Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 3

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Fermi-Walker kovariante Ableitung eines Vektorfeldes X über einer Kurve $\gamma \to M$ gegeben ist durch

$$F_u X = (\nabla_u + \Omega)X \tag{1}$$

wobei u der normierte Tangentenvektor an die Kurve γ ist und

$$\Omega = a \otimes u^\flat - u \otimes a^\flat \,. \tag{2}$$

Hier ist $a := \nabla_u u$ das Beschleunigungsfeld und ∇ die Levi-Civita kovariante Ableitung bezüglich der Metrik g.

Zeigen Sie: Ist $T \in ST^r_s M|_\gamma$ ein allgemeines Tensorfeld über γ, dann ist

$$F_u T = \big(\nabla_u + \dot\rho(\Omega)\big)T\,, \tag{3}$$

wobei $\dot\rho$ die r-fach kontravariante und s-fach kovariante Darstellung der Lie-Algebra der allgemein linearen Gruppe ist. Zeigen Sie damit, dass $F_u g = 0$.

Aufgabe 2

Im Minkowskiraum betrachte man die Kurve γ mit folgender Parameterform bezüglich Standardkoordinaten (t,x,y,z) (affine Koordinaten, bezüglich denen die Minkowskimetrik η die Komponenten $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ besitzt):

$$\gamma(\lambda) = \big(\lambda, R\,\cos(\omega\lambda), R\,\sin(\omega\lambda), 0\big)\,. \tag{4}$$

Dabei sei $R\omega < 1$ angenommen, so dass die Kurve zeitartig ist. Am Kurvenpunkt $p = \gamma(0)$ sei ein Vektor S_0 orthogonal zu $\dot\gamma(0)$ gegeben, etwa $S_0 = (0,1,0,0)$. Dieser werde entlang γ Fermi-Walker transportiert, also gemäß der Gleichung $F_u S = 0$, $u := \dot\gamma/\|\dot\gamma\|$. Berechnen Sie den Vektor $S_* := S(\lambda = 2\pi/\omega)$ und insbesondere den Winkel, den S_* und S_0 einschließen.

Aufgabe 3

Sei (V, η) ein reeller $n > 2$ dimensionaler Vektorraum mit Lorentzmetrik (d.h. η ist eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform der Signatur $(-, +, \cdots, +)$). Sei $T : V \to V$ eine bezüglich η symmetrische lineare Abbildung, d.h. es gilt $\eta(Tv, w) = \eta(v, Tw)$ für alle $v, w \in V$.

Zeigen Sie: Ist $v \in V$ Eigenvektor zu T, dann ist auch der $(n-1)$-dimensionale Unterraum $\{v\}^\perp := \{w \in V : \eta(w, v) = 0\} \subset V$ unter T invariant (als Menge, nicht punktweise). Was bedeutet das geometrisch, wenn v lichtartig ist? Zeigen Sie weiter: Es existiert genau dann eine η-orthogonale Basis von V die T diagonalisiert, wenn T einen zeitartigen Eigenvektor besitzt. Was bedeutet dessen Existenz physikalisch? Geben Sie einen physikalisch-realistischen Energie-Impulstensor an, der keinen solchen Eigenvektor besitzt (s.u.).

Aufgabe 4

Eine ideale Flüssigkeit wird durch ihre lokale Vierergeschwindigkeit u, ihre lokale Ruhemassendichte ρ und ihren lokalen Druck p beschrieben. Die Vierergeschwindigkeit u genügt der üblichen Normierungsbedingung $g(u, u) = -1$ (wir setzen $c = 1$). Ihr Energie-Impulstensor ist, in kontravarianten Komponenten (alle Indizes oben), gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \,. \tag{5}$$

Die gemischten Komponenten T^μ_ν können wir punktweise als die Komponenten einer linearen Selbstabbildung des Tangentialraumes auffassen. Zeigen Sie deren Diagonalisierbarkeit im Sinne der letzten Aufgabe und bestimmen Sie deren Eigenwerte.

Oft stellt man an T (hier aufgefasst als lineare Abbildung) eine sogenannte *Energiebedingung*. Die gängigsten dieser Bedingungen fordern, dass für jeden zeitartigen Vektor v gilt:

$$\eta(v, Tv) \geq 0 \qquad \text{(schwache Energiebedingung)}, \tag{6a}$$

$$\eta(v, Tv) - \tfrac{1}{2}\eta(v, v)\mathrm{Spur}(T) \geq 0 \qquad \text{(starke Energiebedingung)}, \tag{6b}$$

$$\eta(Tv, Tv) \geq 0 \leq \eta(v, Tv) \qquad \text{(Energiedominanzbedingung)}. \tag{6c}$$

Zeigen Sie, dass angewandt auf eine ideale Flüssigkeit diese Bedingungen äquivalent sind zu:

- Schwache Energiebedingung

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad p \geq -\rho \,. \tag{7a}$$

- Starke Energiebedingung

$$p \geq \begin{cases} -\rho/3 & \text{falls } \rho \geq 0, \\ -\rho & \text{falls } \rho < 0. \end{cases} \tag{7b}$$

- Energiedominanzbedingung

$$\rho \geq 0 \quad \text{und} \quad -\rho \leq p \leq \rho \,. \tag{7c}$$

Aufgabe 5

Die Bezeichnungen und Verhältnisse seien wie in Aufgabe 3. Wir bezeichnen ferner wie auf Blatt 1 mit $\mathcal{C} = \{v \in V : \eta(v, v) < 0\} \subset V$ die Menge der zeitartigen Vektoren. Wir wissen von Blatt 1 Aufgabe 3, dass diese in zwei jeweils konvexe Zusammenhangskomponenten $\mathcal{C}^{(+,-)}$ zerfällt. Zeigen Sie, dass die Energiedominanzbedingung (6c) äquivalent ist der Bedingung, dass $T : V \to V$ die Zusammenhangskomponenten $\mathcal{C}^{(+,-)}$ jeweils in die Abschlüsse $\bar{\mathcal{C}}^{(-,+)}$ abbildet (beachte die Umkehrung $(+,-) \to (-,+)$, die der "mostly plus" Signaturkonvention geschuldet ist, gemäß der das Skalarprodukt zeitartiger Vektoren aus der gleichen Zusammenhangskomponente negativ ist.). Stetigkeit impliziert, dass die Abschlüsse $\bar{\mathcal{C}}^{(+,-)}$ unter T jeweils in die Abschlüsse $\bar{\mathcal{C}}^{(-,+)}$ abgebildet werden. Können Sie einen physikalisch-realistischen Energie-Impulstensor $T \neq 0$ in Minkowskiraum angeben, der innere Punkte (also in $\mathcal{C}^{(+,-)}$) auf Randpunkte (also auf $\mathcal{L}^{(-,+)} := \bar{\mathcal{C}}^{(-,+)} - \mathcal{C}^{(-,+)}$) abbildet? Tipp: Ebene elektromagnetische Welle.

Sei $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ eine bezüglich η orthonormierte Basis von V mit zeitartigem e_0. Beweisen Sie nun, dass die Energiedominanzbedingung folgende Ungleichungen impliziert

$$T_{00} \geq |T_{ab}| \tag{8}$$

für alle $a, b \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, wobei $T_{ab} := \eta(e_a, Te_b)$. Tipp: Betrachten Sie Ausdrücke der Form $\eta\big(e_0 \pm e_a, T(e_0 \pm e_b)\big)$ und $\eta\big(e_0, T(e_0 \pm e_a)\big)$. Wie steht es mit der Umkehrung? Impliziert die Gültigkeit von (8) in *jeder/einer* orthonormierten Basis die Gültigkeit der Energiedominanzbedingung?