \begin{cases} \geq & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ raumartig} \\ = & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ lichtartig} \\ \leq & \text{falls } \mathrm{Span}\{v, w\} \text{ zeitartig} \end{cases} \tag{4}$$

Überlegen Sie sich mögliche Dreiecksungleichungen als Folge von (4) mit der verallgemeinerten „Norm“ $\|v\|_\eta := \sqrt{|v^2|}$. Zeigen Sie insbesondere, dass für zeitartige Vektoren v, w gleicher Zeitorientierung die „umgekehrte Dreiecksungleichung“ gilt:

$$\|v + w\|_\eta \geq \|v\|_\eta + \|w\|_\eta. \tag{5}$$

Sie ist Grundlage des sogenannten „Zwillingsparadoxons“.

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Die strenge „umgekehrte“ Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$v^2 w^2 < (v \cdot w)^2 \tag{6}$$

gilt für festes v genau dann für jeden Vektor $w \in V$ der linear unabhängig zu v ist, wenn v zeitartig ist. [Tipp: Zerlegen Sie w in seine Komponenten parallel und orthogonal zu v.]

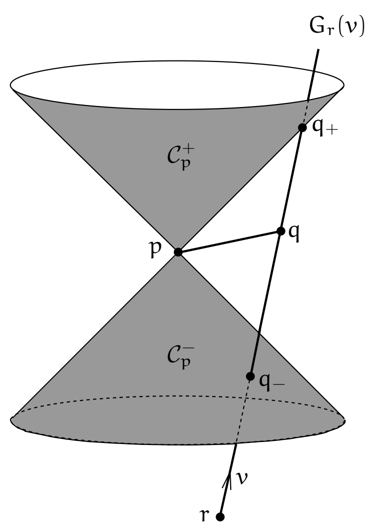
Wir betrachten nun eine Gerade durch einen Punkt $r \in M$ in Richtung $v \in V$:

$$G_r(v) := \{r + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{7}$$

und den Doppellichtkegel $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p^+ \cup \mathcal{L}_p^-$ am Punkte $p \notin G_r(v)$. Zeigen Sie: Ist v zeitartig, so existieren immer genau zwei Schnittpunkte in $G_r(v) \cap \mathcal{L}_p$. Ist hingegen v lichtartig, so existiert genau ein Schnittpunkt falls $p - r \notin v^\perp$ und kein Schnittpunkt falls $p - r \in v^\perp$. [Hier bezeichnet $v^\perp = \{w \in V : w \cdot v = 0\}$ den zu v orthogonalen Unterraum in V.]

Aufgabe 7

Wie zuvor sei $G_r(v)$ eine zeitartige Gerade durch r in Richtung v (vgl. (7)) und $\mathcal{L}_p$ der Lichtkegel mit Vertex an einem Punkt $p \notin G_r(V)$. Wie in der vorherigen Aufgabe gezeigt, schneidet die Gerade den Lichtkegel in zwei Punkten q_+ und q_-. Sei q ein beliebiger Punkt auf $G_r(v)$ zwischen q_+ und q_-; siehe Abbildung.



Zeigen Sie:

$$\|p - q\|_\eta^2 = \|q_+ - q\|_\eta \cdot \|q - q_-\|_\eta \,. \tag{8}$$

Dieser Sachverhalt entspräche einem Analogon des Höhensatzes in der Euklidischen Geometrie, wenn $p - q$ orthogonal zur Geraden $G_r(v)$ stünde, was aber nicht gefordert ist. Die Beziehung (8) gilt für *jeden* Punkt q zwischen q_+ und q_- !

[Tipp: Die Vektoren $(q_+ - p) = (q - p) + (q_+ - q)$ und $(q_- - p) = (q - p) + (q_- - q)$ sind Lichtartig. Also gilt

$$\|q - p\|_\eta^2 = (q_+ - q)^2 + 2(q - p) \cdot (q_+ - q)\,, \tag{9}$$
$$\|q - p\|_\eta^2 = (q_- - q)^2 + 2(q - p) \cdot (q_- - q)\,. \tag{10}$$

Nutzen Sie, dass $q_+ - q$ und $q - q_-$ parallel sind, so dass gilt $q_+ - q = \lambda(q - q_-)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Multiplizieren Sie nun (10) mit λ und addieren Sie das zu (9).]

Zeigen Sie weiter: $p - q$ steht genau dann orthogonal zu $G_r(v)$, d.h. $(p - q) \cdot v = 0$, wenn q in der Mitte zwischen q_+ und q_- liegt. Also sind gemäß der Einsteinschen Synchronisationsvorschrift alle bezüglich $G_r(v)$ zu q gleichzeitigen Ereignisse durch $q + v^\perp$, d.h. die zu $G_r(v)$ orthogonale Hyperebene durch q gegeben.

Aufgabe 8

Sei (V, η) reeller Vektorraum mit Minkowskimetrik und $v \in \mathcal{C}$. Ferner sei $v^\flat := \eta(v, \cdot) \in V^*$ (Dualraum zu V). Zeigen Sie, dass

$$\eta_* := \eta - v^\flat \otimes v^\flat \tag{11}$$

wieder eine Minkowskimetrik ist, deren Menge $\bar{\mathcal{C}}_*$ kausaler Vektoren die Menge $\bar{\mathcal{C}}$ der kausalen Vektoren von η echt enthält. Machen Sie sich die Lagebeziehungen beider Doppelkegel an einer Zeichnung klar.

Aufgabe 9

Die Bezeichnungen sind wie in Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass

$$\Omega := X \otimes Y^\flat - Y \otimes X^\flat \tag{12}$$

Element der Lie-Algebra $\dot{O}(V, \eta)$ der (pseudo-) orthogonalen Gruppe $O(V, \eta)$ („Lorentzgruppe“) von (V, η) ist . Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} O(V,\eta) &:= \big\{A \in GL(V) : \eta(AX, AY) = \eta(X, Y)\ \forall X, Y \in V\big\} \subset GL(V)\,, \\ \dot{O}(V,\eta) &:= \big\{\Omega \in End(V) : \eta(\Omega X, Y) = -\eta(X, \Omega Y)\ \forall X, Y \in V\big\} \subset End(V)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Aufgabe 10

Folgern Sie aus Aufgabe 4, dass jede Bijektion $F : M \to M$ für die gilt $p \lessdot q \Leftrightarrow F(p) \lessdot F(q)$ auch $p \ll q \Leftrightarrow F(p) \ll F(q)$ erfüllt, und umgekehrt. Ist $p - q$ lichtartig und sind $\mathcal{L}_p$ und $\mathcal{L}_q$ die beiden Doppellichtkegel mit Vertizes in p bzw. q, dann ist $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q$ die lichtartige Gerade durch p und q. Folgern Sie damit weiter, dass jede Bijektion F die $\lessdot$ oder $\ll$ im obigen Sinne erhält, lichtartige Geraden auf lichtartige Geraden abbildet. $\star$ Kann man daraus bereits folgern, dass $F : M \to M$ eine affine Abbildung sein muss? $\star$