Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von Domenico Giulini

Blatt 2

Aufgabe 1

Betrachten Sie $\mathbb{R}^3$ als Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit der gewöhnlichen Euklidischen Metrik und global definierten Standard-Koordinaten (x, y, z). Dann sei folgendes Vektorfeld definiert:

$$V = \frac{\partial}{\partial z} + \Omega \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \tag{1}$$

wobei Ω eine nicht verschwindende Konstante ist. Berechnen Sie $V^\flat \wedge dV^\flat$.

Geben Sie einen anschaulichen Grund dafür an, dass dieses Vektorfeld nicht hyperflächenorthogonal ist. Denken Sie sich dazu eine nicht-geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ aus, die überall senkrecht zu V verläuft und deren Endpunkte auf derselben Flusslinie von V liegen. Machen Sie sich klar, dass die Existenz einer solchen Kurve der Integrabilität des Unterbündels $\cup_{p\in\mathbb{R}^3}\{W_p \in T_p\mathbb{R}^3 : W_p \cdot V_p = 0\}$ (d.h. der Hyperflächenorthogonalität) widerspricht.

Aufgabe 2

Sei $\omega \in \bigwedge^k V^*$ eine k-Form über einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V, wobei $k < n$. Sei ferner $\varphi \in V^*$ mit $\varphi \neq 0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\varphi \wedge \omega = 0\,, \tag{2a}$$

$$\omega = \varphi \wedge \sigma\,, \tag{2b}$$

$$\omega|_{\mathrm{Kern}(\varphi)} = 0\,. \tag{2c}$$

Dabei ist (2b) so zu verstehen, dass ein $\sigma \in \bigwedge^{k-1} V^*$ existiert (nicht eindeutig), so dass diese Beziehung gilt. Tipp: Wählen Sie eine Basis $\{\varphi^a\}_{1\leq a\leq n}$ von V^* mit $\varphi^1 = \varphi$ und entwickeln Sie ω nach der dadurch induzierten Basis $\{\varphi^{a_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^{a_k}\}_{1\leq a_1<a_2\cdots<a_k\leq n}$ von $\bigwedge^k V^*$. [Die Äquivalenz von (2a) und (2c) haben wir in der Vorlesung dazu verwendet um $u^\flat \wedge du^\flat = 0 \Leftrightarrow \pi^\perp du^\flat = 0$ zu beweisen.]

Aufgabe 3

Sei $\gamma : \mathbb{R} \subseteq I \to M$ eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurve in der Raumzeit (M, g). γ sei Autoparallele. Es gibt also eine stetige Funktion $k : I \to$

$\mathbb{R}$, so dass $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = k\dot\gamma$. Zeigen Sie: es existiert ein zweimal stetig differenzierbarer Diffeomorphismus $f : I \to I'$ (d.h. f ist eine Bijektion der Intervalle I und I' und sowohl f als auch f^{-1} sind zweimal stetig differenzierbar), so dass die reparametrisierte Kurve $\gamma' = \gamma \circ f^{-1}$ eine Geodätische ist, also $\nabla_{\dot\gamma'}\dot\gamma' = 0$ erfüllt. Ist $t_0 \in I$, so sind das Bildintervall I' und die Funktion f eindeutig durch die Vorgaben $f(t_0) = a \in \mathbb{R}$ und $\dot f(t_0) = b \in \mathbb{R} - \{0\}$ festgelegt, wobei

$$f(t) = a + b\int_{t_0}^{t} dt' \exp\left\{\int_{t_0}^{t'} dt'' k(t'')\right\}. \tag{3}$$

Charakterisieren Sie die Menge der Reparametrisierungen, die Geodätische wieder in Geodätische überführen.

Aufgabe 4

Sei (M, g) ein Raumzeit. Sei $\tilde g$ irgendeine Riemann'sche (positiv definite) Metrik auf M. [Diese existiert immer wenn M parakompakt ist, was bei Mannigfaltigkeiten meist vorausgesetzt wird damit "Zerlegungen der Eins" existieren.] An jedem Punkt $p \in M$ sei $S_p := \{v \in T_pM : \tilde g(v, v) = 1\}$ die Einheitssphäre bezüglich $\tilde g$. Diese ist kompakt, so dass die Funktion $v \mapsto g(v, v)$ eingeschränkt auf S_p ihr Minimum annimmt, wobei klarerweise mit v_p auch $-v_p$ Minimum ist. Zeigen Sie, dass es *genau* zwei Minima $\{v_p, -v_p\}$ gibt. [Tipp: $g|_p$ und $\tilde g|_p$ sind gleichzeitig diagonalisierbar (warum?).] Zeigen Sie mit Hilfe des Beweises aus der Vorlesung, gemäß dem für zeit-orientierbares (M, g) die beiden Vektoren v_p und $-v_p$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $K = \cup_{p\in M}\{v \in T_pM : g(v, v) < 0\} \subset TM$ liegen, dass es für jeden Punkt p eine Wahl $V(p) \in \{v_p, -v_p\}$ gibt, so dass $V : p \mapsto V(p)$ ein glattes, zeitartiges Vektorfeld (für glatte g und $\tilde g$) auf M ist. Zeigen Sie umgekehrt, dass die Existenz eines auf ganz M definierten, zeitartigen Vektorfeldes V die Zeit-Orientierbarkeit von (M, g) impliziert. [Tipp: Für Letzteres betrachten Sie einfach die glatte reellwertige Funktion $V^\flat : TM \supset K \to \mathbb{R}$, deren Wertebereich $\mathbb{R} - \{0\}$ ist, also nicht zusammenhängt.]

Aufgabe 5

Sei M zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Es existiert auf M genau dann eine Lorentzmetrik mit (M, g) zeit-orientierbar, wenn auf M ein nirgends verschwindendes Vektorfeld V existiert. Tipp: Verwenden Sie die Tatsache, dass M immer eine Riemann'sche Metrik $\tilde g$ zulässt und definieren sie deren Hilfe und V eine Lorentzmetrik. Können Sie einfache Beispiele von Mannigfaltigkeiten angeben, die keine Lorentzmetriken zulassen?