

Dreidimensionale geometrische und topologische Aspekte des Anfangswertproblems der Allgemeinen Relativitätstheorie

Domenico Giulini
Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik

Das Anfangswertproblem in der ART

- Die 10 Einstein-Gleichungen

$$G(g) := \text{Ric}(g) - \frac{1}{2}g S(g) = \kappa T$$

entsprechen 6 (unterbestimmt hyperbolischen) Evolutionsgleichungen und 4 (unterbestimmt elliptischen) Zwangsbedingungen an die Anfangsdaten:

$$\text{div}_g G(g) \equiv 0 \quad (\text{Bianchi Id.})$$

$$\Leftrightarrow \partial_t G^{tv} \equiv -\partial_k G^{kv} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} G^{\sigma v} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} G^{\mu\sigma}$$

$\Rightarrow G(\perp, \perp)$ und $G(\perp, \parallel)$ enthalten keine 2. Zeitableitungen.

- Anfangswertproblem:

- Wähle 3-d Mannigfaltigkeit M ,
- Riemannsche Metrik h auf M ,
- symmetrisches Tensorfeld 2. Stufe K , so dass

$$|K|_h^2 - (\text{Spur}_h K)^2 - S(h) = -2\kappa T(\perp, \perp),$$

$$\text{div}_h(K - h \text{Spur}_h K) = \kappa T(\perp, \parallel).$$

- Bestimme aus evol. Gl. Lösung der Einstein-Gleichungen:

$$g(x, t) = -dt^2 + h(x, t).$$

Lösungsstrategien

- Betrachte (relevanten) Spezialfall

$$T = 0 \quad \text{reine Gravitation ,}$$

$$K = 0 \quad \text{Zeitsymmetrie ,}$$

$$h = \phi^4 h_f \quad \text{konform flach .}$$

Dann sind Zwangsbedingungen äquivalent zu $\Delta_f \phi = 0$.

- Betrachte sphärische Inversionsabbildungen auf $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$I_1 : (r, \theta, \varphi) \mapsto \left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right)$$

$$I_2 : (r, \theta, \varphi) \mapsto \left(\frac{a^2}{r}, \pi - \theta, \varphi + \pi\right)$$

und auf Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $J_{1,2} : f \rightarrow \frac{a}{r}(f \circ I_{1,2})$.

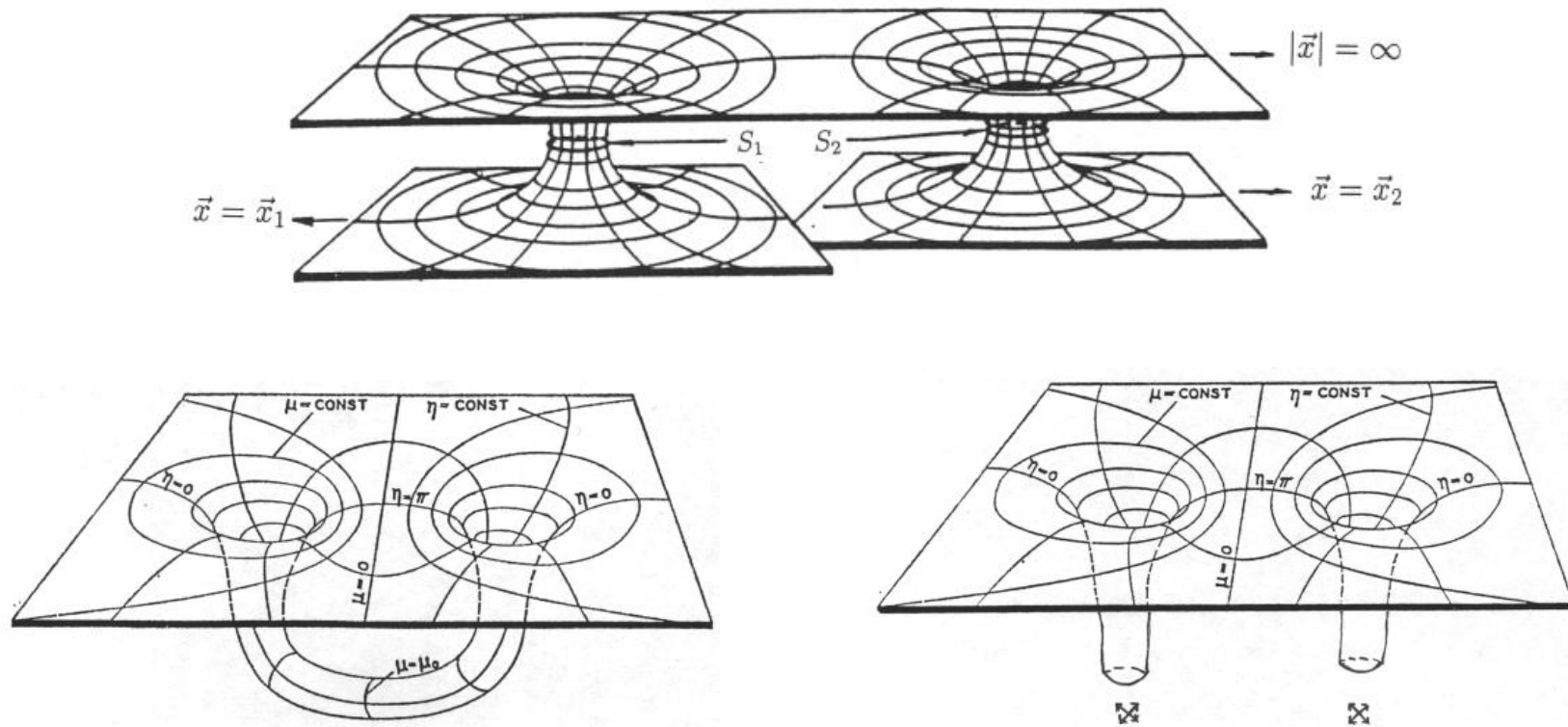
Dann gilt

$$\Delta_f \circ J_{1,2} = \left(\frac{a}{r}\right)^4 J_{1,2} \circ \Delta_f ,$$

$$I_{1,2}^*(\phi^4 h_f) = (J_{1,2}(\phi))^4 h_f ,$$

so dass man damit eine Fülle (lokal) inversionssymmetrischer Metriken „klempnern“ kann.

Topologien für zwei schwarze Löcher



Riemannsche Strukturen

- Physikalisch interessieren asymptotisch flache 3-d Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einem Ende. Betrachte stets einpunktige (Punkt = ∞) Kompaktifizierung M .
- Relevante Symmetriegruppen sind

$$D_\infty(M) = \{\phi \in \text{Diff}^+(M) \mid \phi(\infty) = \infty\},$$

$$D_F(M) = \{\phi \in D_\infty(M) \mid T\phi|_\infty = \text{id}\}.$$

- Wir interessieren uns für $Q := \text{Riem}(M)/D_F(M)$, z.B. topologisch. Betrachte dazu D_F -Hauptfaserbündel mit zusammenziehbarem Totalraum:

$$D_F(M) \xrightarrow{i} \text{Riem}(M) \xrightarrow{p} Q$$

$$\text{so dass } \pi_n(Q) \cong \pi_{n-1}(D_F(M)) \quad \text{für } n > 1$$

$$\text{und } \pi_1(Q) \cong \pi_0(D_F(M)) := D_F(M)/D_F^0(M).$$

⇒ Wir wollen uns näher mit folgenden Gruppen von Abbildungsklassen („Homötopiegruppen“) beschäftigen:

$$\mathcal{H}_\infty(M) := D_\infty(M)/D_\infty^0(M),$$

$$\mathcal{H}_F(M) := D_F(M)/D_F^0(M).$$

Die Faserungen von $D = \text{Diff}$ durch D_∞ und D_F

$$\begin{array}{ccc}
 D_\infty(M) & \xrightarrow{i} & D(M) \\
 & & \downarrow p \\
 & & M
 \end{array}$$

$$p(\phi) := \phi(\infty)$$

$$\begin{array}{ccc}
 D_F(M) & \xrightarrow{\tilde{i}} & D(M) \\
 & & \downarrow \tilde{p} \\
 & & FM
 \end{array}$$

$$\tilde{p}(\phi) := T\phi(f_\infty)$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \pi_2 M & \longrightarrow & \pi_1 D_\infty & \longrightarrow & \pi_1 D & \xrightarrow{p_*} & \pi_1 M & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_0 D_\infty & \xrightarrow{i_*} & \pi_0 D & \longrightarrow & 1 \\
 \dots & \longrightarrow & \pi_2 FM & \longrightarrow & \pi_1 D_F & \longrightarrow & \pi_1 D & \xrightarrow{\tilde{p}_*} & \pi_1 FM & \xrightarrow{\tilde{\partial}_*} & \pi_0 D_F & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & \pi_0 D & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

Allgemeine Vorgehensweise

- Angelpunkt ist die Abbildung

$$h_\infty : \mathcal{H}_\infty(M) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1 M)$$

$$[\phi] \mapsto ([\gamma] \mapsto [\phi \circ \gamma]) .$$

- Man hat z.B.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \pi_1 M / \text{Im}(p_*) & \xrightarrow{\partial_*} & \mathcal{H}_\infty(M) & \xrightarrow{p_*} & \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow q & & \downarrow h_\infty & & \downarrow h & & \\
 1 & \longrightarrow & \text{Inn}(\pi_1 M) & \longrightarrow & \text{Aut}(\pi_1 M) & \longrightarrow & \text{Out}(\pi_1 M) & \longrightarrow & 1
 \end{array}$$

und verschafft sich darüber Informationen über das Bild und den Kern von h_∞ .

- Wichtiger Input ist oft die HI-Eigenschaft: „Homotopie \Rightarrow Isotopie“. Es gilt z.B. der Satz:

Ist M eine Primmannigfaltigkeit mit HI-Eigenschaft, dann ist q ein Isomorphismus und h_∞ injektiv. Ist M eine Haken-Mannigfaltigkeit, dann ist h_∞ auch surjektiv auf $\text{Aut}^+(\pi_1 M)$.

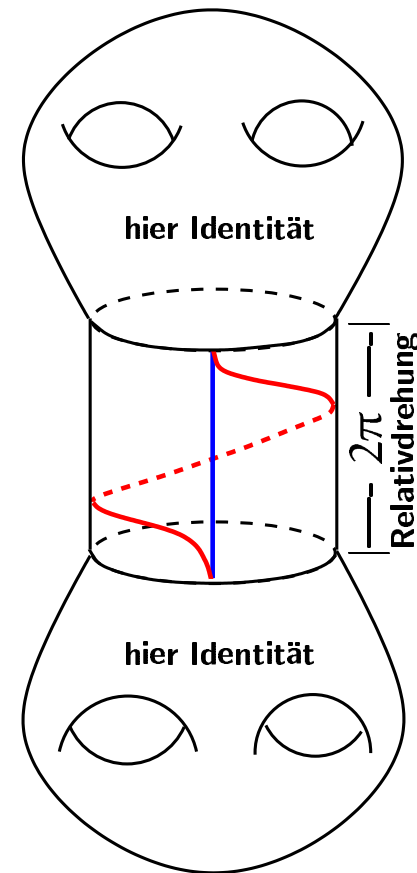
Spinorielle Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{ccc}
 D_F(M) & \xrightarrow{i} & D_\infty(M) \\
 & & \downarrow p \\
 & & GL_3^+(\mathbb{R})
 \end{array}$$

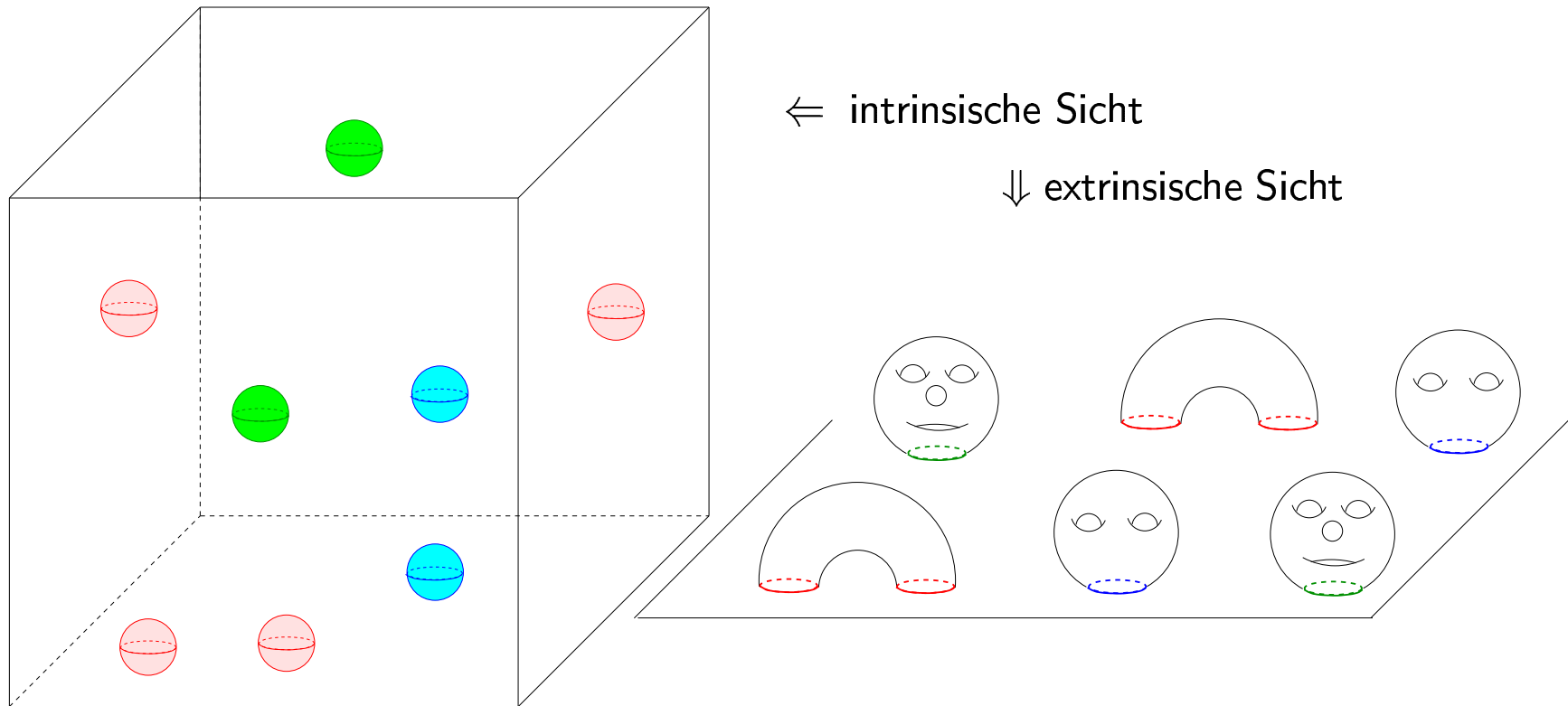
$$p(\phi) := T\phi|_\infty$$

⇒ Entweder

1. $\mathcal{H}_F(M) \cong \mathcal{H}_\infty(M)$, oder
2. $\mathcal{H}_F(M)$ ist eine \mathbb{Z}_2 -Erweiterung von $\mathcal{H}_\infty(M)$. In diesem Fall heißt M „spinoriell“.



Zusammenhängende Summen

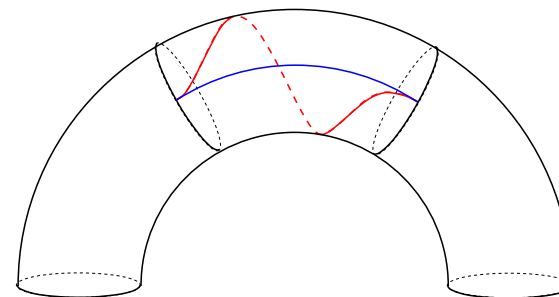
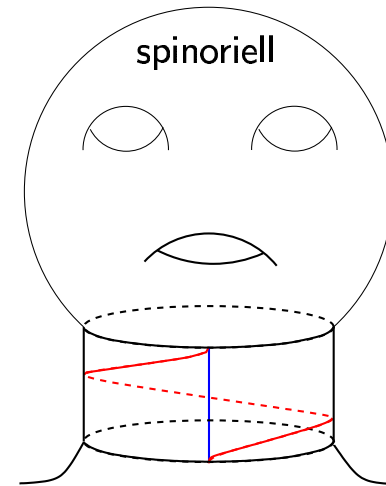


„Physikalische“ Sichtweise

- Sei M die zusammenhängende Summe von n unterschiedlichen Prim-Mannigfaltigkeiten mit jeweiliger Multiplizität m_i .
- In Falle „undurchdringlicher“ Teilchen wäre physikalische Symmetriegruppe

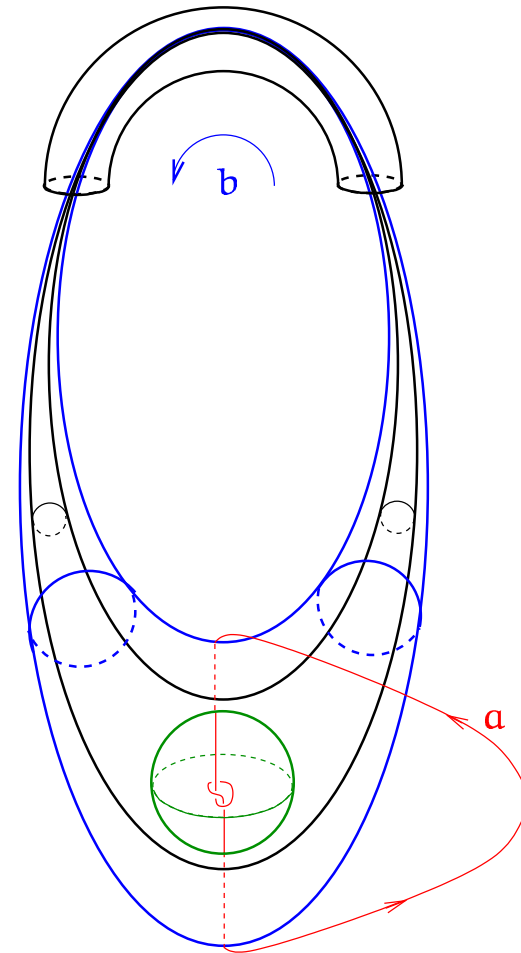
$$\prod_{i=1}^n G_i^{m_i} \times \prod_{i=1}^n S_{m_i}$$

- $\mathcal{H}_F(M)$ beinhaltet zusätzlich aber auch „Slides“ (siehe Bild auf nächster Seite).
- Sind alle Prim-M. vom HI-Typ (und keine „falschen“ Sphären), so wird $\ker(h_\infty)$ von offensichtlichen „Dehn-Twists“ erzeugt; siehe Bild rechts \longrightarrow



„Slides“

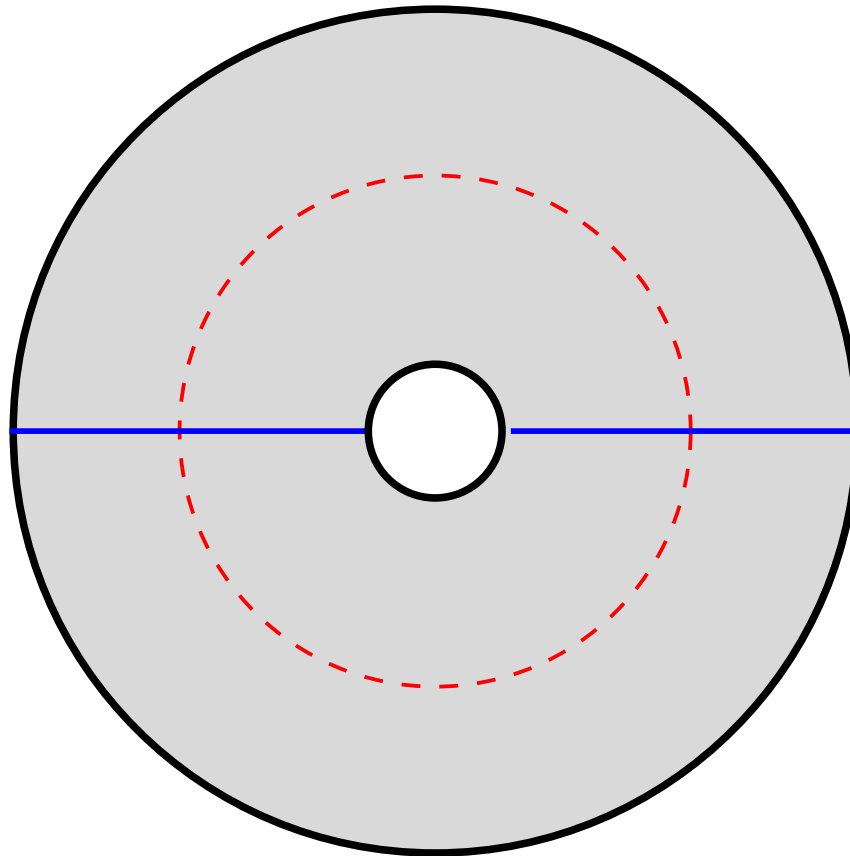
- Interne Diffeos und Permutationen diffeomorpher Primfaktoren erzeugen „Teilchengruppe“. Diese läßt „innen“ und „außen“ invariant.
- Die Existenz von Slides zerstört dieses „Teilchenbild“ in einem vom Primgehalt abhängigen Maße. Slides erzeugen Konjugationen, im Bild rechts: $a \mapsto bab^{-1}$. Genauer ist $S = \text{id}$ innerhalb schwarzen und außerhalb blauen Torus. Dazwischen gilt (in Torus-Koordinaten) $S : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho, \theta, \varphi + \beta(\rho) 2\pi)$.
- Endliche Präsentationen von $\mathcal{H}_F(M)$ erhält man durch die von $\text{Aut}(*_i G_i)$ (sofern $\text{Aut}(G_i)$ endlich präsentiert).



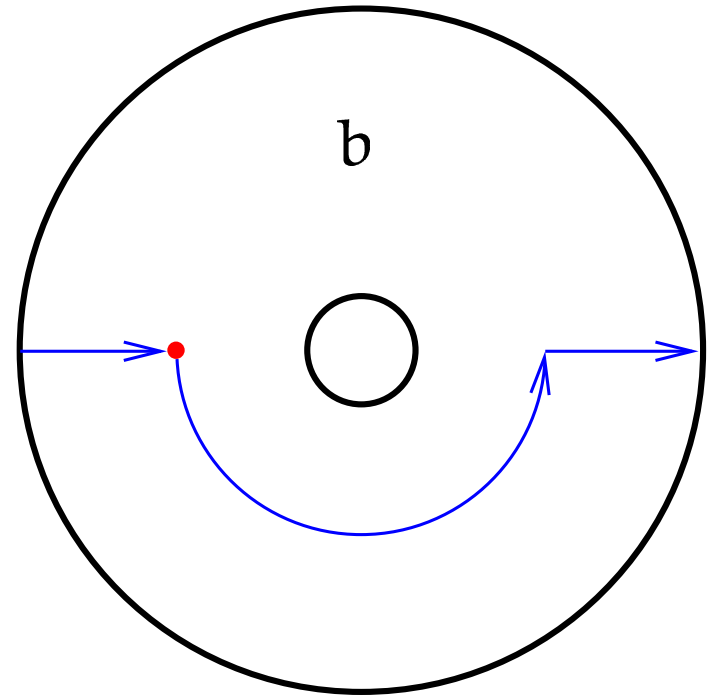
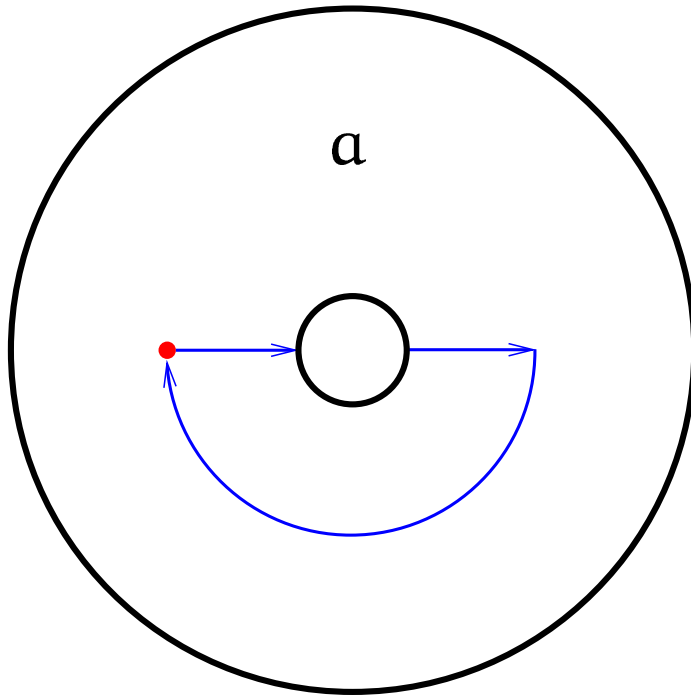
Einige typische Ergebnisse

- Sei $M = \#_n S^1 \times S^2$, dann ist $\pi_1 M \cong F_n$ und $\mathcal{H}_F(M) \cong \text{Aut}(F_n)$. Letztere besitzt bekannte Präsentation mit 4 Erzeugern. Ihr Quotient bez. normalen Abschluss der Slides ist $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, erzeugt durch Dehn-Twist und Austausch (bez. „Drehung“). Für jedes homomorphe Bild B von \mathcal{H}_F sind nun folgende Aussagen äquivalent:
1) B ist abelsch, 2) alle Slides liegen im Kern, 3) Austausch = „Drehung“, d.h es gilt eine „Spin-Statistik-Korrelation“.
- Sei $M = \#_n \mathbb{R}P^3$, dann ist $\pi_1 M \cong *_n \mathbb{Z}_2$ mit ebenfalls bekannte Präsentation durch 3 Erzeuger. Ihr Quotient bez. normalen Abschluss der Slides ist S_n (Teilchengruppe).
- Verallgemeinerungen davon (m.H.v. Fouxe-Rabinovich-Präsentation):
 - Sind mindestens drei Henkel ($S^1 \times S^2$) in der Primzerlegung von M , so ist der normale Abschluss der Slides eine perfekte Untergruppe.
 - Ist keine Henkel ($S^1 \times S^2$) in der Primzerlegung, so ist \mathcal{H}_F ein semidirektes Produkt der Teilchengruppe und des normalen Abschlusses der Slides.

Beispiel: $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$

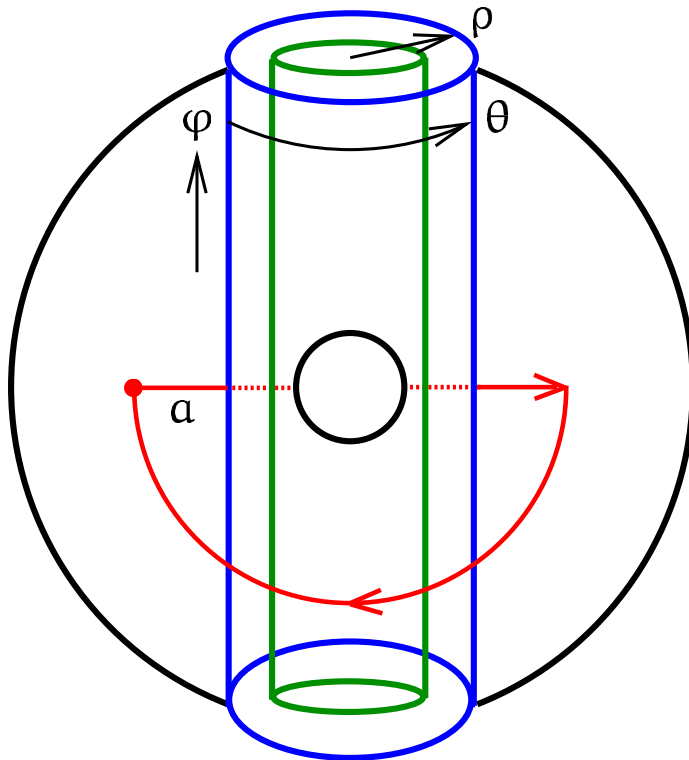


Fundamentalgruppe



$$\underbrace{\langle a, b \mid a^2 = 1 = b^2 \rangle}_{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2} = \underbrace{\langle a, c \mid a^2 = 1, aca^{-1} = c^{-1} \rangle}_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}}, \quad c := ab$$

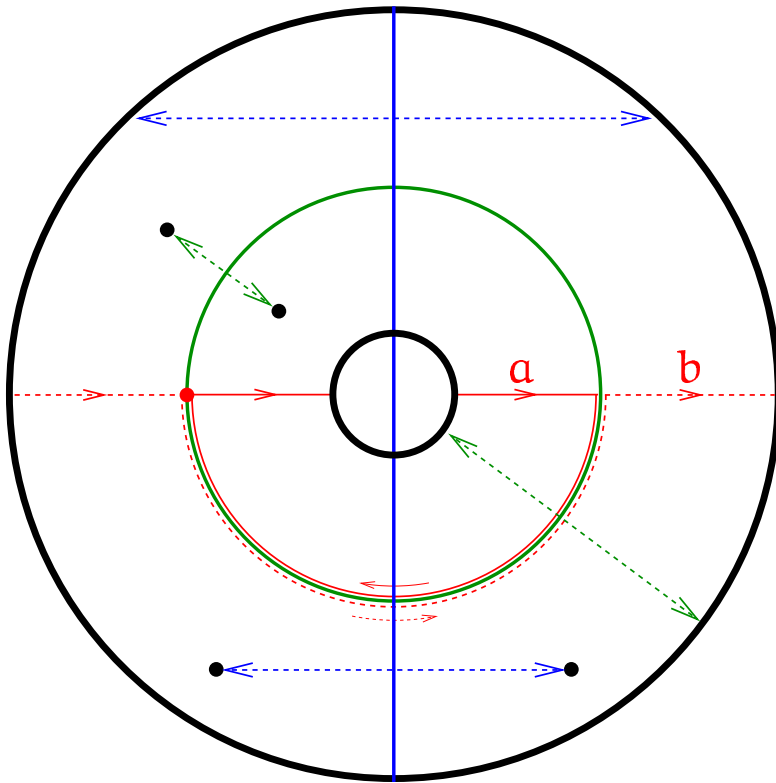
Erzeuger der Gruppe o.e. Abbildungsklassen I



$$(\rho, \theta, \varphi) \sim (\rho, \theta + \pi, \varphi + 2\pi)$$

- Sei β glatte Stufenfunktion zwischen den Werten 0 (für $\rho > \rho_{\text{blau}}$) und 1 (für $\rho < \rho_{\text{grün}}$). Definiere
 $\text{Diff} : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto$
 $(\rho, \theta + \pi\beta(\rho), \varphi + 2\pi\beta(\rho)).$
- Repräsentiert $S \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$
 $S : (a, b) \mapsto (bab^{-1}, b).$

Erzeuger der Gruppe o.e. Abbildungsklassen II



$E_1 :=$ Spiegelung an blauer Ebene

$$\{a, b\} \mapsto \{a^{-1}, b^{-1}\} = \{a, b\}$$

$E_2 :=$ Inversion an grüner Sphäre

$$\{a, b\} \mapsto \{b^{-1}, a^{-1}\} = \{b, a\}$$

$\Rightarrow E := E_1 \circ E_2 \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$

$$\{a, b\} \mapsto \{b, a\}$$

Die GdA und ihre irreduziblen linearen Darstellungen

- Die Gruppe der Abbildungsklassen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{GdA} &\cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle E, S \mid E^2, S^2 \rangle. \end{aligned}$$

- $\Rightarrow ES + SE \subset \text{Zentrum G-Algebra.}$
- $\Rightarrow \{1, E, S, ES\}$ erzeugen Algebra irreduzibler Darsteller.
- \Rightarrow Irreduzible lineare Darstellungen sind höchstens 2-dimensional.

- Die irreduziblen Darstellungen sind:
 $E \mapsto \pm 1, S \mapsto \pm 1$ und

$$\begin{aligned} E &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ S &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $0 < \theta < \pi$.

- \Rightarrow Es existieren zwei „Statistik-Sektoren“, die durch S „gemischt“ werden; θ ist der „Mischungswinkel“.