Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 8

Aufgabe 1

(M, g) sei eine $(1+n)$-dimensionale (pseudo-)Riemann'sche Mannigfaltigkeit und Σ eine nicht-ausgeartete Hyperfläche; d.h. die Einschränkung von g auf $T\Sigma$ ist nicht ausgeartet (Σ ist nicht „lichtartig"). Sei ferner $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ eine angepasste Basis, d.h. $e_0 = n$ ist die Normale von Σ in M und $e_\alpha \in ST\Sigma$ für alle $1 \leq \alpha \leq n$. Zeigen Sie, dass dann $g(e_0, \nabla_{e_\alpha} e_\beta - \nabla_{e_\beta} e_\alpha) = 0$ für alle $1 \leq \alpha, \beta \leq n$.

Seien ferner Γ^a_{bc} die Zusammenhangskoeffizienten des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich der Basis $\{e_0, e_1, \cdots e_n\}$, d.h. $\nabla_{e_b} e_c = \Gamma^a_{bc} e_a$. Zeigen Sie dann, dass die Komponenten der äußeren Krümmung von Σ in M bezüglich dieser Basis gegeben sind durch

$$K_{\alpha\beta} := K(e_\alpha, e_\beta) = \Gamma^0_{\alpha\beta}\,, \tag{1}$$

und zwar unabhängig davon, ob $g(n, n)$ positiv oder negativ ist. Formulieren Sie, wie man anhand von (1) die äußere Krümmung aus der 1. Cartan'schen Strukturgleichung erhalten kann. (Das wäre dann z.B. in Aufgabe 2 und Aufgabe 3 anwendbar.)

Aufgabe 2

Die äußere Schwarzschild-Metrik ist in isotropen Koordinaten gegeben durch

$$g = -\left[\frac{1 - \frac{r_S}{r}}{1 + \frac{r_S}{r}}\right]^2 dt \otimes dt + \left[1 + \frac{r_S}{r}\right]^4 \left(\sum_{\alpha=1}^{3} dx^\alpha \otimes dx^\alpha\right)\,, \tag{2}$$

wobei $r := \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(x^\alpha)^2}$ und r_0 eine Konstante, der Schwarzschild-Radius ($= GM/c^2$), ist. Der Wertebereich aller Koodinaten ist $(-\infty, \infty)$ wobei nicht alle x^α gleichzeitig verschwinden dürfen, also $r = 0$ ausgenommen ist. Dies definiert eine Raumzeit (M, g) mit $M \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\}) \cong \mathbb{R}^2 \times S^2$, die gerade der Vereinigung der Regionen I und III der Kruskal-Mannigfaltigkeit entspricht.

Berechnen Sie die äußere Krümmung $K(\tau)$ von $\Sigma(\tau) := \{p \in M \mid t(p) = \tau\}$ in M und die äußere Krümmung $k(\tau, \rho)$ von $\sigma(\tau, \rho) := \{p \in \Sigma(\tau) \mid r(p) = \rho\}$ in $\Sigma(\tau)$. Zeigen Sie, dass $\Sigma(0)$ und $\sigma(0, r_0)$ total geodätisch sind und geben Sie Symmetrieargumente an, die erlauben, dies auch ohne Ausrechnung der äußeren Krümmungen direkt einzusehen. [Tipp: Die Fixpunktmenge einer Isometrie ist total geodätisch . Warum?]

Aufgabe 3

Betrachten Sie folgende Metrik

$$g = -\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t + \sum_{\alpha=1}^{3} t^{2p_\alpha}\, \mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\alpha \tag{3}$$

auf der Mannigfaltigkeit $M \cong \mathbb{R}^4$, die durch die Wertebereiche $0 < t < \infty$ und $-\infty < x^\alpha < \infty$ gegeben ist. Die Exponenten p_α sind reellwertig und zunächst nicht eingeschränkt. Berechnen Sie die äußere Krümmung der Hyperflächen $\Sigma(\tau) := \{p \in M \mid t(p) = \tau\}$ sowie deren intrinsische (Riemann'sche) Krümmung. [Tipp: Letzteres ist einfacher als Sie vielleicht denken...]

Berechnen Sie den Riemann'schen Krümmungstensor der Raumzeit (M, g) sowie den daraus folgenden Ricci-Tensor. Zeigen Sie, dass letzerer verschwindet, also (M, g) die Einsteingleichungen ohne Materie und ohne kosmologische Konstante löst, wenn

$$\sum_{i=1}^{3} p_\alpha = 1 = \sum_{i=1}^{3} p_\alpha^2\,, \tag{4}$$

und dass die Raumzeit genau dann flach ist wenn zwei der drei Exponenten p_α verschwinden (der verbleibende Exponent ist dann notwendig gleich 1).

Interpretieren Sie (4) geometrisch als Gleichungen im $\mathbb{R}^3$ der Parameter (p_1, p_2, p_3) und zeigen Sie, dass die Lösungsmenge eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist (welche?). Charakterisieren Sie diese und zeigen Sie insbesondere, dass mit Ausnahme des bereits diskutierten flachen Falles zwei der p_α Parameter positiv und der verbleibende negativ ist. Klassifizieren Sie damit das Verhalten der Geometrie im Limes $t \to 0$. Ist (M, g) für alle mit (4) verträglichen Werte der Exponenten zeitartig geodätisch unvollständig? Was passiert mit räumlichen Volumina?