Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 5

Aufgabe 1

Man betrachte den $(1+n)$-dimensionalen Minkowski-Raum, der nach Wahl einer affinen Basis mit der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^{1+n}$ mit global definiertem Koordinatensystem $\{x^0, x^1, \cdots, x^n\}$ identifiziert werden kann. Die Minkowski-Metrik nimmt dann folgende Form an:

$$\eta = \eta_{ab}\, dx^a \otimes dx^b\,, \quad \text{mit} \quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1, \cdots, +1)\,. \tag{1}$$

Als raumartige Hyperfläche wähle man

$$H := \{(x^0, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^{1+n} : \eta_{ab} x^a x^b = -1\,, x^0 < 0\}\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Abhängigkeitsgebiete $D^\pm(\Sigma)$ und die Cauchy-Horizonte $H^\pm(\Sigma)$.

Man betrachte alle nach der Eigenlänge s parametrisierten Geodätischen γ die Σ senkrecht schneiden. Dabei sei der Nullpunkt der Parametrisierung so gewählt, dass $\gamma(0) \in \Sigma$ und die Orientierung so, dass $\dot{\gamma}$ zukunftsgerichtet ist im Sinne von $\eta(\gamma, \partial/\partial x^0) < 0$. Es ist dann klar (warum?), dass die Geodätische durch $p \in \Sigma$ gegeben ist durch

$$\gamma_p(s) = p + s n(p)\,, \tag{3}$$

wobei $n(p)$ die zukunftsgerichtete Normale zu Σ am Punkt p ist.

Zeigen Sie, dass in den affinen Koordinaten gilt ($x = x(p)$, $p \in \Sigma$)

$$n(x) = -x^a\, \partial/\partial x^a\,. \tag{4}$$

Die Menge der Tangentialvektoren $\dot{\gamma}_p(s) \in T_{\gamma_p(s)}M$ definiert auf $D(\Sigma) \subset M$ ein normiertes, zeitartiges und geodätisches Vektorfeld u gemäß $u\big(\gamma_p(s)\big) := \dot{\gamma}_p(s)$. Zeigen Sie, dass dieses in affinen Koordinaten die folgende Form hat:

$$u(x) = \frac{-x^a}{\sqrt{-\eta_{bc} x^b x^c}}\, \partial/\partial x^a\,. \tag{5}$$

Berechnen Sie in $D(\Sigma)$ das zu u gehörige Feld der Geschwindigkeitsabbildungen A und damit ω, σ und θ. Untersuchen Sie insbesondere das Verhalten von $\theta(p)$ für $p \to H^+(\Sigma)$.

Aufgabe 2

Sei (M, g) Lorentzmannigfaltigkeit und $u \in T_pM$ normiert und zeitartig. Der Riemann'sche Krümmungstensor am Punkt p sei R_p und $\mathcal{R}_u := R_p(\cdot, u)u \in T_pM \otimes T^*_pM$ die aus der Vorlesung bekannte lineare Abbildung $T_pM \to T_pM$ die u im Kern hat und das orthogonale Komplement $u^\perp \subset T_pM$ auf sich abbildet. (Sie ist uns auch in Aufgabe 2 von Blatt 4 begegnet).

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

$$u_{[a}R_{b]nm[c}u_{d]}\, u^n u^m = 0\,, \tag{6a}$$

$$\mathrm{Sec}(p, E_u) = 0\,, \tag{6b}$$

$$\mathcal{R}_u = 0\,. \tag{6c}$$

Dabei ist $\mathrm{Sec}(p, E)$ die Schnittkrümmung am Punkt p in Richtung der Ebene $E \subset T_pM$ und E_u bezeichnet eine Ebene die u enthält. Gleichung (6c) ist also so zu verstehen, dass die Schnittkrümmung für *alle* u enthaltenden Ebenen E_u verschwindet.

[Tipp: Wählen Sie eine Orthonormalbasis $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ von T_pM mit $e_0 = u$. Zeigen Sie zuerst, dass dann (6a) äquivalent ist der Aussage, dass $R_{\alpha 00 \beta} = 0$ für alle $\alpha, \beta \in \{1, \cdots, n\}$.]

Zeigen Sie weiter: Ist $\mathrm{Ric}_p(u, u) \neq 0$, wobei Ric_p den Ricci-Tensor am Punkt p bezeichnet, dann sind die Bedingungen (6) verletzt.

[Bemerkung zum Sprachgebrauch: In der Literatur nennt man u, bzw. die durch u erzeugte Richtung, *generisch*, wenn $u_{[a}R_{b]nm[c}u_{d]}\, u^n u^m \neq 0$.]