Übungen zur Vorlesung

Differentialgeometrische Strukturen auf Raumzeiten und Singularitätentheorie

von DOMENICO GIULINI

Blatt 9

Aufgabe 1

Sei (M, g) Raumzeit und $\ell \in STM$ zukunftsgerichtet und lichtartig. Sei $n \in STM$ ein weiteres lichtartiges Vektorfeld mit $g(\ell, n) = -1$. Zeigen Sie, dass n ebenfalls zukunftsgerichtet sein muss und beschreiben Sie die verbleibenden Freiheiten in der Wahl von n.

Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement der linearen Hülle von ℓ und n am Punkte $p \in M$, $S_p := \left[\mathrm{Span}\{\ell(p), n(p)\}\right]^\perp \subset T_pM$, raumartig ist (für jedes p). Sei $\pi_p^\perp : T_pM \to S_p$ die orthogonale Projektion. Zeigen Sie (wie immer ist $X^\flat = g(X, \cdot)$)

$$\pi^\perp = \mathrm{Id}_{TM} + \ell \otimes n^\flat + n \otimes \ell^\flat \,. \tag{1}$$

Wir definieren die Vortizität ω des Vektorfeldes ℓ durch

$$\omega := \pi^\perp d\ell^\flat := d\ell^\flat(\pi^\perp\cdot, \pi^\perp\cdot) \,. \tag{2}$$

Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen mit (1) folgende Identität (hier und im Folgenden bezeichnet i_ν die Kontraktion des ersten Tensorfaktors mit ν)

$$\omega := -i_n(\ell^\flat \wedge d\ell^\flat) + n^\flat \wedge \pi^\perp \nabla_\ell \ell^\flat \tag{3}$$

Zeigen Sie damit: Ist ℓ autoparallel, dann verschwindet die Vortizität gebau dann wenn ℓ hyperflächenorthogonal ist; d.h.,

$$\omega = 0 \Leftrightarrow \ell^\flat \wedge d\ell^\flat = 0 \,. \tag{4}$$

(Beachte, dass lichtartige ℓ tangential zu den orthogonalen Hyperflächen liegen.)

Aufgabe 2

Sei wieder $\ell \in STM$ lichtartig. Zeigen Sie

$$L_\ell \ell^\flat = \nabla_\ell \ell^\flat = (\nabla_\ell \ell)^\flat \tag{5}$$

und damit

$$i_\ell(\ell^\flat \wedge d\ell^\flat) = -\ell^\flat \wedge (\nabla_\ell \ell)^\flat \tag{6}$$

Beweisen Sie damit, dass lichtartige und hyperflächenorthogonale Vektorfelder autoparallel sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ein lichtartiges Vektorfeld ist genau dann hyperflächenorthogonal wenn es vortizitätsfrei und autoparallel ist.