Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 4

Aufgabe 1

Sei $u \in STM$ ein normiertes zeitartiges Vektorfeld in der Lorentzmannigfaltigkeit (M, g) der Dimension n. Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung definierte, zu u gehörige Feld der Geschwindigkeitsabbildungen $A \in ST^1_1M$ gegeben ist durch

$$A = \pi^{\perp} \nabla u \,. \tag{1}$$

Dabei ist $\pi^{\perp}$ die auf Tensorprodukte fortgesetzte Abbildung der (bezüglich g) orthogonalen Projektionen senkrecht zu u (auf Vektoren also einfach $\pi^{\perp} = \mathrm{id} + u \otimes u^{\flat}$ und auf Kovektoren die dazu transponierte Abbildung). Zeigen Sie weiter, dass das skalare Feld θ der Expansion (in der Vorlesung definiert) durch die Spur dieser Abbildungen gegeben ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung abgeleitete Gleichung für die Änderungsrate der Geschwindigkeitsabbildung entlang einer Integralkurve von u in komponentenfreier Schreibweise folgende Form hat

$$F_u A = -A \circ A + \pi^{\perp} \nabla a + a \otimes a^{\flat} + \mathcal{R}_u \,. \tag{2}$$

Hier bezeichnet $\circ$ die Komposition der Abbildungen, $a := \nabla_u u$ die Beschleunigung und $\mathcal{R}_u := R(\cdot\,,\, u)u \in ST^1_1M$ das Feld von linearen Selbstabbildungen, das aus dem Riemann-Tensor entsteht indem man seinen 2. und 4. Tensorfaktor mit u kontrahiert. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{R}_u$ lineare Selbstabbildungen der zu u orthogonalen Unterräume der Tangentialräume definieren, die bezüglich der auf diesen Unterräumen induzierten (positiv definiten) Metriken symmetrisch sind.

Aufgabe 3

Leiten Sie durch Spurbildung von (2) die Raychaudhuri-Gleichung für beliebige Dimensionen $n \geq 2$ ab. Bleibt die Schlussfolgerung des Satzes 4.2 aus der Vorlesung (Divergenz von $\dot{\theta}$) qualitativ in allen Dimensionen gleich?

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde eine Cauchy-Fläche als abgeschlossene achronale Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ definiert, deren Abhängigkeitsgebiet $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ ganz M ist. Eine Raum-Zeit (M, g) mit Cauchy-Fläche wurde global hyperbolisch genannt.

Zeigen Sie, dass eine Cauchy-Fläche keine Grenzpunkte (im Sinne der Definition 5.4 von Grenzpunkten achronaler Mengen) besitzt und dass eine global hyperbolische Raum-Zeit keine geschlossenen nicht-konstanten kausalen Kurven besitzt (also kausal ist).

Aufgabe 5

Sei g Lorentzmetrik auf M und V ein zeitartiges Vektorfeld, dann auch ist auch ($V^\flat := g(V, \cdot)$)

$$\tilde{g} = g - V^\flat \otimes V^\flat \,, \tag{3}$$

eine Lorentzmetrik mit echt „weiteren" Lichtkegeln in den Tangentialräumen an jedem Punkt (vgl. Blatt 1 Aufgabe 8 und Blatt 2 Aufgabe 5). Zeigen Sie, dass ihr Inverses (also die von $\tilde{g} \in ST^0_2M$ induzierte Metrik $\tilde{g}^{-1} \in ST^2_0M$ die $\tilde{g}^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_{TM}$ genügt) gegeben ist durch

$$\tilde{g}^{-1} = g^{-1} + \frac{V \otimes V}{1 - g(V, V)} \,. \tag{4}$$

Vergleichen Sie die Lichtkegel von g^{-1} und $\tilde{g}^{-1}$ in den Ko-Tangentialräumen. Ist es auch wahr, dass die in einer dieser Familien enthaltenen echt „weiter" als die in der anderen Familie sind? Wenn ja, in welcher? Ist $V^\flat$ zeitartig bezüglich g^{-1} und $\tilde{g}^{-1}$?