

# **Kosmische Kreisel**

## **Inertialsysteme und Gravitomagnetismus**

Domenico Giulini  
Physikalisches Institut  
Universität Freiburg

# Das Galilei–Newton'sche Trägheitsgesetz

„Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig-geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.“

*Jedes Lehrbuch*

- Gibt es und wie erkennt man kräftefreie Körper ?
- Bezogen auf welches räumliche Bezugssystem ?
- Bezogen auf welches Zeitmaß ?

## Das Galilei–Newton'sche Trägheitsgesetz

„Voneinander hinreichend entfernte materielle Punkte bewegen sich geradlinig gleichförmig – vorausgesetzt, daß man die Bewegung auf ein passend bewegtes Koordinatensystem bezieht und daß man die Zeit passend definiert.

Wer empfindet nicht das Peinliche einer solchen Formulierung? Den Nachsatz weglassen aber bedeutet eine Unredlichkeit.“

*Albert Einstein, 1920*

## James Thomson und Peter Guthrie Tait

„A set of points move, Galilei wise, with reference to a system of co-ordinate axes; which may, itself, have any motion whatever. From observation of the relative positions of the points, merely, to find such co-ordinate axes.“

*P. G. Tait, 1884*

# Ludwig Lange (1863 - 1936)

„Ein zu Unrecht Vergessener“

**Definition** Ein Koordinatensystem heisst Inertialsystem, wenn sich ihm gegenüber drei von einem gemeinsamen Punkt nicht koplanar weggeschleuderte kräftefreie Massenpunkte auf Geraden bewegen.

**Theorem** Bezüglich eines so festgelegten Inertialsystems ist die Bahn jedes kräftefreien Massenpunktes eine Gerade.

**Definition** Eine Zeitskala heisst Inertialzeitskala, wenn bezüglich ihr ein kräftefreier Massenpunkt in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurücklegt.

**Theorem** Bezüglich einer so festgelegten Inertialzeitskala ist die Bewegung jedes kräftefreien Massenpunktes gleichförmig.

L. Lange, 1886

# Welches astronomisch bevorzugte Referenzsystem ist auch ein Inertialsystem ?

- ICRS/F (International Celestial Reference System/Frame; 1989):  $> 600$  extragalaktische Radioquellen, die mit VLBI (Very Large Baseline Interferometry) vermessen werden; Genauigkeit  $< 0,1$  mas (mas=Millibogensekunde). Ist die zur Zeit beste Realisierung eines „global nichtrotierenden Bezugssystems“.
  - HIPPARCOS (High Precision PARalax COLlecting Satellite; 1989-93): 120 000 galaktische Quellen; Genauigkeit:  $< 1.0$  mas. Steigerung um 2 Größenordnungen durch ESA-Mission GAIA in Vorbereitung, deren Start für 2009 angesetzt ist.
- ⇒ Galaktische Rotation:  $T = 225 \cdot 10^6$  y  $\Rightarrow \Omega = 5,76$  mas/y.
- ⇒ Kann das galaktische Referenzsystem dynamisch als nicht-inertial nachgewiesen werden ?

# Newton versus Einstein

## NEWTON

Feld:  $\varphi$  (Skalar, Spin 0)

$$\Delta\varphi = 4\pi G \rho$$

$$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\varphi$$

## EINSTEIN

Feld:  $g_{ab}$  (Tensor 2. Stufe, Spin 2)

$$G^{ab}(g, \partial g, \partial^2 g) = \frac{8\pi G}{c^4} T^{ab}$$

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a(g, \partial g) \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

Newton: Gravitation ist eine Kraft, d.h. verursacht Abweichungen von Trägheitsbewegungen; die Trägheitsstruktur ist unabhängig davon global definiert (absoluter Raum).

Einstein: Gravitation ist identisch mit der Trägheitsstruktur, also keine Kraft im Newtonschen Sinne. Inertialsysteme sind lokal (als Feld!) definiert und können u.U. relativ zueinander beschleunigt sein.

## ART: $T^{ab}$ als Quelle des Gravitationsfeldes

$$T^{ab} = \left( \begin{array}{c|c} W & \frac{1}{c} \vec{s}^\top \\ \hline c \vec{g} & \sigma_{\alpha\beta} \end{array} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} W : \text{Energiedichte} \\ \vec{s} : \text{Energiestromdichte} \\ \vec{g} : \text{Impulsdichte} \\ \sigma_{\alpha\beta} : \text{Impulsstromdichte} \\ \quad \quad \quad (-\text{Spannungstensor}) \end{array} \right.$$

## Formale Analogie zur Elektrodynamik

Sei  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  = Minkowski-Metrik.

Setze  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ , mit  $h_{ab}$  Störung von der Form

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} =: \frac{2}{c^2} \phi \quad \text{und} \quad h_{0\alpha} =: -\frac{1}{c} A_\alpha$$

Mit  $\vec{E} := -\vec{\nabla}\phi$  und  $\vec{B} := \vec{\nabla} \times \vec{A}$  sind Einstein-Gl. in linearer Ordnung und für den stationären Fall äquivalent zu ( $\rho := W/c^2$ )

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad \Delta\vec{A} = \frac{16\pi G}{c^2} \rho\vec{v} \quad \dot{\vec{v}} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

(vgl. Elektro- Magnetostatik für  $\epsilon_0 \rightarrow -1/4\pi G$  und  $\mu_0 \rightarrow -16\pi G/c^2$ .)

## Spinpräzession im Magnetfeld

Der Spinvektor  $\vec{\sigma}$  eines geladenen Teilchens der Ladung  $e$  und Masse  $m$  präzediert im Magnetfeld  $\vec{B}$  bekanntlich gemäß (BMT-Gleichung)

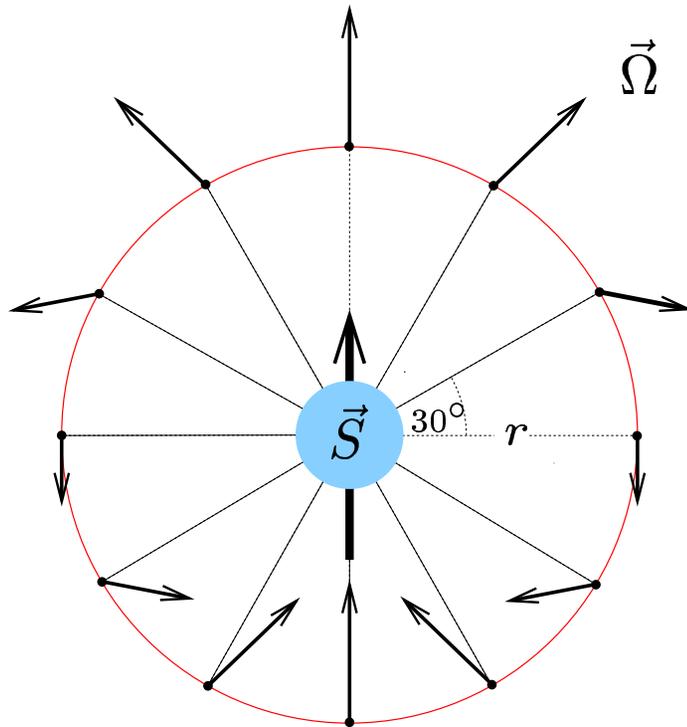
$$\dot{\vec{\sigma}} = \vec{\Omega} \times \vec{\sigma} \quad \vec{\Omega} = -\frac{g}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \vec{B}$$

Im Falle der Gravitation ist  $e = m$  und  $g = 1$  zu setzen, also

$$\vec{\Omega} = -\frac{1}{2} \vec{B}$$

Den Einfluss von Massenströmen auf lokale Inertialsysteme bezeichnet man auch als „Frame Dragging“ bzw. „Mach’schen Effekt“.

# Gravitomagnetischer Dipol



$$\vec{\Omega}(\vec{x}) = \frac{G}{c^2} \cdot \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{S}) - \vec{S}}{r^3}$$

z.B. ist am Erdnordpol

$$\begin{aligned} \Omega(\text{NP}) &= \frac{4}{5} \cdot \frac{GM/c^2}{R} \cdot \omega \\ &= 5,5 \cdot 10^{-10} \cdot \omega \end{aligned}$$

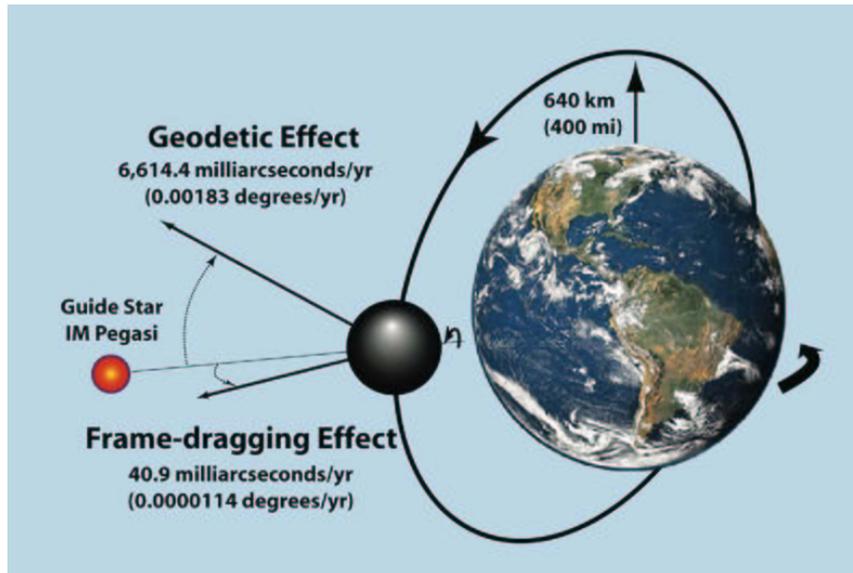
## Auswirkungen auf polarer Erdumlaufbahn

Auf polarer Umlaufbahn werden Newton'sche Effekte höherer Multipole unterdrückt. Richtungsmittelung über  $\vec{n}$  ergibt  $\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{S}) \rightarrow \vec{S}/2$ , also

$$\vec{\Omega}_{\text{Kreisel}}(\text{Satellit}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{GM/c^2}{(R + 640 \text{ km})^3} \cdot \vec{\omega} \approx 41 \text{ mas/y} \cdot \hat{\omega}$$

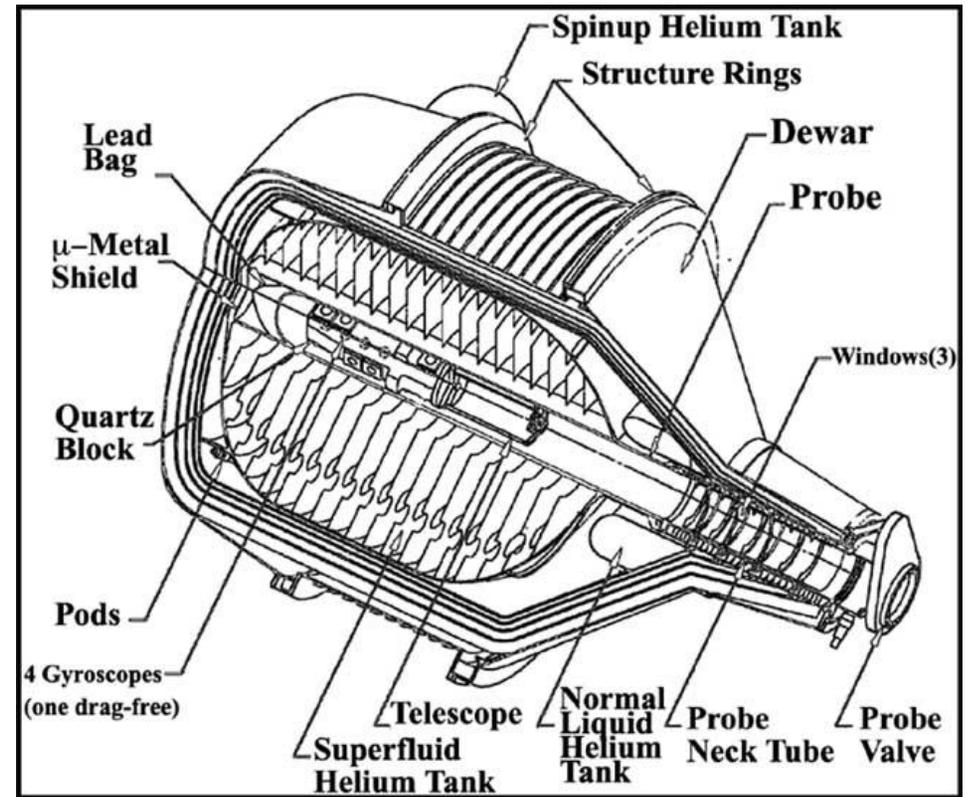
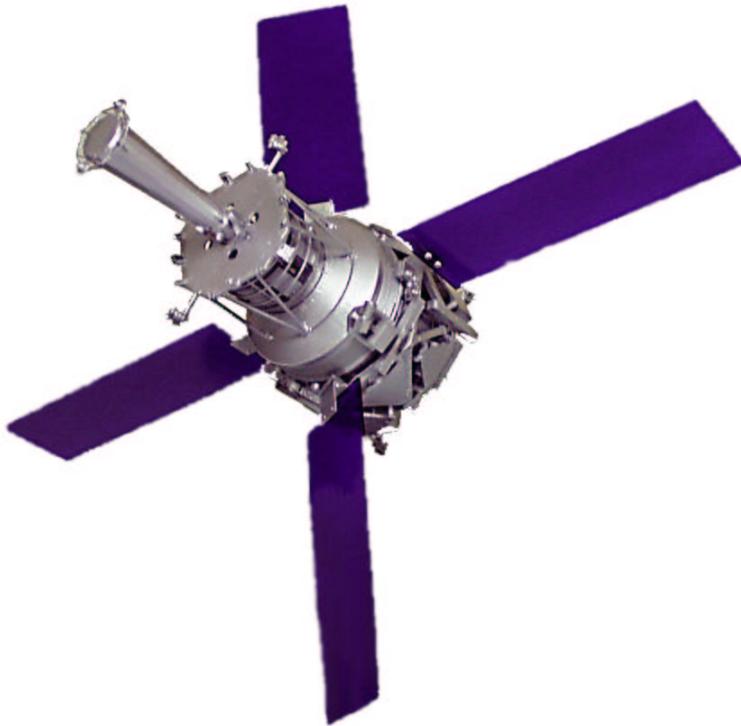
'mas'='milli-arc-second'  $\approx 3 \cdot 10^{-7}$  Grad = Öffnungswinkel, unter dem eine Strecke von 1,9 m auf dem Mond von der Erde aus erscheint!

# Das Gravity Probe-B Experiment



- Geodätische Präzession als Folge rein räumlicher Krümmung („elektrischer“ oder „Coulomb-Anteil“ des G-Feldes): **6,6 as/y**
- Lense-Thirring-Präzession als Folge verschränkter Raum-Zeit-Krümmung („magnetischer“ oder „Strom-Anteil“): **0,041 as/y**

# „Am Rande des technisch Machbaren“

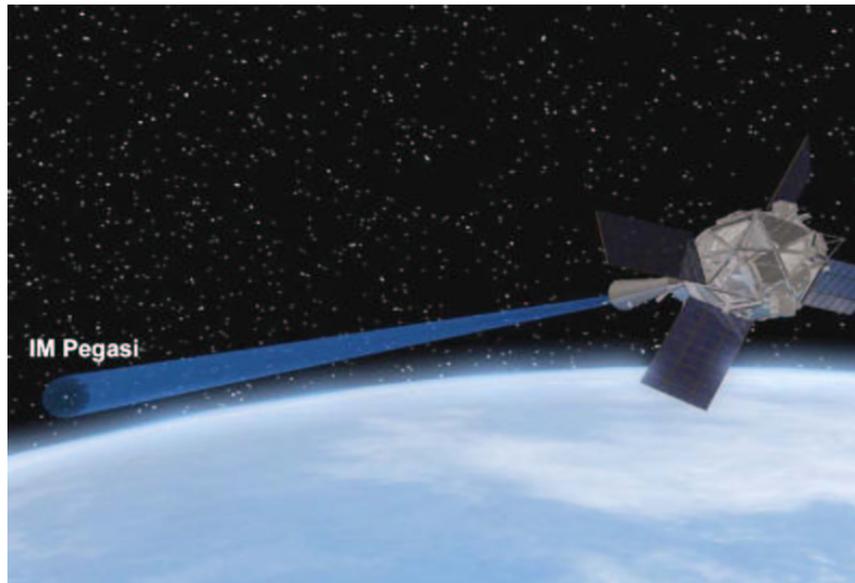


# Die perfektesten menschengemachten Kugeln



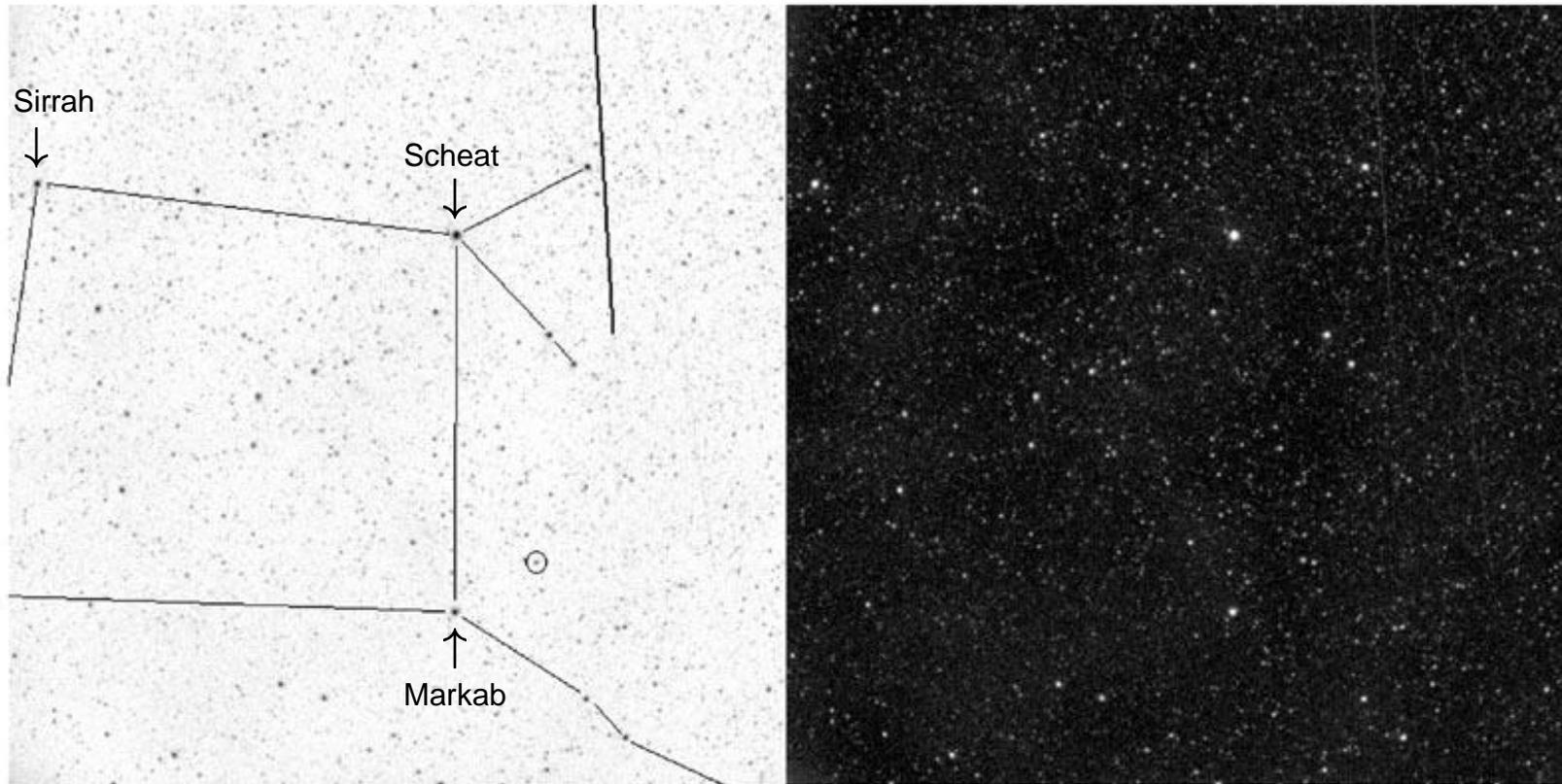
- Niob-beschichtete Kugeln aus „fused“ Quarz,  $\emptyset = 3,8 \text{ cm}$ ,  $\nu = 10\,000 \text{ U/min}$
- Homogenität =  $2 \cdot 10^{-6}$ , Sphärizität =  $3 \cdot 10^{-7}$  (40 Atomlagen, 2 m auf Erde)
- Orientierungskontrolle durch magn. Flussmessung mit SQUIDs; Empfindlichkeit  $0,1 \text{ mas} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Grad}$
- Orientierungsstabilität  $< 3 \cdot 10^{-2} \text{ mas/y}$
- Temperatur  $T = 1,82 \text{ K}$

# Quasare realisieren das Inertialsystem

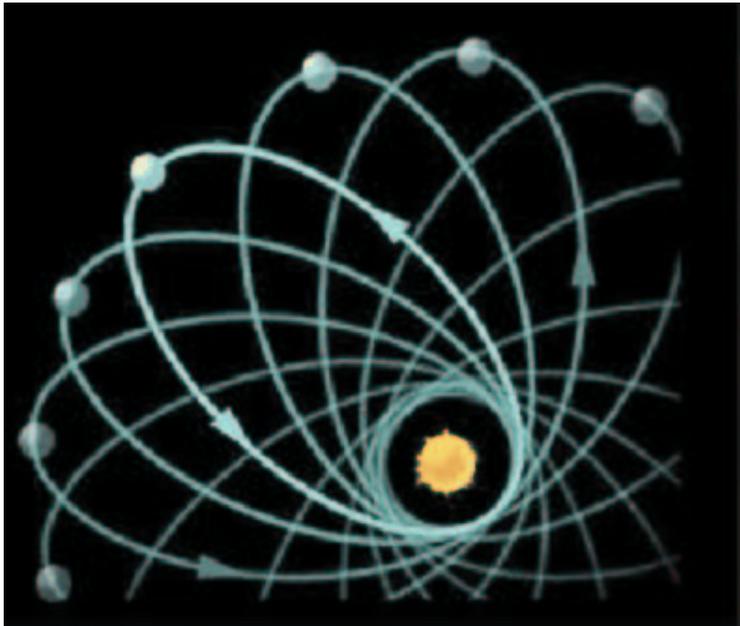


- Referenzrichtung durch optisches on-board-Teleskop zu IM Pegasi: roter Riese,  $M=1,5 M_{\odot}$ ,  $R=13R_{\odot}$ , magnetisch sehr aktiv  $\Rightarrow$  radio-hell,  $d = 320$  lj
- Eigenbewegung von IM Pegasi: 35 mas/y gegenüber Quasarhintergrund, verfolgt durch VLBI
- Langzeitgenauigkeit  $< 0,5$  mas/y

# Die Lage von IM Pegasi



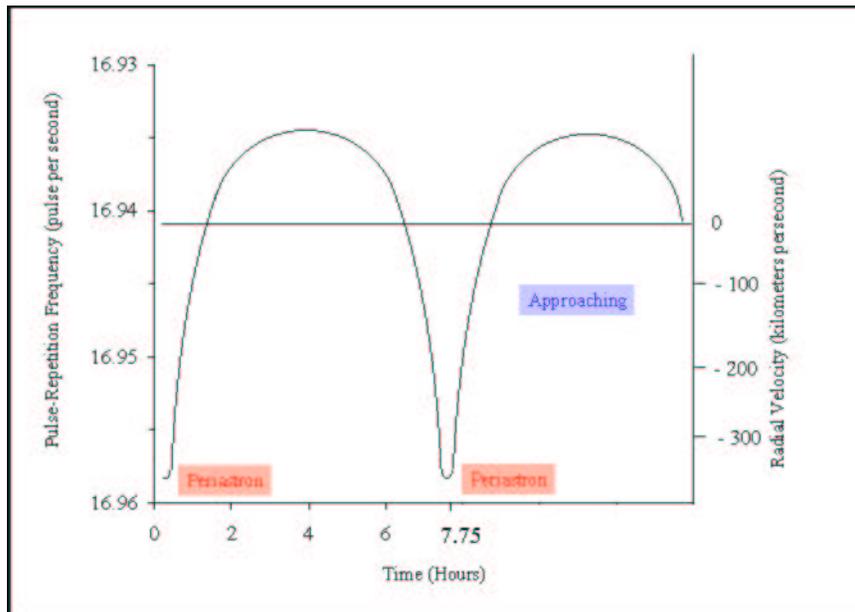
# Periastronpräzession



$$\vec{\Omega} = -\frac{2G}{c^2} \cdot \frac{3\hat{L}(\hat{L} \cdot \vec{S}) - \vec{S}}{a^3(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

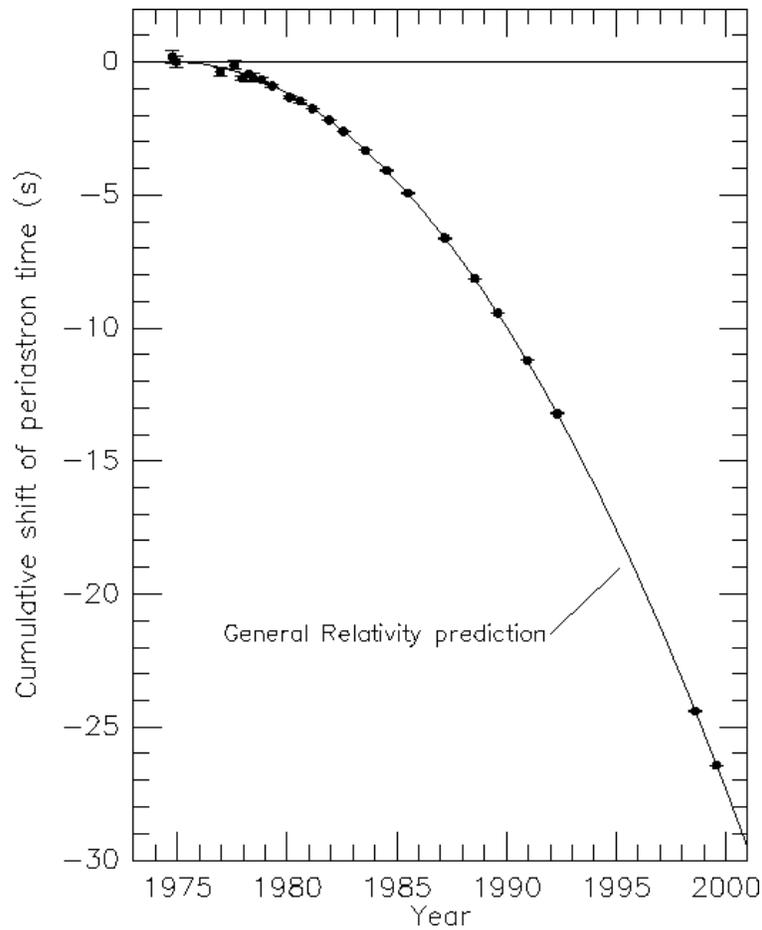
$\hat{L}$  = Bahndrehimpulsrichtung  
 $a$  = große Halbachse  
 $\varepsilon$  = Bahnexzentrizität

# Periastronpräzession am Hulse-Taylor-Pulsar



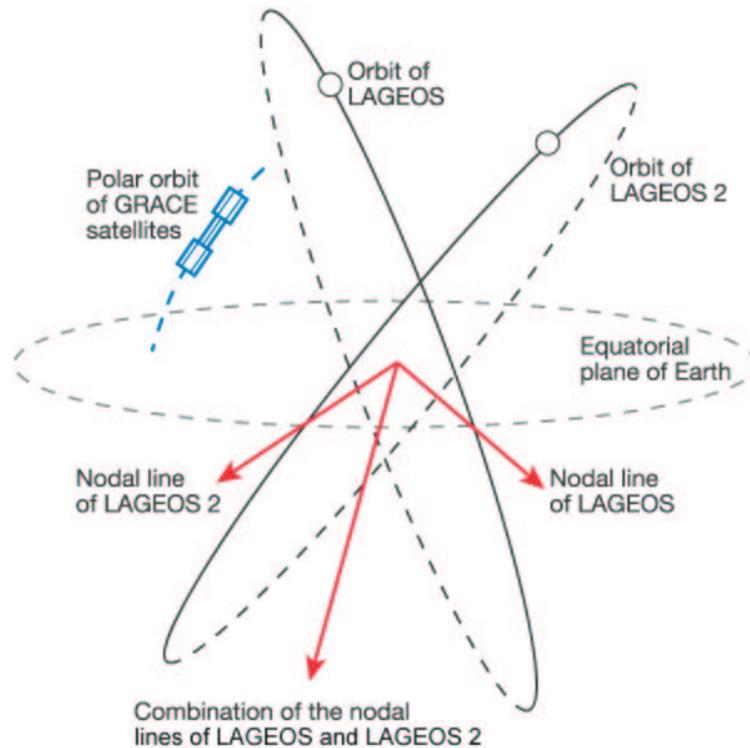
- Gemessene Periastronpräzession 4,2 grad/y in guter Übereinstimmung mit ART-Voraussage.
  - Letztere besteht aus dem „gravitoelektrischen“ Anteil, der 10,4 grad/y ausmacht, und dem „gravitomagnetischen“ Anteil von  $-6,3$  grad/y (retrograd!)
- ⇒ Indirekte Messung des gravitomagnetischen Feldes

# Abnahme der Periastronperiode am Hulse-Taylor-Pulsar



**Gravitationswellen !**

# Präzession von Bahnebenen



$$\vec{\Omega} = \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{\vec{S}}{a^3(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

$a$  = große Halbachse

$\varepsilon$  = Bahnexzentrizität

# LAGEOS (LAsEr GEOdynamic Satellite)



- Für Erdbahn mit  $a = 12\,000$  km und  $\varepsilon = 0$  folgt  $\Omega = 33$  mas/y.
- Bestätigt im 10%-Bereich durch Ciufolini & Pavlis (Nature, 21. Oct. 2004).
- Hauptfehlerquelle sind die geringen Bahnexzentrizitäten und die z.Z. noch zu ungenaue Kenntnis höherer Multipolmomente der Erde (Bahnen sind weder polar noch komplementär).

# Quasiperiodische Oszillationen in Röntgen-Binärsystemen



- Akkretionscheibe um Neutronenstern
- Innerer Scheibenrand formt „Lippe“. Diese präzediert mit  $\Omega$  und moduliert dadurch („Verdeckung“) Röntgenemission. Typisch sind  $\Omega =$  einige kHz für NS von etwa 2 Sonnenmassen
- Angeblich „gesehen“ von RXTE (Rossi X-ray Timing Explorer; Zeitauflösung: 0,1 ms) an 14 Systemen. (Unsicherheit: Quadrupolmoment, Viskositätseffekte)

# Das alte/neue Mach'sche Problem

Mach'sches Prinzip: Die Gesamtheit der Massen und ihrer Bewegungszustände determinieren die lokalen Inertialsysteme.

- In dieser Form in ART nicht erfüllt, da die im Gravitationsfeld lokalisierten Freiheitsgrade nicht vernachlässigt werden können.  
Reparatur: **determinieren**  $\Rightarrow$  **beeinflussen**.
- Bleibt die Frage: Woher kommt es, dass das ICRS global nicht rotiert, d.h. abgesehen von lokalen Effekten der geschilderten Art ein Inertialsystem ist ?

ENDE