Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 6

Aufgabe 1

Wie in der Vorlesung betrachten wir das Längenfunktional für stückweise C^2-Kurven zwischen einem festen Endpunkt $p_n = \gamma(s_n)$ und entweder einem festen Anfangspunkt $p_1 = \gamma(s_1)$ (genannt 1. Fall) oder einem beliebigen Anfangspunkt auf einer vorgegebenen raumartigen Hyperfläche Σ (genannt 2. Fall). Die extrinsiche Krümmung von Σ in M wird mit K bezeichnet. Betrachtet werden stetige Kurven $\gamma : [s_1, s_n] \to M$ die innerhalb der offenen Teilintervalle (s_i, s_{i+1}), $i = 1, \cdots, (n-1)$ zweimal stetig differenzierbar sind.

Die Hesse'sche des Längenfunktionals, ausgewertet an einem stationären Punkt γ (zeitartige Geodätische in M), wurde in der Vorlesung berechnet zu (der letzte Term tritt nur im 2. Fall auf)

$$
\begin{aligned}
D^2L\big|_\gamma(\vec{W}_1, \vec{W}_2) = &\sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_1}^{s_n} ds\, \vec{W}_1 \cdot \big(\ddot{\vec{W}}_2 + \mathcal{R}_u \vec{W}_2\big) \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} \vec{W}_1 \cdot \big[\dot{\vec{W}}_2\big]_i \\
&+ \vec{W}_1 \cdot \big(\dot{\vec{W}}_2 - K\vec{W}_2\big)\big|_{s_1} .
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dabei bezeichnet ein Vektorpfeil kollektiv die drei „räumlichen“ (d.h. zu $\dot{\gamma}$ senkrechten) Komponenten bezüglich einer orthonormierten und entlang γ parallel verschobenen Basis und ein Punkt zwischen solchen Komponentenvektoren das gewöhnliche Euklidische Skalarprodukt. Ein Punkt über einem Symbol bezeichnet die Ableitung nach der Eigenzeit von γ. Außerdem ist $[X]_i := \lim_{\varepsilon \searrow 0}\big(X(s_i + \varepsilon) - X(s_i - \varepsilon)\big)$ der Sprung der Größe X bei $s = s_i$.

Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck symmetrisch unter Austausch von $\vec{W}_1$ und $\vec{W}_2$ ist. Zeigen Sie weiter: Hat $\mathcal{R}_u$ $(= R(\cdot, u)u)$ keine positiven und K (äußere Krümmung) keine negativen Eigenwerte dann ist die Hesse'sche von L notwendig negativ semidefinit und γ somit maximal. Was bedeuten diese Bedingungen an $\mathcal{R}_u$ (1. und 2. Fall) und K (nur 2. Fall) geometrisch?

Aufgabe 2

Auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2$ betrachte man die Lorentzmetrik

$$g = \cos(2x)\big(dx \otimes dx - dt \otimes dt\big) + \sin(2x)\big(dx \otimes dt + dt \otimes dx\big)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass man diese in folgender Form schreiben kann:

$$g = -\theta^0 \otimes \theta^0 + \theta^1 \otimes \theta^1 \tag{3a}$$

wobei

$$\begin{pmatrix}\theta^0\\ \theta^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(x) & -\sin(x)\\ \sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\ dx\end{pmatrix}\,. \tag{3b}$$

Zeigen Sie weiter, dass die Metrik (2) invariant ist unter 1) allen Translationen in t-Richtung und 2) Translationen um ganzzahlige Vielfache von π in x-Richtung. Das bedeutet, dass die Metrik (2) ebenfalls eine C^∞ Lorentzetrik auf dem Quotienten $T^2(a, n\pi) := \mathbb{R}^2/G(a, n\pi)$ (topologisch ein 2-Torus) definiert, wobei $G(a, n\pi)$ die diskrete Untergruppe der 2-dimensionalen Translationen ist, die durch Translationen um die Strecke $a \in \mathbb{R}$ parallel zur t-Achse und Translationen um das Vielfache $n \in \mathbb{Z}$ von π parallel zur x-Achse erzeugt wird. Zeigen Sie auch, dass $T^2(a, n\pi)$ genau für gerade n zeitorientierbar ist. Zeichnen Sie sich dazu die Lichtkegel in den Streifen $0 \le x \le 2\pi$ des $\mathbb{R}^2$ ein.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die einzige unabhängige Komponente, R_{0101}, des Riemann'schen Krümmungstensor der Metrik (2) bezüglich der orthonormierten Basis (3b). [Tipp: Das geht ruck-zuck mit (3b) und den Cartan'schen Strukturgleichungen.]. Zeichnen Sie den Graphen der skalaren Krümmung im Intervall $0 \le x \le 2\pi$.

Aufgabe 4

Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Energiefunktional der Metrik (2) auf und zeigen Sie damit, dass $x = (2m+1)\pi/4 = konst.$ für ganzzahliges m die Bahnen von Nullgeodätischen sind. Zeigen Sie, dass diese nicht vollständig, sind indem Sie die Differentialgleichung für $t(\lambda)$ explizit integrieren. Dazu ist es wie immer nützlich, die für affine Parametrisierungen gültige Gleichung

$$g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = k \begin{cases} < 0 & \text{zeitartig}\\ = 0 & \text{lichtartig}\\ > 0 & \text{raumartig}\end{cases} \tag{4}$$

zu verwenden.

Können Sie auch die zeitartig- und raumartig-geodätische Unvollständigkeit beweisen? [Tipp: Das geht fast ohne Rechnen. Denken Sie dabei an das Bild der in x-Richtung kippenden Lichtkegel und betrachten Sie z.B. eine zeitartige Geodätische im

Streifen $3\pi/4 < x < 5\pi/4$. Diese kann den Streifen in einer Richtung (zukünftig oder in der Vergangenheit) nicht verlassen und erreicht dort $|t| = \infty$ in einem endlichen affinen Parameterintervall.]

Die geodätische Unvollständigkeit gilt auch für die lokal isometrische aber geschlossene (kompakt und ohne Rand) Mannigfaltigkeit $T^2(a, 2\pi)$. Allerdings kann man wegen der Geschlossenheit nicht sagen, die Geodätische liefe innerhalb eines endlichen affinen Parameterintervalls ins „Unendliche", denn letzteres gibt es nicht. Was also bedeutet dann die geodätische Unvollständigkeit? Beachten Sie, dass die Metrik und die Krümmung C^∞ auf ganz $T^2(a, 2\pi)$ sind. Gibt es glatte, geodätisch unvollständige Riemann'sche Metriken auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten?

Aufgabe 5

Betrachten Sie $T^2(a, 2\pi)$ mit der durch (2) induzierten Metrik. Berechnen Sie die Elemente der $(1+1)$-dimensionalen Lorentzgruppe, die man durch Paralleltransport entlang geschlossener Kurven $t = t_* = \mathrm{konst.}$ und $x = x_* = \mathrm{konst.}$ erhält (Holonomie). Warum ist klar, das Erstere nicht von t_* abhängen. Diskutieren Sie Letztere in Abhängigkeit von x_*, insbesondere für solche Werte von x_*, für die die Kurven lichtartig sind. Wie hängt die in Aufgabe 4 gezeigte lichtartig-geodätische Unvollständigkeit mit diesen Elementen der Lorentzgruppe zusammen?