

Skript zur Vorlesung
Theoretische Elektrodynamik

Domenico Giulini
SS 2021

Version vom 2. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Einführung	7
1.1	Physikalische Felder	7
1.2	Physikalische Einheiten	8
1.3	Felder der Elektrodynamik	9
1.4	Differentialoperatoren auf Feldern: Gradient, Divergenz und Rotation	15
2	Die Maxwell-Gleichungen (MG)	19
2.1	Differentielle Form	19
2.2	Integrale Form	23
2.3	Symmetrien	24
2.3.1	Allgemeines	24
2.3.2	Einige diskrete Symmetrien der MG	26
2.3.3	Einige kontinuierliche Symmetrien der MG	30
3	Erste allgemeine Folgerungen aus den MG	35
3.1	Ladungserhaltung	35
3.2	Erhaltung der Constraints	36
3.3	Wellenausbreitung in homogenen Umgebungen	36
3.4	Sprungbedingungen beim Übergang zwischen verschiedenen Materialien	41

3.5	Die Fresnel'schen Formeln	44
3.5.1	1. Fall: Elektrisches Feld in der Einfallsebene	48
3.5.2	2. Fall: Elektrisches Feld senkrecht zur Einfallsebene	52
3.5.3	Elektrische und magnetische Brewster-Winkel	56
4	Statische Probleme	61
4.1	Der Weg zur Poisson-Gleichung	61
4.2	Randbedingungen, Eindeutigkeit und Green-Funktionen.	62
4.3	Elektrostatik	65
4.3.1	Konfigurationen von Punktladungen und ihre Energie	65
4.3.2	Elektrische Dipole	68
4.3.3	Das Feld elektrisch polarisierter Körper	71
4.3.4	Mittelwerte elektrischer Felder	74
4.3.5	Methode der Spiegelladungen für ebene Ränder	77
4.3.6	Beispiele für Lösungen mit ebenen Rändern	78
4.3.7	Methode der Spiegelladungen für sphärische Ränder	82
4.3.8	Beispiele für Lösungen mit sphärischen Rändern	86
4.3.9	Das Konzept der Kapazität	88
4.4	Magnetostatik	93
4.4.1	Stromkurven und das Biot-Savartsche Gesetz	93
4.4.2	Nochmal Ladungserhaltung	95
4.4.3	Kräfte zwischen Strömen	95
4.4.4	Beispiel: Kräfte zwischen parallelen Drähten	97
4.4.5	Die Energie von Stromverteilungen	98
4.4.6	Das Feld magnetisch polarisierter Körper am Beispiel des Stabmagneten	102
4.4.7	Die Ampère'sche Äquivalenz von Kreisströmen mit Dipol- verteilungen	110

4.5	Multipolentwicklung	115
4.5.1	Ausgedehnte Ladungsverteilungen	115
4.5.2	Spezialfall: Dipolentwicklung des Vektorpotentials	119
4.5.3	Multipolmomente als symmetrisch-spurfreie Tensoren	120
4.5.4	Kurzer Exkurs über das gyromagnetische Verhältnis	124
5	Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls	126
5.1	Energieerhaltung, Energiedichte und Energiestromdichte	126
5.2	Impulserhaltung, Impulsdichte und Impulsstromdichte	129
5.3	Drehimpulserhaltung, Drehimpulsdichte und Drehimpulsstromdichte	132
6	Allgemeine Integration der MG im Vakuum und homogen-isotropen Medien	134
6.1	Die Methode der Potentiale	134
6.2	Integration in Coulomb-Eichung	138
6.3	Integration in Lorenz-Eichung	139
6.4	Allgemeines über retardierte und avancierte Potentiale	140
7	Felder bewegter Punktladungen	143
7.1	Die Liénard-Wiechert Potentiale	143
7.2	Felder zu den Liénard-Wiechert Potentialen	148
7.3	Erster Spezialfall: Momentan ruhende Ladung und Abstrahlungs- leistung bei Beschleunigung	151
7.4	Zweiter Spezialfall: Gleichförmig bewegte Ladung	152
8	Mathematischer Anhang	157
8.1	Sprechweisen betreffend Funktionen und ihr Verhalten in der Nähe singulärer Punkte und im Unendlichen	157

8.2	Kurven	159
8.3	Flächen	160
8.3.1	1. Beispiel: 2-Sphäre	163
8.3.2	2. Beispiel: Zylinder	164
8.3.3	3. Beispiel: Torus	164
8.4	Integralsätze	165
8.4.1	Gauß'scher Satz	165
8.4.2	Stokes'scher Satz	166
8.4.3	Die Green'schen Identitäten	167
8.4.4	Die Laue'schen Identitäten	167
8.4.5	Helmholtz'scher Satz	168
8.5	Distributionen	171
8.5.1	Allgemeines Konzept	171
8.5.2	Dirac Distribution ("Funktion")	173
8.5.3	Der Laplace-Operator angewandt auf $1/r$	174
8.6	Fourier'sche Reihen und Integrale	176
8.6.1	Reihen	176
8.6.2	Integrale	181
9	Übungsaufgaben	186
9.1	Reflexion und Transmission	186
9.2	Wellenleiter	188
9.3	Einfache Modelle atomarer Polarisierung	190
9.3.1	Das Thomson'sche Atom	190
9.3.2	Die leitende Kugel	191
9.4	Clausius Mossotti Gleichung	191
9.5	Sphärische Randbedingungen in der Elektrostatik	193

Vorwort

Viele Lehrbücher der Elektrodynamik gehen induktiv vor. Das bedeutet, dass man versucht, aus einfachen und intuitiv einigermaßen zugänglichen Spezialfällen die allgemeine Gesetzmäßigkeit herauszulesen - profaner ausgedrückt: zu erraten! Dabei folgt die Darstellung meist mehr oder weniger dem historischen Gang der Ereignisse, wenn auch sehr stark verkürzt und oft unter Weglassung mancher Fragestellungen, die retrospektiv betrachtet zu "Nichts" geführt haben. Das Endresultat einer solchen Entwicklung ist dann nicht selten auch für die maßgeblichen Akteure unerwartet; das war auch in der Elektrodynamik so. Dazu sagt Heinrich Hertz in einem berühmten Vortrag 1889 in Heidelberg [?, S. 344]:

„Man kann diese wunderbare Theorie nicht studieren, ohne bisweilen die Empfindung zu haben, als wohne den mathematischen Formeln selbständiges Leben und eigener Verstand inne, als seien dieselben klüger als wir, klüger sogar als ihre Erfinder, als gäben sie uns mehr heraus, als seinerzeit in sie hineingelegt wurde.“

Der historische Weg ist auch nicht immer frei von Täuschungen: Historische Entwicklungen und Erklärungen werden im Nachhinein als notwendig geschildert, Alternativen ausgeblendet und Fragestellungen modern umgedeutet. Geht man ihn aber ohne diese "Abkürzungen" ist er sehr sehr lang und zeitaufwendig.

In dieser Vorlesung wählen wir deshalb einen anderen Weg, nämlich den deduktiven. Auch dieser wird in manchen Vorlesungen vertreten, z.B. im 3. Band der klassischen Vorlesungsreihe von Arnold Sommerfeld [?]. "Deduktiv" bedeutet, dass wir *ausgehend* von den Maxwell'schen Gleichungen uns zuerst mit deren mathematischer Symbolik, der Bedeutung der in ihnen auftretenden Größen und erst anschließend ausführlich mit den aus ihnen ableitbaren Konsequenzen beschäftigen. Wir wollen versuchen, die Gleichungen "zum Sprechen" zu bringen und ihnen dann aufmerksam zuhören. Wie bei wohlkomponierter Musik muss man das Zuhören und die dabei gesprochene Sprache aber erst lernen. Genau darin besteht eine Grundschwierigkeit dieser Vorlesung, in der die mathematischen Techniken, die das "Hören" und "Verstehen" der gesprochenen "Sprache" erst ermöglichen, zum Teil gleichzeitig erlernt werden sollen. In solchen Situationen fällt es dann oft schwerer, zwischen semantischen und syntaktischen Aspekten zu unterscheiden. Das birgt die Gefahr, dass syntaktische Probleme semantisch fehlinterpretiert werden und man so zu "falsch gestellten Fragen" verführt wird auf die niemand eine befriedigende Antwort weiß außer eben der, dass man *so* nicht fragen kann. Als idealisierende Regel gilt, dass eine verlässliche physikalische Begrifflichkeit,

auf der letztendlich jedes Verständnis beruht, nur auf Basis einer konsistenten mathematischen Formulierung erreicht werden kann. Das Umgekehrte gilt natürlich nicht: Die schönste und konsistenteste mathematische Formulierung kann physikalisch immer noch völliger Unsinn sein! “Basieren” heißt eben nicht “reduzieren”.

Der große praktische Wert der deduktiven Vorgehensweise liegt in ihrer großen Effektivität, die gerade für eine einsemestrige Vorlesung vorteilhaft ist, zumal wenn man es mit einer so reichhaltigen und im wesentlichen logisch abgeschlossenen Theorie zu tun hat. Ihr Nachteil liegt in der - zumindest vorübergehenden - Ausblendung der Gründe, die Anlass zu den Begriffsbildungen und ihren mathematischen Verknüpfungen gegeben haben. Dieser Nachteil darf nicht unterschätzt werden, ist aber hoffentlich vorübergehend. Ich werde versuchen, durch viele eingestreute Erklärungen das nötige Verständnis nach und nach zu erzeugen. Wie wollen die Maxwell’sche Theorie ja nur verstehen, nicht nochmals neu “komponieren”.

Kapitel 1

Allgemeine Einführung

1.1 Physikalische Felder

Die Maxwell'sche Elektrodynamik ist eine *Feldtheorie* par excellence. Sie verbindet durch einen Satz gekoppelter partieller Differentialgleichungen in kausaler Weise die elektromagnetischen Felder mit ihren Quellen (Ladungen und Strömen). Zusammen mit eventuell weiteren Gleichungen, die das materielle Geschehen der Quellen bestimmen, beschreiben Sie eine kaum zu übersehende Menge an Beobachtungsmaterial und gilt als eine der erfolgreichsten Theorien der Physik überhaupt.

In ihren Grundgleichungen treten als Repräsentanten des elektromagnetischen Zustandes vier verschiedene, jeweils $\mathbb{R}^3 \otimes E$ -wertige Felder auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes E \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto \mathbf{V}(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Der erste Faktor \mathbb{R}^3 auf der rechten Seite qualifiziert sie als *Vektorfelder*. Diese kennzeichnen wir durch einen Pfeil über dem Funktionssymbol um anzudeuten, dass die Werte des Feldes Elemente eines 3-dimensionalen reellen Vektorraumes sind. Daneben werden auch *Skalarfelder* eine Rolle spielen, die z.B. als Repräsentanten der Quellen (genauer: der Ladungsdichte) und als Ergebnis gewisser Ableitungsoperationen auf Vektorfeldern (genauer: der Divergenz) auftreten. Diese sind von der Form

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \otimes E \\ (t, \mathbf{x}) &\mapsto S(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

In beiden Fällen steht E jeweils abkürzend für die physikalische Einheit der Feldwerte. Damit soll angedeutet werden, dass man mit Feldern genauso umgeht wie mit anderen dimensionsbehafteten Größen der Physik: Einheiten können untereinander und mit Zahlen multipliziert aber nicht addiert werden! Felder gleicher Dimension können also addiert werden und ergeben wieder ein Feld dieser Dimension. Felder gleicher Dimension bilden also einen Vektorraum (i.a. von unendlicher Dimension). Felder unterschiedlicher Dimension können nicht addiert aber – und sogar in mehrfacher Hinsicht – multipliziert werden. Zum Beispiel, ist $\mathbf{V}_1 = \mathbf{v}_1 \otimes E_1$ und $\mathbf{V}_2 = \mathbf{v}_2 \otimes E_2$, dann sind ihr skalares und vektorielles Produkt gegeben durch bzw.

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 := (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \otimes (E_1 \cdot E_2) \quad (\mathbb{R} \otimes E_1 \cdot E_2) - \text{wertig}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 := (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \otimes (E_1 \cdot E_2) \quad (\mathbb{R}^3 \otimes E_1 \cdot E_2) - \text{wertig}. \quad (1.3b)$$

Genauso kann das Produkt eines skalaren Feldes $S_1 = s_1 \otimes E_1$ und eines Vektorfeldes $V_2 = \mathbf{v}_2 \otimes E_2$ definieren

$$S_1 \mathbf{V}_2 := (s_1 \mathbf{v}_2) \otimes (E_1 \cdot E_2) \quad (\mathbb{R}^3 \otimes E_1 \cdot E_2) - \text{wertig}. \quad (1.3c)$$

1.2 Physikalische Einheiten

Wir verwenden die SI-Einheiten, *Meter* (m), *Sekunde* (s), *Kilogramm* (kg), *Ampère* (A). Alle anderen Einheiten sind aus diesen durch Multiplikation und Division zu bilden nach dem Schema: $kg^\alpha \cdot m^\beta \cdot s^\gamma \cdot A^\delta$. Dabei sind α, β, γ und δ ganzzahlige (auch negative) Exponenten. Außerhalb der reinen Elektrodynamik treten zu den genannten vier noch die drei Grundeinheiten Kelvin (Temperatur), Mol (Stoffmenge) und Cadela (Lichtstärke). In der Elektrodynamik werden aus den genannten vier Einheiten folgende weitere Einheiten wichtig:

Kürzel	Name	Bedeutung	SI-Einheit	Kurzform
N	Newton	Kraft	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	-
J	Joule	Energie	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
W	Watt	Leistung	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$	$J \cdot s^{-1}$
C	Coulomb	el. Ladung	$s \cdot A$	-
V	Volt	el. Spannung	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	$W \cdot A^{-1}$
F	Farad	Kapazität	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$	$C \cdot V^{-1}$
H	Henry	Induktivität	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	$V \cdot s \cdot A^{-1}$
Ω	Ohm	Widerstand	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	$V \cdot A^{-1}$
Wb	Weber	magn. Fluss	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$V \cdot s$
T	Tesla	magn. Flussdichte	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$Wb \cdot m^{-2}$

1.3 Felder der Elektrodynamik

In der Maxwell'schen Theorie treten folgende vier elektromagnetische Felder auf, die alle Vektorfelder sind:

Kürzel	Name	SI-Einheit
E	elektrische Feldstärke	$V \cdot m^{-1}$
D	elektrische Flussdichte	$C \cdot m^{-2}$
H	magnetische Feldstärke	$A \cdot m^{-1}$
B	magnetische Flussdichte	T

Diese geben zusammen den Zustand des elektromagnetischen Feldes an. Die Maxwell'schen Gleichungen verbinden diese Felder mit den sogenannten "Quellen", bestehend aus einem Skalarfeld ρ und einem Vektorfeld \mathbf{J} :

Kürzel	Name	SI-Einheit
ρ	elektrische Ladungsdichte	$C \cdot m^{-3}$
J	elektrische Stromdichte	$A \cdot m^{-2}$

Man beachte, dass bereits an dieser Stelle ein wesentlicher Unterschied zwischen Elektrizität und Magnetismus darin besteht, dass keine magnetischen Ladungen als existent angenommen werden. Magnetische Felder haben also keine eigentlichen Quellen, sondern entstehen durch Bewegung elektrischer Ladungen.

In SI-Einheiten treten in den Maxwell-Gleichungen keine Faktoren von π und c (Vakuum-Lichtgeschwindigkeit) auf; dafür aber folgende beiden Konstanten:

Kürzel	Name	Wert
ϵ_0	elektrische Feldkonstante	$8,854.187.812.8(13) \times 10^{-12} (A \cdot s)/(V \cdot m)$
μ_0	magnetische Feldkonstante	$1,256.637.062.12(19) \times 10^{-6} N \cdot A^{-2}$

Diese hängen über folgende Beziehung zusammen

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0 = 299.792.458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{exakt!}). \quad (1.4)$$

Dabei ist der Wert von c_0 der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum *exakt*, denn die SI-Einheit "Meter" ist durch die Sekunde definiert; nämlich als die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunde zurücklegt.

Ältere gebräuchliche Namen für ε_0 sind *Permittivität des Vakuums*, *Dielektrizitätskonstante des Vakuums* oder *Influenzkonstante*. Andere Namen für μ_0 sind *Permeabilität des Vakuums* oder *Induktionskonstante*.

Im Vakuum sind die Flussdichten \mathbf{D} und \mathbf{B} durch die Feldstärken \mathbf{E} und \mathbf{H} bestimmt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1.5b)$$

Deshalb kann man in Vakuum aus den Gleichungen 2 der 4 Felder eliminieren. Man behält das Paar (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , nicht (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , aus Gründen die wir gleich erläutern werden.

Innerhalb elektrisch polarisierbarer und magnetisierbarer Materie gelten ähnlich einfach aussehende aber physikalisch eigentlich viel kompliziertere Beziehungen, die man auch *Konstitutivrelationen* nennt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} =: \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} =: \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (1.6b)$$

Dabei nennt man \mathbf{P} das Vektorfeld der elektrischen Polarisierung und \mathbf{M} das Vektorfeld der Magnetisierung. \mathbf{P} hat die gleiche physikalische Dimension wie \mathbf{D} , also Ladung/Fläche oder (elektrisches Dipolmoment)/Volumen. Tatsächlich ist \mathbf{P} das Vektorfeld der elektrischen Dipoldichte innerhalb der Materie. \mathbf{M} hat die gleiche Dimension wie \mathbf{H} , also Stromstärke/Länge oder (Stromstärke \times Fläche)/Volumen. Analog ist hier \mathbf{M} das Vektorfeld der magnetischen Dipoldichte, wobei der Begriff des magnetischen Dipols nicht wie im elektrischen Fall über das erste Moment der Ladungsverteilung definiert wird (es gibt ja keine magnetischen Ladungen) sondern über die Stromverteilung. Das werden wir noch sehen.

Unter Umständen kompliziert an (1.6) ist, dass ε_r und μ_r - im Unterschied zu ε_0 und μ_0 - i.a. nicht konstant sind und sogar Funktionale der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} sein können, denn die Dipoldichten innerhalb der Materie können durch die von außen angelegten Felder (z.B. im Fall elektrischer Felder durch Ladungspolarisation) wesentlich beeinflusst oder sogar erst erzeugt werden. Dadurch werden die Konstitutivrelationen aber *nichtlinear*. Und selbst wenn sie linear sind, müssen sie nicht das einfache Aussehen haben wie die jeweils ersten beiden Gleichheiten in (1.6) suggerieren. Vielmehr würde man allgemein schreiben:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \mathbf{E} =: \underline{\varepsilon} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.7a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \underline{\mu}_r \mathbf{H} =: \underline{\mu} \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (1.7b)$$

wo jetzt die unterstrichenen Größen lineare Abbildungen sind, die nicht mehr proportional zur Identität sind, so dass \underline{D} und \underline{E} bzw. \underline{B} und \underline{H} i.a. nicht parallel sind. Dann sind auch \underline{E} und \underline{P} bzw. \underline{H} und \underline{M} nicht parallel.

Bemerkung 1. Unsere Bezeichnungsweise, wonach das Paar $(\underline{E}, \underline{H})$ mit den *Feldstärken* und das Paar $(\underline{D}, \underline{B})$ mit den zugehörigen *Flussdichten* identifiziert wird, folgt einer ins 19. Jahrhundert zurückreichenden Tradition, die auch heute noch gepflegt wird (vgl. etwa die entsprechenden deutsch- und englischsprachigen Wikipedia-Artikel). Nach heutigen (auf Ampère zurückgehenden) Vorstellung über die elementaren Quellen der Magnetfelder wäre es aber konsistenter, die Rollen von \underline{H} und \underline{B} zu vertauschen, also \underline{B} als die magnetische *Feldstärke* zu bezeichnen und \underline{H} anders zu bezeichnen, etwa - wie tatsächlich in Gebrauch - als *magnetische Erregung*. Das entspricht auch der physikalisch-operationalen Definition der Felder, die gegebene ist die Kraft auf eine *Probeladung*. Eine Punktladung der Stärke e erfährt aber nach der *Lorentz'schen Gleichung* eine Kraft von

$$\underline{F} = e(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}). \quad (1.8)$$

Es sind also die Felder $(\underline{E}, \underline{B})$, die durch die Kraftwirkung direkt gemessen werden, nicht $(\underline{D}, \underline{H})$. Die moderne Auffassung geht dahin, $(\underline{E}, \underline{B})$ als *fundamentale Größen*, $(\underline{D}, \underline{H})$ hingegen als *abgeleitete Hilfsgrößen* zu betrachten. Dies ist insbesondere der Standpunkt, der in [?] vertreten wird. Die Zusammengehörigkeit des Paares $(\underline{E}, \underline{B})$ sowie des Paares $(\underline{D}, \underline{H})$ wird auch in der speziell-relativistischen Formulierung deutlich werden, wo unter Lorentztransformationen die Felder jedes dieser Paare untereinander (irreduzibel!) transformieren. In dieser Uminterpretation müsste man die magnetische Konstitutivrelation (1.6b) eigentlich so schreiben:

$$\underline{H} = \mu^{-1} \underline{B} = \mu_0^{-1} \underline{B} - \underline{M}, \quad (1.6b')$$

was aber selten getan wird. Hier sind die Bezeichnungen und ist die Nomenklatur in der Literatur nicht immer einheitlich. Die vorherige Verallgemeinerung (1.7) kann für diesen Fall natürlich genauso gegeben werden. \square

Bemerkung 2. Der Versuch, den Feldbegriff auf den Kraftbegriff zurückzuführen, indem man das Feld als Kraft auf eine Probeladung operational definiert, ist historisch gewachsen (Faraday'sche Feldlinienbilder etc.) und nicht unproblematisch. Das liegt daran, dass der logische Vermittler zwischen diesen Begriffen, nämlich die "Probeladung", nur kontextuell aber nicht allgemeingültig definiert werden kann. Eine solche Ladung muss nämlich gemäß der ihr zugeordneten Funktion widerstreitende Eigenschaften besitzen: 1) Sie muss sehr klein sein, jedenfalls kleiner

als jede durch die Inhomogenität des zu messenden Feldes F definierte Längenskala $L := F/\|\nabla F\|$; andernfalls variiert das Feld über die Ausdehnung der Probeladung wesentlich und die Probeladung ist nicht in der Lage diese Variation aufzulösen. 2) Sie darf aber auch nicht zu klein sein, denn andernfalls ist das von ihr selbst erzeugte Feld an ihrer Oberfläche in der Stärke vergleichbar (oder sogar stärker) als die zu messende Feldstärke des äußeren Feldes. Idealerweise müsste man deshalb die elektrische Ladungsmenge einer Probeladung zugleich mit deren Größe verringern. Diesem Idealisierungsprozess setzt aber der Atomismus eine unverrückbare Grenze, da es keine freien Ladungen unterhalb der Elementarladung

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.9)$$

gibt. Proton und – mit negativen Vorzeichen – das Elektron nehmen diese kleinste freie Ladungsmenge an. \square

Bemerkung 3. Die Grenzen der Gültigkeit der klassischen Elektrodynamik werden durch die Quantentheorie und Quantenfeldtheorie – hier in Form der QED := *Quantenelektrodynamik* – gesetzt. Diese und nicht die klassische Maxwell'sche Theorie bestimmen das Verhalten elektromagnetischer Vorgänge auf atomaren und subatomaren Dimensionen. Aber auch im Vakuum gelten die linearen Gesetze der klassischen Elektrodynamik bei kleinen Abständen und hohen Feldstärken nicht mehr uneingeschränkt. Die QED führt zu nicht-linearen Korrekturen, die denen ähnlich sind wie sie in polarisierbaren Materialien auftreten, allerdings nun im Vakuum! Man spricht deshalb in der QED auch von *Vakuumpolarisation*. Um die relevanten Größenordnungen etwas einzuschätzen, wollen wir uns einige Größenordnungen überlegen.

Experimentell hat das Proton eine innere Struktur entsprechend einem Radius von etwa

$$R_{\text{Proton}} \approx 0,851 \times 10^{-15} \text{ m}, \quad (1.10)$$

während das Elektron bisher keine bekannten inneren Strukturen besitzt und ihm deshalb auch keine strukturelle "Ausdehnung" zukommt. In der klassischen Maxwell'schen Theorie kann man ihm formal einen Radius R_e zuweisen durch die Forderung, dass die außerhalb dieses Radius' im elektrischen Feld gespeicherte Energie gerade gleich sein soll der Hälfte¹ der Ruheenergie $m_e c^2/2$ des Elektrons,

¹Dass man hier gerade die Hälfte der Ruheenergie wählt ist nicht so erheblich, da es nur auf die Größenordnung ankommt. Wichtig ist, dass die gesamte im Feld gespeicherte Energie gemäß $E = mc^2$ zu keiner Masse m führt, die größer ist als die gemessene Masse des Elektrons. Mit der Hälfte wird hier erreicht, dass die numerischen Verhältnisse einfach durch die heute gebräuchlichen Konstanten ausgedrückt werden können.

wo m_e die experimentell bestimmte Masse des Elektrons bezeichnet. Das führt auf folgenden Ausdruck für den sogenannten *klassischen Elektronenradius*:

$$R_e := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2,82 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (1.11)$$

Die Feldstärke am klassischen Elektronenradius ist dann nach dem Coulomb-Gesetz gegeben durch

$$E_e := \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_e^2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{m_e^2 c^4}{e^3} \approx 1,82 \times 10^{20} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (1.12)$$

Dieser enorme Wert liegt bereits erheblich über der kritischen Grenze, bis zu der man heute die klassische Elektrodynamik als gültig betrachtet. Das wollen wir etwas ausführen.

Nach den Gesetzen der Quantenmechanik kann das Elektron als nicht besser lokalisiert angesehen werden als bis auf eine Länge, die man (größenordnungsmäßig) mit seiner sogenannten *reduzierten Compton-Wellenlänge* angeben kann²:

$$\lambda_e := \frac{\hbar}{m_e c} \approx 3,86 \times 10^{-13} \text{ m}. \quad (1.13)$$

Das Verhältnis des klassischen Elektronenradius zu dieser Größe ist gerade die sogenannte Feinstrukturkonstante α

$$\frac{R_e}{\lambda_e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} =: \alpha \approx \frac{1}{137}. \quad (1.14)$$

Der klassische Elektronenradius liegt also bereits zwei Größenordnungen unterhalb der durch λ_e gesetzten Grenze.

Aus λ_e ergibt sich auch eine kritische Grenze an die Feldstärke, nämlich durch die Forderung, der Betrag der Feldstärke möge so groß sein, dass eine Verschiebung der Ladung e parallel zu den elektrischen Feldlinien um die Strecke λ_e Energie $m_e c^2$ freisetzt (bzw. man die Arbeit $m_e c^2$ leisten muss, um die Ladung entgegen der Feldrichtung um diesen Betrag zu verschieben). Die so bestimmte kritische Feldstärke sei mit E_S bezeichnet und heißt *Schwinger Limit*.³ Sie muss also $eE_S \lambda_e = m_e c^2$ genügen und ist demnach gegeben durch

$$E_S := \frac{m_e c^2}{e \lambda_e} = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} = \alpha E_e, \quad (1.15)$$

²Die (nicht reduzierte) Compton-Wellenlänge ist $\lambda_e := h/m_e c$, wo h die Planck-Konstante ist. $\hbar := h/2\pi$ nennt man die reduzierte Planck-Konstante.

³Nach dem Physiker Julian Schwinger (1918-1992). Physik-Nobelpreis 1965 für QED zusammen mit Richard Feynman und Shin'ichirō Tomonaga.

wobei wir die Definition der Feinstrukturkonstante α aus (1.14) verwendet haben. Der klassische Wert der Feldstärke E_e “am Rand des Elektrons” ist also bereits ebenfalls zwei Größenordnungen oberhalb des QED-Limits, bei dem durch Prozesse der Vakuumpolarisation nichtlineare Korrekturen der Maxwell-Gleichungen wichtig werden. \square

1.4 Differentialoperatoren auf Feldern: Gradient, Divergenz und Rotation

Die Felder die wir in dieser Vorlesung betrachten sind Funktionen der vier unabhängigen Variablen $(t, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x})$. Sofern nichts anderes hinzugesagt wird setzen wir sie als hinreichend oft stetig differenzierbar voraus. Das bedeutet, dass ihre partiellen Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung existieren und alle stetig sind. In diesem Falle hängt bis zu dieser Ordnung das Ergebnis einer mehrfachen partiellen Differentiation nicht von der Reihenfolge ab, in der die einzelnen Ableitungen vorgenommen werden; man sagt die Ableitungen “vertauschen” (bis zur gegebenen Ordnung). Im Falle von Vektorfeldern gilt diese Aussage entsprechend für die Ableitungen der Komponentenfunktionen.

Im Folgenden geht es uns um gewisse Ableitungsoperationen nach den räumlichen Koordinaten \mathbf{x} , wir lassen also die zeitlichen Abhängigkeiten außer Acht. Um etwas Schreibarbeit zu sparen und auch um die kombinatorische Struktur mancher Ausdrücke zu betonen, kürzen wir die partiellen räumlichen Ableitungen wie folgt ab:

$$\nabla_a := \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad a \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.16)$$

Man schreibt auch

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \\ \nabla_3 \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^3 \mathbf{e}_a \nabla_a \quad (1.17)$$

und rechnet mit diesem “Nabla-Operator” ∇ wie mit einem Vektor, zumindest was die Kombinatorik der Komponenten angeht. Man muss aber immer beachten, dass es sich um einen Differentialoperator handelt, der linear auf Summen und \mathbb{R} -Vielfache von Funktionen wirkt, auf ihr Produkt aber *derivativ*, also gemäß der Leibniz-Regel.

Wendet man jede der drei Ableitungen ∇_a auf eine skalare Funktion S an, so erhält man eine dreikomponentige Ableitungsfunktion, mit anderen Worten, ein Vektorfeld. Dieses nennt man den *Gradienten* von S und schreibt

$$\nabla S := \begin{pmatrix} \nabla_1 S \\ \nabla_2 S \\ \nabla_3 S \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^3 (\nabla_a S) \mathbf{e}_a. \quad (1.18)$$

Das Vektorfeld ∇S zeigt an jedem Punkt des Raumes in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion S .

Bei einem Vektorfeld \mathbf{V} gibt es - grob gesprochen - für jede der drei Komponenten V_b einen Gradienten, also $3 \times 3 = 9$ Ableitungsfunktionen,

$$\nabla_a V_b := \frac{\partial V_b}{\partial x^a}. \quad (1.19)$$

Diese können in einer Ableitungsmatrix zusammengefasst werden:

$$\{\nabla_a V_b\} = \begin{pmatrix} \nabla_1 V_1 & \nabla_1 V_2 & \nabla_1 V_3 \\ \nabla_2 V_1 & \nabla_2 V_2 & \nabla_2 V_3 \\ \nabla_3 V_1 & \nabla_3 V_2 & \nabla_3 V_3 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Mit “Divergenz” und “Rotation” bezeichnet man nun gewisse Kombinationen dieser partiellen Ableitungen, genauer die Spur bzw. den antisymmetrischen Anteil dieser Matrix. Zusammengenommen bestimmen diese Kombinationen 4 der 9 unabhängigen Komponenten der Ableitungsmatrix (1.20). Die restlichen 5 Komponenten stecken im symmetrisch-spurlosen Anteil der Matrix, der uns aber momentan nicht interessiert, weil diese Kombination in den Maxwell-Gleichungen nicht vorkommt (was nicht heißt, dass sie nicht in anderen Zusammenhängen wichtig wird). Man kann also sagen, dass wir mit der Divergenz und der Rotation etwas weniger als die Hälfte – genauer $4/9$ – aller partiellen Ableitungen erfassen. Man darf aber nicht glauben, dass alle diese Ableitungen unabhängig vorgegeben werden können: Ein fundamentales Resultat, das unter dem Namen *Helmholtz’scher Satz* bekannt ist, besagt, dass ein Vektorfeld in einem beschränkten Gebiet mit Rand durch seine Divergenz, seine Rotation und seine Randwerte eindeutig bestimmt ist. Ist das Gebiet unbeschränkt und ohne Rand, dann reicht ein hinreichend schnelles Abfallen im Unendlichen. Wir beweisen und besprechen dieses für die Elektrodynamik so wichtige Resultat im mathematischen Abschnitt 8.4.5. Ab jetzt merken wir uns also, dass (im Sinne dieses Satzes) ein Vektorfeld durch die Kenntnis seiner Divergenz und seiner Rotation “im wesentlichen” bestimmt ist. Wir werden häufig davon Gebrauch machen denn, wie bereits erwähnt, treten Divergenz und Rotation der Felder gerade in den Maxwell-Gleichungen auf und wir müssen zusehen, von jedem der zu bestimmenden Felder *beide* zu kennen!

Schreibt man einen Punkt “ \cdot ” für das gewöhnliche Skalarprodukt und ein Kreuz “ \times ” für das Vektorprodukt je zweier Vektoren in \mathbb{R}^3 , dann gilt

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab}, \quad (1.21a)$$

$$\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \mathbf{e}_c =: \varepsilon_{abc} \mathbf{e}_c \quad (\text{Summenkonvention}). \quad (1.21b)$$

Hier ist ε_{abc} das total antisymmetrische *Levi-Civita Symbol*

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (abc) \text{ gerade Permutation von } (123), \\ -1 & \text{falls } (abc) \text{ ungerade Permutation von } (123), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.22)$$

Also sind Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes gegeben durch

$$\operatorname{div}(\mathbf{V}) := \nabla \cdot \mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \nabla_a V_a =: \nabla_a V_a; \quad (1.23)$$

bzw.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{V}) := \nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nabla_2 V_3 - \nabla_3 V_2 \\ \nabla_3 V_1 - \nabla_1 V_3 \\ \nabla_1 V_2 - \nabla_2 V_1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

oder

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= (\nabla_2 V_3 - \nabla_3 V_2) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\nabla_3 V_1 - \nabla_1 V_3) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (\nabla_1 V_2 - \nabla_2 V_1) \mathbf{e}_3, \\ &= \sum_{a,b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} \nabla_a V_b \mathbf{e}_c =: \varepsilon_{abc} \nabla_a V_b \mathbf{e}_c. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Die Anwendung des Operators ∇ verändert die physikalische Dimension des Feldes da die Koordinatenfunktionen x^a mit der physikalischen Dimension einer Länge versehen sind. (Achtung: Das gilt hier für die Standardkoordinaten des \mathbb{R}^3 , die die eine Längeneinheit tragen, nicht allgemein für alle Koordinaten. Die Ableitung nach einer dimensionslosen Winkelkoordinate etwa verändert die physikalische Einheit eines Feldes nicht.) Deshalb bilden die Operationen Gradient, Divergenz und Rotation Felder, die hier als Abbildungsvorschriften wiedergegeben sind, wie folgt ab:

$$(\nabla) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \otimes E) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes E \cdot m^{-1}), \quad (1.26a)$$

$$(\nabla \cdot) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes E) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \otimes E \cdot m^{-1}), \quad (1.26b)$$

$$(\nabla \times) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes E) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes E \cdot m^{-1}). \quad (1.26c)$$

Als unmittelbare Folgen dieser Definitionen ergeben sich für die sinnvollen zweimaligen Hintereinanderausführungen dieser Operatoren die wichtigen Relationen:

$$\nabla \cdot (\nabla S) =: \Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x_3^2}, \quad (1.27a)$$

$$\nabla \times (\nabla S) = 0, \quad (1.27b)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0, \quad (1.27c)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}. \quad (1.27d)$$

Dabei ist der *Laplace Operator*, Δ , sowohl für skalare als auch Vektorfelder definiert. Für skalare Felder besteht er in kartesischen Koordinaten einfach aus der Summe der zweiten partiellen Ableitungen, so wie in (1.27a) gezeigt. Ebenfalls in kartesischen Koordinaten wirkt er auf ein Vektorfeld komponentenweise so, wie eben für ein Skalarfeld beschrieben. Kennt man die Operatoren in kartesischen Koordinaten, so kann man sie in jedem anderen Koordinatensystem unter Verwendung der Kettenregel ausdrücken. Dabei spielen solche Koordinatensysteme eine große Rolle, die speziellen Symmetrien angepasst sind die man auch in den Lösungen realisiert sehen möchte, wie etwa sphärische Polarkoordinaten bei $SO(3)$ -Rotationsymmetrie oder Zylinderkoordinaten bei $SO(2) \times \mathbb{R}$ -Rotations-Translations-Symmetrie.

In Worten besagt die Relation (1.27b), dass die Rotation eines Gradientenfeldes immer verschwindet und (1.27c), dass die Divergenz der Rotation eines Vektorfeldes immer verschwindet. Interessanterweise gelten davon auch die Umkehrungen:

Lemma 4 (Poincaré). 1) Ein rotationsfreies Vektorfeld $\mathbf{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ist *lokal* immer ein Gradientenfeld. Das heißt: Ist $\nabla \times \mathbf{V} = 0$, dann existiert um jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ und eine skalare Funktion $S : U' \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\mathbf{V}|_{U'} = \nabla S$. Man nennt S das *skalare Potential* zu \mathbf{V} .

2) Ein divergenzfreies Vektorfeld $\mathbf{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ist *lokal* immer ein Rotationsfeld. Das heißt: Ist $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, dann existiert um jeden Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ eine offene Umgebung $U' \subseteq U$ und eine vektorwertige Funktion $\mathbf{F} : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $\mathbf{V}|_{U'} = \nabla \times \mathbf{F}$. Man nennt \mathbf{F} das *Vektorpotential* zu \mathbf{V} . Letzteres ist wegen (1.27b) nicht eindeutig bestimmt. Genauer: Erfüllt \mathbf{F} die Gleichung $\mathbf{V}|_{U'} = \nabla \times \mathbf{F}$, dann auch jedes $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \nabla S$, wobei S ein beliebiges (glattes) Skalarfeld ist. Diese Freiheit kann man nutzen um von \mathbf{F} die Divergenzfreiheit zu fordern, so dass also gilt $\mathbf{V}|_{U'} = \nabla \times \mathbf{F}$ mit $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. \square

Einen Beweis dieses an Wichtigkeit kaum zu überschätzenden Resultats, das in allen Teilbereichen der theoretischen Physik immer wieder zur Anwendung kommt, werden wir hier nicht anbieten. Wir verweisen aber auf den Beweis des verwandten Satzes von Helmholtz in Abschnitt 8.4.5.

Kapitel 2

Die Maxwell-Gleichungen (MG)

„Auf die Frage ‘Was ist die Maxwell’sche Theorie?’ wüsste ich also keine kürzere und bestimmtere Antwort als diese: „Die Maxwell’sche Theorie ist das System der Maxwell’schen Gleichungen“ [?, S. 23]

2.1 Differentielle Form

Die Maxwell-Gleichungen – die wir im Folgenden immer mit “MG” abkürzen werden – verknüpfen die Felder (\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B}) mit den Quellen ρ der elektrischen Ladungsdichte und \mathbf{J} der elektrischen Stromdichte:

$$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \otimes C \cdot m^{-3}, \quad (t, \mathbf{x}) \mapsto \rho(t, \mathbf{x}), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{J} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes C \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}, \quad (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{J}(t, \mathbf{x}). \quad (2.1b)$$

Es gibt 8 Gleichungen; 4 von diesen enthalten die Quellen nicht und heißen die *homogenen Maxwell-Gleichungen*, die anderen 4 enthalten die Quellen und heißen die *inhomogenen Maxwell-Gleichungen*:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (\text{homogene MG}), \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dot{\mathbf{D}} \quad (\text{inhomogene MG}). \quad (2.2b)$$

Dabei bezeichnet ein Punkt die partielle Zeitableitung; $\dot{\mathbf{E}} := \partial \mathbf{E} / \partial t$. Man beachte, dass die homogenen (quellenlosen) MG nur das Feld-Paar (\mathbf{E} , \mathbf{B}) involvieren, während die inhomogenen Gleichungen mit Quellen (ρ , \mathbf{J}) nur das Feld-Paar (\mathbf{D} , \mathbf{H}) enthalten.

Zunächst vergleichen wir einmal die Anzahl der unbekannt Funktionen mit der Anzahl der Gleichungen: Die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} besitzen zusammen $4 \times 3 = 12$ Komponentenfunktionen. Zu diesen kommen noch die drei Funktionen \mathbf{J} und die eine Funktion ρ . Zusammen haben wir also 16 Funktionen, die Gegenstand von nur 8 Maxwell Gleichungen sind. Zu deren Integration benötigen wir also zusätzliche Informationen. Nun erhalten wir $2 \times 3 = 6$ weitere Komponentengleichungen durch die zwei Konstitutivrelationen (1.6). Außerdem gilt oft noch das bisher ausgelassene *Ohm'sche Gesetz*, dass die Stromdichte \mathbf{J} mit der elektrischen Feldstärke durch die *spezifische Leitfähigkeit* σ linear verknüpft:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Die physikalische Einheit von σ ist also

$$[\sigma] = [\mathbf{J}][\mathbf{E}]^{-1} = A \cdot m^{-2} \cdot m \cdot V^{-1} = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}. \quad (2.4)$$

Setzen wir die Materialgrößen ϵ , μ und σ als konstant und bekannt voraus, so haben wir $8 + 6 + 3 = 17$ Komponentengleichungen für 16 Komponentenfunktionen.

Bemerkung 5. Es fällt auf, dass jeweils eine der vier homogenen Komponentengleichungen (2.2a) (nämlich $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) und eine der vier inhomogenen Komponentengleichungen (2.2b) (nämlich $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$) keine Zeitableitungen enthalten. Sie dienen also nicht der zeitlichen Entwicklung von Anfangsdaten sondern schränken diese vielmehr ein. Anfangskonfigurationen, die diesen Gleichungen widersprechen, sind also unzulässig. Man spricht in solchen Fällen auch von *Constraints* (engl. für "Zwangsbedingungen") an die Anfangsdaten. Man kann zeigen: Sind die Constraints anfänglich erfüllt und entwickeln sich die Felder gemäß den MG, dann sind sie auch zu jedem anderen Zeitpunkt erfüllt. Wir werden auf den einfachen Beweis in Abschnitt 3.2 zurückkommen. \square

Die MG beschreiben, wie elektromagnetische Felder durch gegebene Verteilungen von Ladungen und Strömen (bewegte Ladungen) erzeugt werden. Sie legen aber nicht fest, wie die Felder die Bewegungen der Ladungen beeinflussen. Dazu ist eine unabhängige Annahme notwendig die im *Lorentz'schen Kraftgesetz* formuliert wird. Dieses besagt, dass die Kraftdichte $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ auf die durch $\rho(t, \mathbf{x})$ und $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ charakterisierte Ladungs- und Stromverteilung gegeben ist durch

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Für eine Punktladung der Stärke q , die sich entlang der räumlichen Bahn $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ bewegt und deren Ladungs- und Stromdichte gegeben sind durch

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)), \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) \dot{\mathbf{z}}(t), \quad (2.6b)$$

folgt aus (2.5) durch Integration über den Raum

$$\mathbf{F}(t) = q \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{z}(t)) + \dot{\mathbf{z}}(t) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{z}(t)) \right). \quad (2.7)$$

Bei gegebenen Funktionen \mathbf{E} und \mathbf{B} erhält man daraus und aus der Newton'schen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{z}}$ die Bahn $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ des Teilchens als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$m \ddot{\mathbf{z}}(t) = q \left(\mathbf{E}(t, \mathbf{z}(t)) + \dot{\mathbf{z}}(t) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{z}(t)) \right). \quad (2.8)$$

Hier ist m die träge Masse der Punktladung.

Wie bereits eingangs erwähnt, sehen wir \mathbf{E} und \mathbf{B} als die fundamentalen Felder an, die auch auf mikroskopischer Ebene durch die Kraftwirkungen aus Probeladungen gemäß (2.7) definiert sind. Man kann die in (1.6) definierten Felder \mathbf{P} der elektrischen Polarisierung und \mathbf{M} der Magnetisierung benutzen um mit ihnen \mathbf{D} und \mathbf{H} aus den inhomogenen MG (2.2b) zu eliminieren. Damit ist natürlich noch nichts gewonnen, denn man hat ja lediglich zwei unbekannte Vektorfelder – nämlich \mathbf{D} und \mathbf{H} – durch zwei andere – nämlich \mathbf{P} und \mathbf{M} – ersetzt, also im wesentlichen nur Größen umbenannt. Schreibt man jedoch dann die inhomogenen MG so um, dass die Terme die \mathbf{P} und \mathbf{M} enthalten auf der rechten Seite als Quellen auftreten, ergibt sich ein etwas anderes und neues Verständnis der MG. Diese lauten dann

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (2.9a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}). \quad (2.9b)$$

Diese Gleichungen besagen etwas darüber, was als Quellen dieser Felder innerhalb von Materie angesehen werden muss. Für das elektrische Feld wirken als Quellen zwei Ladungsdichten: Die *freie Ladungsdichte* $\rho_f := \rho$ und die *Polarisierungs- oder gebundene Ladungsdichte*, die entweder mit dem Index “P” (für “Polarisierung” oder dem Index “b” für “bound” (englisch für gebunden) bezeichnet wird und definiert ist durch $\rho_P \equiv \rho_b =: -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Die totale Ladungsdichte ist also

$$\rho_{\text{tot}} := \rho_f + \underbrace{\rho_P}_{\rho_b} := \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (2.10)$$

Für das magnetische Feld \mathbf{B} wirken als Quellen neben dem Term proportional zu $\dot{\mathbf{E}}$ nun gleich drei Strömdichten: Die *freie Stromdichte* $\mathbf{J}_f := \mathbf{J}$, die *Magnetisierungsstromdichte* $\mathbf{J}_M := \nabla \times \mathbf{M}$ und die *Polarisationsstromdichte* $\mathbf{J}_P := \dot{\mathbf{P}}$. Die Summe aus Magnetierungs- und Polarisationsstromdichte nennt man auch die *gebundene*

Stromdichte und bezeichnet sie wieder durch einen index “b” (für “bound”). Also ist

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_f + \underbrace{\mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P}_{\mathbf{J}_b} := \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}}. \quad (2.11)$$

Natürlich ist jetzt mathematisch immer noch nichts erreicht; wir haben ja nur Gleichungen umgestellt und Terme umbenannt. Was die Gleichungen uns aber sagen, ist, dass wenn wir durch sie \mathbf{E} und \mathbf{B} in einer gegebenen Anwendung bestimmen lassen wollen, wir ihnen eine *zusätzliche* Information darüber geben müssen, was im vorliegenden Fall die Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} sind oder wie sie funktional mit den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} zusammenhängen; denn dann bestimmen (2.2a) und (2.9) zusammen sowohl die Divergenzen als auch die Rotationen beider Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} und damit die Felder selbst (bei gegebenen Randbedingungen oder im ganzen Raum bei hinreichend schnellem Abfall im Unendlichen) gemäß dem Helmholtz’schen Satz (siehe Abschnitt 8.4.5).

Diese zusätzliche Information kann man sich nun in vielen Anwendungen auf Basis der *physikalischen Interpretation* der Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} verschaffen: \mathbf{P} ist die räumliche Dichte der elektrischen, \mathbf{M} die der magnetischen Dipolmomente. Diese können beispielsweise durch mikroskopische Modelle und Anwendung weiterer physikalischer Gesetze in einen funktionalen Zusammenhang mit den Feldern (\mathbf{E}, \mathbf{B}) gebracht werden; und selbst wenn man sich mit einer phänomenologisch motivierten Annahme über die Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} begnügt, ohne diese weiter theoretisch zu begründen, kommt man damit doch wenigstens zu einer exakten Lösung der MG. Das werde wir am Beispiel des Stabmagneten oder der polarisierten Kugel explizit durchrechnen. Mit Hilfe solcher Modelle kann man dann im Sinne eines “Trial and Error” die Annahmen schrittweise modifizieren, um so schließlich zu physikalisch realistischen Lösungen der MG zu kommen. In diesem Sinne gilt auch hier oft das, was der bekannte mathematischer Physiker Arthur Wightman (1922-2013) einmal in einem verwandten Zusammenhang über das Verhältnis zwischen mathematischer Strenge und physikalischem Realitätsbezug gesagt hat [?, p. 204, Sec. 3]

“The theoretical results currently available fall into two categories: rigorous results on approximate models and approximate results on realistic models.“

2.2 Integrale Form

Aus der Differentialgleichungen (2.2), die man auch die MG in *differentieller Form* nennt kann man durch Integration und Verwendung der Integralsätze von Gauß und Stokes die sogenannten MG in *integraler Form* erhalten. Diese wollen wir noch aufschreiben.

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein orientiertes Gebiet mit orientiertem glattem Rand ∂G . Dann können wir die jeweils die erste, die Divergenz von \mathbf{B} und \mathbf{D} enthaltende Gleichung von (2.2a) bzw. (2.2b) über G integrieren und unter Verwendung des Gauß'schen Satzes (8.36) in ein Oberflächenintegral umformen. Wir bekommen so

$$\int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.12a)$$

$$\int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = Q(G). \quad (2.12b)$$

Die erste Gleichung besagt, dass der Fluss des Vektorfeldes \mathbf{B} durch die Randfläche eines Raumgebiets G immer verschwindet. Die zweite Gleichung besagt, dass der Fluss des Vektorfeldes \mathbf{D} durch die Randfläche eines Raumgebiets G immer gleich ist der in diesem Raumgebiet enthaltenen elektrischen Ladung Q . Achtung: Diese Aussagen gelten gemäß Ableitung nur für Integrale über solche Flächen im \mathbb{R}^3 , die Rand eines Gebietes $G \subset \mathbb{R}^3$ sind in dem die betreffenden Felder überall definiert sind.

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche im \mathbb{R}^3 mit glatter orientierter Randkurve ∂F . Wir integrieren nun die zweiten, die Rotation von \mathbf{E} und \mathbf{H} enthaltenden Gleichungen (2.2a) bzw. (2.2b) über F und verwenden den Stokes'schen Satz (8.43) um die Integrale der Rotationen in Kurvenintegrale umzuwandeln:

$$\int_{\partial F} d\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B}, F)}{dt}, \quad (2.13a)$$

$$\int_{\partial F} d\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = \Phi(\mathbf{J}, F) + \frac{d\Phi(\mathbf{D}, F)}{dt}. \quad (2.13b)$$

Hier haben wir allgemein den Fluss eines Vektorfeldes \mathbf{V} durch die orientierte Fläche F mit

$$\Phi(\mathbf{V}, F) := \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (2.14)$$

bezeichnet. Vergleiche zur Notation Abschnitt 8.3 und Formel (8.26a). Dabei haben wir angenommen, dass wir die zeitliche Differentiation in $\dot{\mathbf{B}}$ und $\dot{\mathbf{D}}$ mit der

Integration über die Fläche F vertauschen dürfen, dass also für $\mathbf{X} = \mathbf{B}$ oder \mathbf{D} gilt:

$$\Phi(\dot{\mathbf{X}}, F) = \frac{d\Phi(\mathbf{X}, F)}{dt}. \quad (2.15)$$

Das ist richtig, wenn die Fläche F selbst nicht zeitabhängig ist, was wir hier explizit annehmen wollen. Ansonsten würden weitere Beiträge zu berücksichtigen sein, die aus der Zeitabhängigkeit von F zu berechnen sind.

Die Integralform (2.13a) nennt man das *Faraday'sche Induktionsgesetz*. Es besagt, dass die entlang der Randkurve ∂F induzierte elektrische Spannung (Wegintegral der elektrischen Feldstärke) gleich ist der zeitlichen Rate der Abnahme des magnetischen Flusses durch die Fläche F . Das Minuszeichen auf der rechten Seite von *Faraday'sche Induktionsgesetz* bezeichnet man auch als *Lenz'sche Regel*. Seinetwegen haben wir von "Abnahme" (und nicht Zunahme) gesprochen. Dieses Minuszeichen ist essentiell. Ohne dieses gälte kein Energieerhaltungssatz in der Maxwell'schen Elektrodynamik.

Die Integralform (2.13b) nennt man das *Ampère'sche Durchflutungsgesetz*. Es besagt, dass die entlang der Randkurve ∂F induzierte magnetische Spannung (Wegintegral der magnetischen Feldstärke) gleich ist der Summe aus dem Fluss des freien elektrischen Stroms und der zeitlichen Rate der Zunahme des elektrischen Flusses durch die Fläche F . Oft bezeichnet man auch $\dot{\mathbf{D}}$ als *Maxwell'schen Verschiebungsstrom*, so dass man auch sagen kann, dass die magnetische Spannung gleich ist der Summe der Flüsse des freien- und des Verschiebungsstroms.

Für beide Gesetze gilt, dass falls zwei Flächen F_1 und F_2 die gleiche Randkurve $K = \partial F_1 = \partial F_2$ besitzen die linken und damit eben auch die rechten Seiten von (3.4) gleich sind.

2.3 Symmetrien

2.3.1 Allgemeines

Die MG besitzen eine Reihe von Symmetrien, auf die wir in der speziell-relativistischen Formulierung noch ausführlich zu sprechen kommen werden. An dieser Stelle wollen wir aber bereits einige mehr oder weniger "offensichtliche" Symmetrieeigenschaften diskutieren, die uns auch die Gelegenheit geben, das Konzept der "Symmetrie" in Bezug auf mathematische Gleichungen zu erklären, das in der modernen Physik von zentraler Bedeutung ist. Was heißt es, wenn man sagt, eine Gleichung oder ein System von Gleichungen besitze "Symmetrien"? Dafür

wollen wir eine allgemeine Definition geben. Davor müssen wir jedoch einige Begriffe festlegen.

Was die algebraische Struktur einer Gruppe ist, setzen wir als bekannt voraus. Ebenfalls die Begriffe “Homomorphismus” und “Isomorphismus”, die Abbildungen zwischen Gruppen charakterisieren. Als Beispiel einer Gruppe nennen wir $\text{Bij}(M)$, das ist die Menge der Bijektionen einer Menge M , also die Menge aller zugleich injektiven und surjektiven Abbildungen von M auf sich. Diese bilden eine Gruppe, in der die Gruppenmultiplikation die Komposition von Abbildungen ist (die wir mit dem Symbol \circ bezeichnen) und das neutrale Element (die Gruppenidentität) durch die Identitätsabbildung id_M gegeben ist, die jedem Element $m \in M$ sich selbst zuordnet.

Definition 6. Unter einer “Aktion” oder auch “Operation” einer Gruppe G auf einer Menge M versteht man einen Gruppenhomomorphismus

$$O : G \rightarrow \text{Bij}(M), \quad g \mapsto O_g. \quad (2.16a)$$

Es gilt also

$$O_e = \text{id}_M \quad \text{und} \quad O_g \circ O_h = O_{gh}, \quad (2.16b)$$

wo $e \in G$ das neutrale Element in G bezeichnet. \square

Gruppenaktionen können sehr verschiedene Eigenschaften haben; hier sind die wichtigsten:

Definition 7. Die Aktion (2.16) heißt “effektiv” wenn die Abbildung O in (2.16a) injektiv ist, also wenn aus $O_g = \text{id}_M$ folgt $g = e$; oder anders ausgedrückt, wenn der Kern von O trivial ist (nur aus dem neutralen Element in G besteht). Das bedeutet, dass kein $g \neq e$ alle Punkte in M fest lässt (jedes $g \neq e$ bewegt mindestens einen Punkt in M). Sie heißt “frei”, falls kein $g \neq e$ einen Fixpunkt besitzt (jedes $g \neq e$ bewegt jeden Punkt in M). Sie heißt “transitiv” wenn für je zwei Punkte m, m' aus M ein $g \in G$ existiert, so dass $m' = O_g(m)$ (von jedem Punkt in M kommt man zu jedem anderen). Schließlich heißt sie “einfach transitiv” wenn zu jedem Paar (m, m') genau ein g existiert, so dass $m' = O_g(m)$. \square

Dieses allgemeine Konzept wenden wir nun auf Gleichungen an, wobei wir das Wort “Gleichung” ebenfalls sehr allgemein interpretieren, nämlich als Selektionskriterium, das aus einer Menge \mathcal{F} von Funktionen (bei uns Feldern) diejenigen auswählt, die eben den Gleichungen genügen (diese lösen).

Definition 8. Ein Gleichungssystem \mathcal{G} in Bezug auf eine Menge \mathcal{F} von Feldern (oder allgemein dynamischen Größen) heißt *symmetrisch* unter einer Gruppe G ,

wenn es eine effektive Operation O der Gruppe G auf der Menge \mathcal{F} gibt, so dass die Untermenge $\mathcal{F}_G := \{F \in \mathcal{F} : F \text{ löst } \mathcal{G}\}$ invariant (als Menge) bleibt, also Lösungen auf (i.a. verschiedene) Lösungen abgebildet werden. \square

Bemerkung 9. In dieser Definition wurde auf effektive Aktionen eingeschränkt, da sonst mit der trivialen Aktion $O : G \rightarrow \text{id}_M$ jede Gruppe Symmetriegruppe jedes Gleichungssystems wäre. Diese Einschränkung erfolgt außerdem o.B.d.A: Denn ist O nicht effektiv, hat also der Homomorphismus O einen nicht-trivialen Kern $K \subset G$, dann ist dieser eine invariante (normale) Untergruppe von G und man kann D auf die Quotientengruppe $G' := G/K$ einschränken, die nun effektiv operiert. \square

Bemerkung 10. Man beachte, dass bei gegebenem Gleichungssystem \mathcal{G} für \mathcal{F} die Feststellung einer Symmetriegruppe G nicht nur die Gruppe G selbst betrifft sondern auch ihre Operation O auf \mathcal{F} . Nur von dem Tupel (G, O) ist es sinnvoll zu sagen, es realisiere eine Symmetrie. Eine Gruppe G wird i.a. nur für eine sehr spezielle Operation O auf \mathcal{F} eine Symmetrie realisieren, nicht aber bezüglich anderer. Welche Operation “physikalisch die richtige” ist kann oft nur anhand der Gleichungen selbst entscheiden werden. Wenn man ohne Verweis auf eine Operation von einer Gruppe sagt, sie sei eine Symmetriegruppe eines Gleichungssystems, so heißt das meistens, dass diese Aussage unter einer irgendwie offensichtlichen oder vorher unterstellten Operation richtig ist. Es kann auch heißen: „Es gibt eine Operation O der genannten Gruppe G , so dass (G, O) eine Symmetrie realisiert.“ In diesem Fall stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit und ob es gegebenenfalls das Hinzuziehen weiterer (physikalischer) Prinzipien gestattet, unter den möglichen Operationen O, O', O'', \dots eine eindeutige auszuwählen. \square

2.3.2 Einige diskrete Symmetrien der MG

Als Beispiel betrachten wir hier drei verschiedene diskrete Symmetrien der MG. Diskret heißt hier, dass G als Menge abzählbar, im vorliegenden Fall sogar endlich ist. In der Tat handelt es sich um die einfachste, nicht-triviale Gruppe: \mathbb{Z}_2 .¹ Diese kann auf den Feldern $\mathcal{F} = \{\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \rho, \mathbf{J}\}$ die in den MG vorkommen, auf vielerlei Weisen operieren. Zwei dieser Operationen sind folgende, die wir durch einen Index P bzw. T kennzeichnen. Die mit diesen Symbolen versehenen Felder sind zu verstehen als Ergebnis der Operation des nicht-neutralen Elements von \mathbb{Z}_2 diesem Feld; also z.B. bildet die durch P indizierte Operation das elektrische Feld

¹Die Gruppe \mathbb{Z}_2 kann man sich etwa als die additive Gruppe der ganzen Zahlen modulo 2, also den Quotienten der Gruppe \mathbb{Z} der ganzen Zahlen nach dem Normalteiler der geraden Zahlen denken: $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alternativ kann man sie sich auch als die multiplikative Gruppe von $\{1, -1\}$ denken.

\mathbf{E} auf einen neues, \mathbf{E}_P , ab, das dann dadurch definiert ist, dass der Wert des Feldes \mathbf{E}_P zur Zeit t und am Ort \mathbf{x} gleich ist dem Negativen des Wertes von \mathbf{E} zur Zeit t am Ort $-\mathbf{x}$. In Formeln: $\mathbf{E}_P(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{E}(t, -\mathbf{x})$. Insgesamt haben wir für die P und T -Operation folgende Vorschriften:

$$\mathbf{E}_P(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{E}(t, -\mathbf{x}), \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{D}_P(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{D}(t, -\mathbf{x}), \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{B}_P(t, \mathbf{x}) = +\mathbf{B}(t, -\mathbf{x}), \quad (2.17c)$$

$$\mathbf{H}_P(t, \mathbf{x}) = +\mathbf{H}(t, -\mathbf{x}), \quad (2.17d)$$

$$\rho_P(t, \mathbf{x}) = +\rho(t, -\mathbf{x}), \quad (2.17e)$$

$$\mathbf{J}_P(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{J}(t, -\mathbf{x}), \quad (2.17f)$$

bzw.

$$\mathbf{E}_T(t, \mathbf{x}) = +\mathbf{E}(-t, \mathbf{x}), \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{D}_T(t, \mathbf{x}) = +\mathbf{D}(-t, \mathbf{x}), \quad (2.18b)$$

$$\mathbf{B}_T(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{B}(-t, \mathbf{x}), \quad (2.18c)$$

$$\mathbf{H}_T(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{H}(-t, \mathbf{x}), \quad (2.18d)$$

$$\rho_T(t, \mathbf{x}) = +\rho(-t, \mathbf{x}), \quad (2.18e)$$

$$\mathbf{J}_T(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{J}(-t, \mathbf{x}). \quad (2.18f)$$

Man beweist nun leicht mit Hilfe der Kettenregel, dass die mit P und T indizierten Felder die MG (2.2) erfüllen, wenn das für die Ausgangsfelder zutrifft. Die Gruppe \mathbb{Z}_2 operiert also auf zwei verschiedene Weisen als Symmetriegruppe der MG. In der P -Variante nennt man diese Operation *Paritätstransformation*, in der T -Variante die Transformation der *Zeit- oder Bewegungsumkehr*. Man sagt auch, die MG seien unter diesen Operationen *invariant*. Man beachte besonders das jeweils unterschiedliche Verhalten (Minuszeichen) der elektrischen und magnetischen Felder, ohne den keine Symmetrie vorliegen würde.

Als Anwendung betrachten wir das Verhalten eines elektrisch geladenen Teilchens, das sich unter Einfluss der Lorentzkraft nach dem Newton'schen Bewegungsgesetz (2.8). Man beweist nun leicht folgenden

Satz 11. Sei $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ die Bahnkurve eines elektrisch geladenen Teilchens, die der Bewegungsgleichung (2.8) mit den Feldern (\mathbf{E}, \mathbf{B}) genügt. Dann genügen \mathbf{z}_P und \mathbf{z}_T , die definiert sind durch

$$\mathbf{z}_P(t) = -\mathbf{z}(t), \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{z}_T(t) = \mathbf{z}(-t), \quad (2.19b)$$

den Bewegungsgleichungen (2.8) mit den Feldern $(\mathbf{E}_P, \mathbf{B}_P)$ bzw. $(\mathbf{E}_T, \mathbf{B}_T)$. \square

Der Beweis ist eine gute Übung.

Die Maxwell Gleichungen (2.2) haben noch eine weitere, sehr einfache aber deshalb nicht weniger wichtige diskrete \mathbb{Z}_2 -Symmetrie: Die sogenannte *Ladungskonjugation*, oder englisch “charge conjugation”. Sie wird mit einem Index C bezeichnet und bedeutet physikalisch, dass man an allen im System vorkommenden Ladungen das Vorzeichen ändert. Dann gehen Ladungsdichten, Stromdichten und alle von ihnen linear erzeugte Felder in ihr Negatives über. Sie besteht also einfach darin, alle vorkommenden Felder mit (-1) zu multiplizieren nach dem Schema:

$$X \mapsto X_C, \quad X_C(t, \mathbf{x}) := -X(t, \mathbf{x}). \quad (2.20)$$

Dabei steht X stellvertretend für jedes der Felder $\{\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \rho, \mathbf{J}\}$. Da die Transformation auf allen Feldern gleich wirkt, begnügen wir uns mit (2.20) und schreiben nicht alle gesondert auf. Ohne weitere Rechnung ist sofort klar, dass die so transformierten Felder die MG (2.2) erfüllen sofern es die Ausgangsfelder taten, denn die Gleichungen (2.20) sind ja in den Feldern linear: Wir können also die (als erfüllt vorausgesetzten) Gleichungen für die Ausgangsfelder mit (-1) multiplizieren und erhalten so die dann ebenfalls erfüllten Gleichungen für die ladungskonjugierten Felder. Man beachte, dass hier, im Gegensatz zu (2.17) und (2.18), die Argumente der Felder, also (t, \mathbf{x}) , von der Ladungskonjugation unberührt bleiben.

Zusammengenommen haben wir nun drei verschiedene Symmetrien kennengelernt, von denen jede einer anderen Operation der Gruppe \mathbb{Z}_2 auf der Menge der Felder entspricht, die wir mit den Buchstaben P (für Parität; engl. “parity”), T (für Zeitumkehr; engl. “time reversal”) und C (für Ladungskonjugation; engl. “charge conjugation”) gekennzeichnet haben. Da jede dieser Transformationen eine Symmetrie der MG darstellen, gilt dies auch für alle ihre Kombinationen. Man prüft nun leicht nach, dass die drei Transformationen P, T, C auf den Feldern vertauschen, d.h. die Ergebnisse ihrer kombinierten Anwendungen nicht davon abhängen, in welcher Reihenfolge sie erfolgen. Kombiniert man alle diese Transformationen, so erhält man eine 8-elementige abelsche Symmetriegruppe die isomorph ist zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, wobei die erste \mathbb{Z}_2 von der Paritätstransformation erzeugt wird, die zweite von der Zeitumkehr und die dritte von der Ladungsumkehr. Führt man etwa an den Feldern jede der Transformationen C, P und T gemäß (2.20), (2.17) und (2.19) aus (die Reihenfolge ist hier egal; traditionell spricht man von der CPT -Transformation), so erhält man die CPT -transformierten Felder, die natürlich wie-

der die MG erfüllen (sofern es die Ausgangsfelder taten). Sie lauten:

$$\mathbf{E}_{CPT}(t, \mathbf{x}) = + \mathbf{E}(-t, -\mathbf{x}), \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{D}_{CPT}(t, \mathbf{x}) = + \mathbf{D}(-t, -\mathbf{x}), \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{B}_{CPT}(t, \mathbf{x}) = + \mathbf{B}(-t, -\mathbf{x}), \quad (2.21c)$$

$$\mathbf{H}_{CPT}(t, \mathbf{x}) = + \mathbf{H}(-t, -\mathbf{x}), \quad (2.21d)$$

$$\rho_{CPT}(t, \mathbf{x}) = - \rho(-t, -\mathbf{x}), \quad (2.21e)$$

$$\mathbf{J}_{CPT}(t, \mathbf{x}) = - \mathbf{J}(-t, -\mathbf{x}). \quad (2.21f)$$

Man prüft leicht direkt an (2.2) nach, dass es sich dabei in der Tat um eine Symmetrie handelt. Wir erwähnen das an dieser Stelle, weil die *PTC*-Transformation in der relativistischen Quantenfeldtheorie, die dem Standardmodell der Elementarteilchen unterliegt, einen besonderen Status besitzt: Sie ist “ungebrochen”, d.h. die Feldgleichungen aller drei fundamentalen Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation², also der starken, schwachen und elektromagnetischen WW, besitzen die *CPT*-Kombination als Symmetrie. Dies ist die Aussage des in der relativistischen QFT geltenden *CPT-Theorems*. Die *CPT*-Symmetrie besitzt deshalb fundamentalen Status, während das nicht einzeln für *P*, *T* und *C* gilt. Die schwache WW beispielsweise bricht einzeln *C*, *P* und *T*, d.h., es gibt gemäß ihrer Gleichungen dynamische Prozesse wie den etwa den radioaktiven β -Zerfall, dessen *P* transformierte Version den Gleichungen nicht genügt.³ Gilt die *CPT*-Symmetrie, dann ist eine Verletzung der *T*-Symmetrie äquivalent einer Verletzung der *CP*-Symmetrie (engl. “*CP*-violation”). Von der schwachen WW ist bekannt⁴, dass sie die *CP*-Symmetrie bricht. Von der starken WW ist dies bisher phänomenologisch nicht bekannt (man nennt diesen Umstand das “strong *CP*-problem”). Eine Verletzung könnte in den theoretischen Rahmen der QCD (Quantenchromodynamik) eingebaut werden.

²Die Gravitation wird im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie als eine klassische Feldtheorie beschrieben und es ist bis heute unklar, ob und wie sie in einem quantenfeldtheoretischen Rahmen verallgemeinert werden soll und kann, so wie die Maxwell’sche Theorie der klassischen Elektrodynamik in der QED (Quantenelektrodynamik) aufgeht. Man nennt dies das *Problem der Quantengravitation*. Das “Problem” besteht sowohl in der Frage “ob” als auch der Frage “wie”.

³Experimentell wurde die “Paritätsverletzung” am schwachen β -Zerfall 1956 nachgewiesen (“Wu-Experiment”) und schon im Folgejahr 1957 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

⁴Die *CP*-Verletzung wurde 1964 am Zerfall des neutralen Kaons nachgewiesen und 1980 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

2.3.3 Einige kontinuierliche Symmetrien der MG

Neben den diskreten besitzen die MG aber auch kontinuierliche Symmetrien, deren Gruppen G also die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen und besondere Beispiele von *Lie-Gruppen* sind.⁵ Die volle Symmetriegruppe werden wir erst in der speziell-relativistischen Formulierung kennenlernen. An dieser Stelle wollen wir aber zumindest zeigen, dass die Gruppe E_3 der euklidischen Bewegungen eine Symmetriegruppe der MG ist.

Unter einer euklidischen Bewegung versteht man die Komposition einer räumlichen Drehung mit Drehmatrix $\underline{\mathbf{R}}$ und einer räumlichen Translation mit dem Verschiebungsvektor \mathbf{a} :

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' := D_{(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}})} \mathbf{x} := \underline{\mathbf{R}} \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (2.22)$$

Dabei haben wir durch die Schreibweise gleich angedeutet, dass es sich hier um eine Aktion D der Gruppe E_3 auf dem Ortsraum \mathbb{R}^3 handelt. Die Gruppe E_3 ist als *Menge* das kartesische Produkt der Menge aller Translationen (die wir wieder mit \mathbb{R}^3 identifizieren) mit der Menge aller Drehmatrizen, die gegeben ist durch

$$SO(3) := \{ \underline{\mathbf{R}} \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) : \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}^T = \underline{\mathbf{1}}, \det(\underline{\mathbf{R}}) = 1 \}. \quad (2.23)$$

Als *Gruppe* ist aber E_3 nicht einfach das direkte Produkt $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ beider Gruppen, sondern das semi-direkte Produkt $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$, dessen Multiplikationsgesetz direkt aus (2.22) durch Hintereinanderausführung (mit dem Symbol \circ bezeichnet) von $D_{(\mathbf{a}', \underline{\mathbf{R}}')}$ und $D_{(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}})}$ folgt: Es ist

$$D_{(\mathbf{a}'', \underline{\mathbf{R}}'')} = D_{(\mathbf{a}', \underline{\mathbf{R}}')} \circ D_{(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}})} \quad (2.24a)$$

mit

$$(\mathbf{a}'', \underline{\mathbf{R}}'') = (\mathbf{a}', \underline{\mathbf{R}}')(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}}) = (\mathbf{a}' + \underline{\mathbf{R}}' \mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}}' \underline{\mathbf{R}}). \quad (2.24b)$$

Insbesondere ist das Inverse des Elements $(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}}) \in E_3$ gegeben durch

$$(\mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}})^{-1} = (-\underline{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}, \underline{\mathbf{R}}^{-1}). \quad (2.24c)$$

Wie aber operiert die Gruppe E_3 nun auf den Feldern der MG? Dies sind bis auf das Skalarfeld ρ alles Vektorfelder. Im Fall von Skalarfeldern wirkt die Gruppe lediglich auf das Argument. Dabei muss man nur berücksichtigen, dass die Wirkung

⁵Benannt nach dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842-1899). Lie-Gruppen kann man charakterisieren als solche Gruppen, die zugleich differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und in denen die Abbildungen der Multiplikation und Inversion differenzierbar sind. Abgeschlossene Untergruppen der Gruppe aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen sind z.B. Lie-Gruppen.

im Argument mit der *inversen* Operation auszuführen ist.⁶ Für Vektorfelder wird zusätzlich der Wert des Feldes mit dem Rotationsanteil $\underline{\mathbf{R}}$ verdreht, während die Translationen keinen Einfluss auf den Wert besitzen. Dies entspricht einer anderen Aktion von E_3 auf \mathbb{R}^3 (dem Vektorraum der Feldwerte), nämlich $D'_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} \mathbf{y} = \underline{\mathbf{R}} \mathbf{y}$. Diese hat die ganze (normale) Untergruppe der Translationen im Kern und ist deshalb nicht effektiv. Zusammen mit der Aktion im Argument des Feldes entsteht aber eine effektive Aktion von E_3 sowohl auf Skalarfeldern S und Vektorfeldern \mathbf{V} , die wie folgt sind:

$$O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} S = S \circ D_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})}^{-1}, \quad (2.25a)$$

$$O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} \mathbf{V} = \underline{\mathbf{R}} \circ \mathbf{V} \circ D_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})}^{-1}. \quad (2.25b)$$

Man mache sich klar, dass die Komposition von Abbildungen sinnvoll ist und dadurch in der Tat eine Aktion der Gruppe E_3 auf den Feldern definiert wird; also gilt (unbedingt nachrechnen!)

$$O_{(\underline{\mathbf{a}'}, \underline{\mathbf{R}}')} \circ O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} = O_{(\underline{\mathbf{a}'} + \underline{\mathbf{R}}' \underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}}' \underline{\mathbf{R}})}. \quad (2.25c)$$

Ausgeschrieben mit Argumenten heißen (2.25a) und (2.25b):

$$(O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} S)(t, \mathbf{x}) = S(t, \underline{\mathbf{R}}^{-1}(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{a}})), \quad (2.26a)$$

$$(O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} \mathbf{V})(t, \mathbf{x}) = \underline{\mathbf{R}} \mathbf{V}(t, \underline{\mathbf{R}}^{-1}(\mathbf{x} - \underline{\mathbf{a}})). \quad (2.26b)$$

Mit Hilfe der Kettenregel beweist man nun folgende Relationen für die diversen Ableitungen der Felder:

$$\nabla (O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} S) = O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} (\nabla S), \quad (2.27a)$$

$$\nabla \cdot (O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} \mathbf{V}) = O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} (\nabla \cdot \mathbf{V}), \quad (2.27b)$$

$$\nabla \times (O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} \mathbf{V}) = O_{(\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{R}})} (\nabla \times \mathbf{V}). \quad (2.27c)$$

Die Interpretation dieser Gleichungen ist ganz einfach: Die Aktion O der Gruppe vertauscht (kommutiert) mit allen Differentiationsoperationen (Gradient, Divergenz und Rotation).

Wir rechnen dies hier vor. Dazu notieren wir, dass die Jacobi-Matrix der Abbildung (2.22) gegeben ist durch

$$J_{ab} := \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} = R_{ab} \quad (2.28)$$

⁶Man erinnere sich: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann ist die um die positive Strecke a nach rechts in Richtung der positiven x -Achse verschobene Funktion gegeben durch $f_a(x) := f(x - a)$, also $f_a = f \circ T_a^{-1}$, wenn $T_a : x \mapsto T_a(x) := x + a$ die Aktion der Translationsgruppe \mathbb{R} auf der x -Achse bezeichnet.

wo R_{ab} die Komponenten der Drehmatrix \mathbf{R} sind, die gemäß Definition (2.23) der Orthogonalitätsrelation genügen, die wir hier nochmals in Komponentenschreibweise wiedergeben:

$$R_{an}R_{bn} = R_{na}R_{nb} = \delta_{ab}. \quad (2.29)$$

Somit erfüllt auch die Jacobi-Matrix diese Relationen. Für eine allgemeine Funktion f , die entweder ein Skalarfeld oder die Komponente eines Vektorfeldes repräsentieren möge, gilt dann die Kettenregel

$$\nabla_a(f \circ D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}) = J_{ma}(\nabla_m f) \circ D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})} = R_{ma}(\nabla_m f) \circ D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}. \quad (2.30)$$

Hätten wir im Argument mit $D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}^{-1}$ komponiert stünde statt R_{ma} die ma -Komponente der Inversen, also R_{am} . Daraus folgt sofort (2.27a) falls für f ein Skalarfeld S eingesetzt wird. Für ein Vektorfeld \mathbf{V} erhalten wir für $\nabla_a V'_b$, wenn \mathbf{V}' das gemäß (2.26b) transformierte Feld bezeichnet,

$$\begin{aligned} \nabla_a [O_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})} \mathbf{V}]_b &= \nabla_a \left[R_{bn} (V_n \circ D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}^{-1}) \right] \\ &= R_{bn} \nabla_a \left[(V_n \circ D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}^{-1}) \right] \\ &= R_{am} R_{bn} (\nabla_m V_n) \circ D_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Durch Multiplikation mit δ_{ab} und Summation über a und b unter Beachtung von (2.29) erhält man (2.27b). Um (2.27c) zu erhalten multipliziert man (2.31) stattdessen mit ε_{abc} , summiert über a und b und beachtet, dass aus der Invarianz von ε_{abc} und (2.29) folgt:

$$\varepsilon_{abd} R_{am} R_{bm} R_{dl} = \varepsilon_{mnl} \Leftrightarrow \varepsilon_{abc} R_{am} R_{bm} = R_{cl} \varepsilon_{mnl}. \quad (2.32)$$

Damit sind die Relationen (2.27) gezeigt und auch der Beweis der E_3 -Symmetrie der MG bereits vollständig erbracht. Denn wendet man auf jede der Maxwell-Gleichungen $O_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}$ an, so kann man es mit den Differentiationsoperationen vertauschen und erhält unmittelbar die Maxwell-Gleichungen für die transformierten Felder. Da die Operationen $O_{(\mathbf{a}, \mathbf{R})}$ auf der Menge der Felder aber umkehrbar (also Bijektionen) sind, erfüllen die transformierten Felder die MG genau dann, wenn es die Ausgangsfelder tun; voilà!

Bemerkung 12. Die Operation O der Gruppe E_3 ist auf allen Vektorfeldern, die in den Maxwell-Gleichungen vorkommen, gleich und durch (2.25b) gegeben. Das ist nicht mehr richtig, wenn man zu den euklidischen Bewegungen noch die Raumspiegelungen, also Paritätstransformationen (2.17) hinzunimmt, also die spezielle

orthogonalen Gruppe $SO(3)$ zur vollen orthogonalen Gruppe $O(3)$ erweitert. Dann werden zwar die Argumente der Vektorfelder alle gleich transformiert, die Werte jedoch unterschiedlich: Die Magnetfelder \mathbf{B} und \mathbf{H} bekommen kein zusätzliches Minuszeichen bei Orientierungsumkehrenden Elementen in $O(3)$, die elektrischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{D} sowie der Strom \mathbf{J} aber schon. Eine Gleichbehandlung der Felder würde nicht zu einer Symmetrie der MG führen. Dieses unterschiedliche Verhalten bedeutet mathematisch nur, dass die Vektorräume, in denen die Felder ihre Werte annehmen, verschiedene Darstellungen der Gruppe $O(3)$ tragen, wobei die Darstellungen gleich sind, wenn man sie auf die Untergruppe $SO(3) \subset O(3)$ einschränkt. In der Physikkategorie spricht man dann manchmal von *polaren Vektoren*, wie \mathbf{E} , \mathbf{D} und \mathbf{D} , und *axialen Vektoren*, wie \mathbf{B} und \mathbf{H} . Das ist etwas irreführend, weil die Unterscheidung keine in der Kategorie der Vektorräume ist, sondern in der Kategorie der Vektorräume mit Darstellungen. \square

Bemerkung 13. Nachdem die Gruppe E_3 zusammen mit P und T als Symmetrie der MG erkannt ist, kann man sich fragen, ob diese Gruppe nicht zur Galilei-Gruppe erweiterbar ist. Sicher ist es richtig, dass auch die Zeittranslationen $t \mapsto t + b$ eine Symmetrie der MG bilden, wenn man sie so implementiert, dass lediglich das Zeitargument t aller vorkommenden Felder die Translation $t \mapsto t - b$ (komponiert wird im Argument immer mit der Inversen) erfährt; den dann vertauscht diese Operation ja offensichtlich mit allen vorkommenden Differentialoperatoren, insbesondere der Differentiation nach der Zeit. Was ist aber mit den Geschwindigkeitstransformationen der Form $t \mapsto t$ und $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}t$, die Raum und Zeitkoordinaten mischen? Dass diese keine Symmetrien der MG sein können, jedenfalls dann nicht, wenn die Operation auf den Feldern wieder so ist, dass deren Argumente wie $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t, \mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ transformieren, ist leicht aus Folgendem zu sehen: Wir werden gleich in Abschnitt (3.3) sehen, dass die MG Wellenlösungen im Vakuum zulassen deren Propagationsgeschwindigkeit immer gleich ist dem Wert von $c := 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Wären die eigentlichen Galilei-Transformationen eine Symmetrie, so dass die Argumente der Felder wie angegeben transformieren, dann würde eine ebene Welle, deren Argument nur von $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ abhängt und die sich deshalb mit der Phasengeschwindigkeit $c_{ph} = \omega/\|\mathbf{k}\|$ ausbreitet, nach der Transformation wieder nur vom Argument $(\omega t - \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)) = ((\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ abhängen, also eine Welle mit der geänderten Phasengeschwindigkeit $c'_{ph} = c_{ph} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ beschreiben. Diese sind aber nicht Wellenlösungen der MG, denn diese haben *alle* die gleiche Phasengeschwindigkeit $c_{ph} = c$. Das wirft die Frage auf, ob denn das Relativitätsprinzip, das ja in der klassischen Mechanik gerade durch die Galilei-Symmetrie implementiert wird, in der Elektrodynamik keine Gültigkeit besitzt. Dazu erinnern wir an die Formulierung des mechanischen Relativitätsprinzips, auch deshalb, weil der kursiv gesetzte Teil unvorsichtigerweise oft weggelassen wird:

Zwei identische abgeschlossene mechanische Systeme, die sich relativ zueinander in gleichförmig-geradliniger Bewegung befinden, sind *hinsichtlich der an den Einzelsystemen mechanisch messbaren Phänomene* ununterscheidbar.

Wäre diese Formulierung immer noch richtig, wenn wir darin “mechanische” durch “elektromagnetische” Systeme ersetzen? Das scheint nicht so zu sein, denn die Aussage, der Maxwell’schen Theorie, dass sich elektromagnetische Wellen *ausschließlich* mit der einen festen Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ausbreiten kann ja wohl nicht in allen Systemen zugleich gelten; oder? Also wird durch sie offensichtlich eines dieser Systeme ausgezeichnet, nämlich das, in dem elektromagnetische Wellen eben diese, durch die Theorie festgelegte Geschwindigkeit besitzen. Historisch wurde dieses ausgezeichnete System mit dem Ruhesystem eines den ganzen Raum erfüllenden hypothetischen Mediums identifiziert, dem man den Namen “Äther” gab (nicht zu verwechseln mit dem chemischen Äther).

Trotz alledem zeigt sich, dass das Relativitätsprinzip auch in der Elektrodynamik gilt! Es war die Spezielle Relativitätstheorie Einsteins aus dem Jahr 1905, die diesen scheinbaren Widerspruch aufgelöst hat. Dazu kommen wir noch! Einführendes und (hoffentlich!) leicht verständliches dazu findet der/die Interessierte in [?].

Kapitel 3

Erste allgemeine Folgerungen aus den MG

3.1 Ladungserhaltung

Wir nehmen die Divergenz der zweiten Gleichung (2.2b). Dann Verschwindet die linke Seite wegen (1.27c). Ersetzen wir dann noch $\nabla \cdot \mathbf{D}$ durch $\dot{\rho}$, was aus der ersten Gleichung (2.2b) nach deren zeitlicher Differentiation folgt, so erhalten wir:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.1)$$

Diese Gleichung drückt die Ladungserhaltung aus. Integriert man sie über ein räumliches Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ und wendet den Gauß'schen Satz an, so folgt

$$-\frac{dQ(G)}{dt} := -\frac{d}{dt} \int_G \rho(t, \mathbf{x}) dv = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}), \quad (3.2)$$

wobei ∂G den Rand von G bezeichnet. Auf der Linken Seite steht die negative zeitliche Änderungsrate der in G enthaltenen Ladung zum Zeitpunkt t , also deren zeitliche Verlustrate. Auf der rechten Seite steht das pro Zeiteinheit durch die Oberfläche ∂G von G nach außen strömenden Ladung. Die Gleichheit besagt, dass zu jedem Zeitpunkt die Abnahme der in G enthaltenen Ladung *ausschließlich* durch den Ladungsabtransport aus dem Gebiet G heraus stattfinden kann. Anders ausgedrückt: Das Komplement von G nimmt zu jedem Zeitpunkt soviel Ladung auf, wie G verliert. Die differentielle Form (3.1) beinhaltet diese Aussage zu jedem Zeitpunkt und für jedes (noch so kleine) Raumgebiet. Deshalb nennt man (3.1) auch die *lokale* Erhaltungsgleichung für die Ladung.

Bemerkung 14. Wie gesehen ist (3.1) eine notwendige Folge der MG; also $MG \Rightarrow (3.1)$. Man sagt auch: (3.1) ist eine *Integrabilitätsbedingung* für die MG. Die logisch korrekte Umkehrung davon ist $\overline{(3.1)} \Rightarrow \overline{MG}$. (Ein Überstreichen bedeutet die logische Negation). Hat man also eine Quelle (ρ, \mathbf{J}) die (3.1) verletzt, dann kann man dazu *niemals* elektromagnetische Felder finden, so dass insgesamt die MG erfüllt sind. \square

3.2 Erhaltung der Constraints

Nimmt man jeweils die Divergenz der zweiten Gleichungen von (2.2) so erhält man wieder wegen (1.27c) die zeitlichen Ableitungen der ersten. Für (2.2a) ist das sofort klar und für (2.2a) benutzt man noch die gerade abgeleitete Gleichung (3.1). Daraus folgt, dass die Constraints unter der Maxwell-Entwicklung erfüllt bleiben wenn sie anfänglich erfüllt sind. Das war einfach!

3.3 Wellenausbreitung in homogenen Umgebungen

Wir nehmen an, dass ε und μ räumlich und zeitlich konstant sind. Das schließt insbesondere natürlich auch das Vakuum ein, wo $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$. Wir können dann \mathbf{D} und \mathbf{H} zugunsten von \mathbf{E} und \mathbf{B} in (2.2b) eliminieren und erhalten

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (3.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.3b)$$

Von den jeweils zweiten Gleichungen nehmen wir die Rotation und erhalten unter Verwendung von (1.27d)

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\nabla \times \dot{\mathbf{B}}, \quad (3.4a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \mu \nabla \times \mathbf{J} + \mu \varepsilon \nabla \times \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.4b)$$

Bildet man hingegen statt der Rotation die zeitlichen Ableitungen der jeweils zweiten Gleichungen von (3.3), so folgt

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\ddot{\mathbf{B}}, \quad (3.5a)$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \mu \dot{\mathbf{J}} + \mu \varepsilon \ddot{\mathbf{E}}. \quad (3.5b)$$

Benutzt man diese um auf den rechten Seiten von (3.4) die Terme $\nabla \times \dot{\mathbf{B}}$ bzw. $\nabla \times \dot{\mathbf{E}}$ zu eliminieren, und eliminiert man weiter in (3.4) in den ersten Termen der

linken Seiten noch die Divergenzen von \mathbf{E} und \mathbf{B} gemäß der ersten Gleichungen von (3.3), so folgt schließlich:

$$\square \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{J}} - \varepsilon^{-1} \nabla \rho, \quad (3.6a)$$

$$\square \mathbf{B} = \mu \nabla \times \mathbf{J}. \quad (3.6b)$$

wobei wir den Wellenoperator \square definiert haben:

$$\square := \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.7)$$

mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{c_0}{n}. \quad (3.8)$$

Hier ist

$$c_0 := \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (3.9)$$

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und

$$n := \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \quad (3.10)$$

der *Brechungsindex* des durch μ_r und ε_r charakterisierten Materials. $c = c_0/n$ ist dann gerade die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen in dem Material in Abwesenheit der Quellen ausbreiten, also für $\rho = 0$ und $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

Bemerkung 15. Die Gleichungen (3.6) sind eine logische Folge der MG, für diese also notwendig. Sie sind aber nicht hinreichend: Nicht jede Lösung von (3.6) erfüllt auch die MG, aber jede Lösung der MG erfüllt (3.6). Es folgt, dass sich im ladungs- und stromfreien Raum die Felder mit der Geschwindigkeit $c = c_0/n$ ausbreiten. \square

Als Beispiel betrachten wir ebene Wellen für \mathbf{E} und \mathbf{B} . Diese dürfen wir als komplexwertige Funktionen schreiben, weil dann wegen der Linearität der Gleichungen sowohl der Real- als auch der Imaginärteil – die beide reell sind – die Gleichungen erfüllen und somit reelle Lösungen darstellen:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})), \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \varphi)), \quad (3.11b)$$

wobei ω eine konstante Kreisfrequenz, \mathbf{k} ein konstanter Wellenzahlvektor und φ eine konstante Phase ist. Letztere parametrisiert eine mögliche Phasenverschiebung der \mathbf{B} - gegen die \mathbf{E} -Welle. Dabei haben wir gleich der Einfachheit halber beide Wellen als von der gleichen Frequenz, Wellenzahl und Fortschrittrichtung

angenommen (wir hätten diese auch zunächst unabhängig voneinander wählen können, mit dem gleichen Endergebnis; s.u.). Die Funktionen (3.11) erfüllen (3.6) für $\rho = 0$ und $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, also die homogenen Wellengleichungen $\square \mathbf{E} = \square \mathbf{B} = \mathbf{0}$ sofern,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} =: \|\mathbf{k}\|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.12)$$

Weitere Bedingungen folgen aus (3.6) nicht. Damit sind die Gleichungen (3.3) aber noch keineswegs erfüllt. Vielmehr folgt aus deren beiden ersten Gleichungen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (3.13)$$

d.h. die *Transversalität* beider Wellen. Aus den zweiten Gleichungen (3.6) folgt wegen $\nabla \times \mathbf{E} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ und $\dot{\mathbf{E}} = i\omega \mathbf{E}$ (genauso für \mathbf{B}) und nach jeweils Wegkürzen des gemeinsamen Faktors $\exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}))$ auf beiden Seiten, dass

$$\begin{aligned} -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= -i\omega \mathbf{B}_0 \exp(i\varphi), \\ -i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 &= i(\omega/c^2) \mathbf{E}_0 \exp(-i\varphi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nach Wegkürzen von i und Beachten, dass die konstanten Vektoren \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 und \mathbf{k} reell sind, muss auch $\exp(i\varphi)$ reell sein, also $\varphi = 0$ (d.h. $\exp(i\varphi) = 1$) oder $\varphi = \pi$ (d.h. $\exp(i\varphi) = -1$). Der letzte Fall ist aber im ersten enthalten indem man dort \mathbf{k} durch $-\mathbf{k}$ ersetzt. Also dürfen wir uns auf $\varphi = 0$ beschränken, was besagt, dass die \mathbf{E} -Welle und die \mathbf{B} -Welle in Phase sein müssen. Weiter folgt aus (3.12), dass $\hat{\mathbf{k}} := (c/|\omega|)\mathbf{k}$ ein normierter Einheitsvektor in Fortschrittingsrichtung der ebenen Welle ist. Damit ist (3.14) äquivalent zu

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0 \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_0 = -(1/c)\mathbf{E}_0. \quad (3.15)$$

Da aber sowohl \mathbf{E}_0 also auch \mathbf{B}_0 gemäß (3.13) orthogonal zu $\hat{\mathbf{k}}$ sind, sind die beiden Gleichungen (3.15) zueinander äquivalent (jede folgt aus der anderen durch vektorielle Multiplikation mit $\hat{\mathbf{k}}$).

Somit haben wir als vollständige Konsequenzen der MG erhalten, dass ebene Wellen der Form (3.11) die quellenfreien MG genau dann erfüllen, wenn

1. $\varphi = 0$, die elektrischen und magnetischen Wellen also in Phase sind;
2. die Phasengeschwindigkeit $c_{ph} = \omega/\|\mathbf{k}\|$ gleich ist $c = c_0/n = c_0/\sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = 1/\sqrt{\mu \varepsilon}$;

3. die drei Vektoren $(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ ein rechtshändiges orthogonales System von Vektoren bildet mit $\|\mathbf{B}_0\| = \|\mathbf{E}_0\|/c$, also $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0$ und $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_0 = -\mathbf{E}_0/c$.

Die elektrischen und magnetischen Felder genügen beim Übergang zwischen Medien verschiedener relativer Konstanten μ_r und ε_r Stetigkeitsbedingungen. Diese ergeben dann für die Propagation von Wellen an diesen Grenzflächen die Gesetze für Reflexion- und Transmission. Insbesondere ergibt sich das Snellius'sche Brechungsgesetz und die Fresnel'schen Formeln. Dies zu leisten, und dann noch auf relativ einfache Weise, wurde und wird - zu Recht - als riesiger Erfolg der Elektrodynamik gewertet. Wir werden darauf zurückkommen

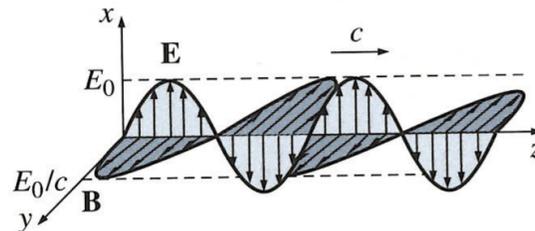


Abbildung 3.1: Feldstärkenbild einer eben-polarisierten elektromagnetischen Welle. Die Feldstärken zeigen transversal zur Ausbreitungsrichtung. Entnommen S. 482 von [?], Abbildung 9.10.

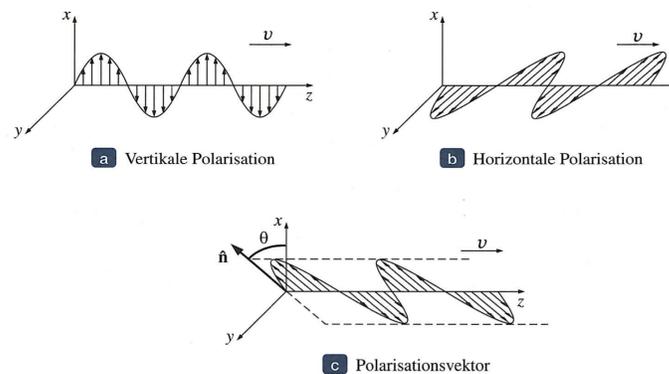


Abbildung 3.2: Elektrische Feldstärken in vertikaler-, horizontaler und um den Winkel θ um die Ausbreitungsrichtung verdrehter Polarisation. Entnommen S. 478 von [?], Abbildung 9.8.

Übersicht über das elektromagnetische Spektrum		
Frequenz (Hz)	Bereich	Wellenlänge (m)
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	Gammastrahlung	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	Röntgenstrahlung	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	Ultraviolett	10^{-7}
10^{15}	sichtbares Licht	10^{-6}
10^{14}	Infrarot	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	Mikrowellen	10^{-1}
10^9		1
10^8	UKW, Fernsehen	10
10^7		10^2
10^6	Mittelwellen	10^3
10^5		10^4
10^4	Langwellen	10^5
10^3		10^6

Sichtbarer Spektralbereich		
Frequenz (Hz)	Farbe	Wellenlänge (m)
$1,0 \cdot 10^{15}$	nahes Ultraviolett	$3,0 \cdot 10^{-7}$
$7,5 \cdot 10^{14}$	kürzeste sichtbare blaue Wellenlängen	$4,0 \cdot 10^{-7}$
$6,5 \cdot 10^{14}$	Blau	$4,6 \cdot 10^{-7}$
$5,6 \cdot 10^{14}$	Grün	$5,4 \cdot 10^{-7}$
$5,1 \cdot 10^{14}$	Gelb	$5,9 \cdot 10^{-7}$
$4,9 \cdot 10^{14}$	Orange	$6,1 \cdot 10^{-7}$
$3,9 \cdot 10^{14}$	längste sichtbare rote Wellenlängen	$7,6 \cdot 10^{-7}$
$3,0 \cdot 10^{14}$	nahes Infrarot	$1,0 \cdot 10^{-6}$

Abbildung 3.3: Tabelle des elektromagnetischen Spektrums. Entnommen S. 482 von [?].

3.4 Sprungbedingungen beim Übergang zwischen verschiedenen Materialien

Wir betrachten zwei Medien die sich hinsichtlich ihrer elektrischen und magnetischen Eigenschaften unterscheiden. Das bedeutet, dass die Zusammenhänge zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} einerseits und \mathbf{B} und \mathbf{H} andererseits unterschiedlich sind. Wir nehmen an dieser Stelle weder Homogenität noch Isotropie der Medien an, so dass die jetzt abzuleitenden Bedingungen für allgemeine Konstitutivrelationen (1.7) gelten werden. Diese werden wir dann auf den Fall linearer, homogener und isotroper Medien einschränken.

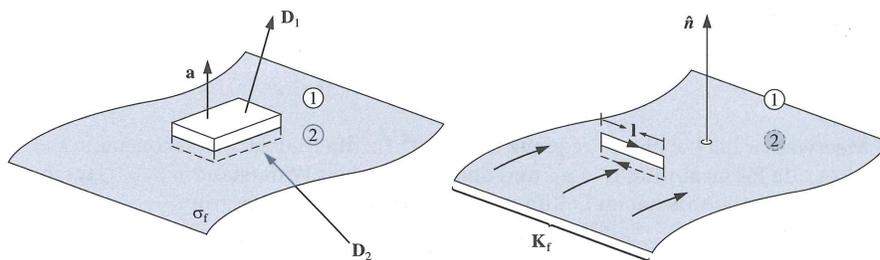


Abbildung 3.4: Grenzfläche (grau) zwischen Medium 1 (oben) und Medium 2 (unten), einmal mit einer Schachtel deren obere Randfläche (weiß) in Medium 1 verläuft und einmal mit einer Fläche. Entnommen S. 426 von [?], Abbildung 7.47.

Wie in Abbildung 3.4 gezeigt sei die Grenzfläche zwischen den Medien eine Fläche mit einer Normalen \mathbf{n} die so orientiert ist, dass sie in das Medium 1 hineinragt. Ziel unserer Betrachtung ist, Einschränkungen an die Stetigkeit der normalen und tangentialen Komponenten aller Felder (\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H}) beim Übergang von einem zum anderen Medium zu erhalten. Dabei lassen wir zu, dass auf der Grenzfläche eine Oberflächenladungsdichte σ_f und eine Oberflächenstromdichte \mathbf{K}_f "flächenhaft" verteilt ist. Damit ist folgendes gemeint: Ist etwa die Grenzfläche die xy -Ebene, also durch $z = 0$ gegeben, dann gibt es Beiträge zu ρ und \mathbf{J} der Form

$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma_f(\mathbf{x}) \delta(z), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_f(\mathbf{x}) \delta(z). \quad (3.16)$$

Man beachte, dass σ_f die Dimension [Ladung/Fläche] besitzt, in SI-Einheiten also also $C \cdot m^{-2}$, und \mathbf{K}_f die Einheit [Ladung/Länge \times Dauer], also $C \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = A \cdot m^{-1}$.

Wir greifen einen beliebigen Punkt der Grenzfläche heraus und legen um diesen einmal ein kleines schachtelförmiges 3-dimensionales Gebiet G wie auf der lin-

ken Seite der Abbildung 3.4 gezeigt, ein anderes Mal eine kleines rechteckiges Flächenstück F wie auf der rechten Zeichnung. Die Höhe (vertikale Ausdehnung) der Schachtel als auch des Rechtecks sollen klein, im Grenzfall beliebig klein sein. Wichtig ist, dass die obere und untere rechteckige Randfläche der Schachtel G parallel zur Grenzfläche ganz im Gebiet 1 bzw. 2 verläuft und gleiches für die das obere und untere Grenzintervall der Fläche F gilt.

Wir integrieren nun die MG, die die Divergenzen von \mathbf{D} und \mathbf{B} enthalten über die Schachtel und die MG die die Rotationen von \mathbf{E} und \mathbf{B} enthalten über Fläche F . Im ersten Fall nutzen wir den Gauß'schen, im zweiten den Stokes'schen Satz und erhalten Integrale von \mathbf{D} und \mathbf{B} über die Randflächen von G bzw. \mathbf{E} und \mathbf{B} über die Randkurven. Von diesen Randintegralen verschwinden im Limes verschwindender vertikaler Ausdehnungen von G und F die Anteile über Ränder mit vertikaler Ausrichtung und es verbleiben jeweils nur die Summen aus den zwei Anteilen mit horizontaler Ausdehnung. Für die Schachtel sind das die Flächenintegrale im Medium 1 mit Normale \mathbf{n} und im Medium 2 mit Normalen $(-\mathbf{n})$. Für die Fläche die Kantenintegrale im Medium 1 bzw. 2 mit entgegengesetzter Orientierung. Wählt man die Orientierung der Randflächen bzw. Kanten gleich, nämlich so wie jeweils im Medium 1, dann erhält man aus (2.12) für die Schachtel G und für die Fläche F unter Beachtung von (3.16)

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_f, \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad (3.17b)$$

bzw.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}_f. \quad (3.18b)$$

Man beachte, dass die beiden letzten Gleichungen äquivalent sind zu $(\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel}) = \mathbf{0}$ bzw. $(\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{K}_f$ wobei \parallel die Orthogonalprojektionen tangential auf die Grenzfläche bezeichnet. Für (3.4) ist das sofort klar und die zweite folgt durch vekorielle Multiplikation von (3.18b) mit \mathbf{n} . Da \mathbf{K}_f in der Grenzfläche liegt und damit orthogonal zu \mathbf{n} ist, kommt man von diesen Gleichungen auch wieder zu (3.18b) zurück.

Aus diesen Relationen liest man also ab, dass die Normalkomponenten von \mathbf{B} und die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} stets stetig sind und die Normalkomponenten von \mathbf{D} und Tangentialkomponenten von \mathbf{H} Unstetigkeiten vom Betrag der Oberflächenladungsdichte bzw. Oberflächenstromdichte erfahren. Über das Verhalten der Tangentialkomponenten von \mathbf{B} und \mathbf{D} sowie der Normalkomponenten von \mathbf{E}

und \mathbf{H} wird an dieser Stelle keine Aussage getroffen. Dieser ergeben sich erst *nach* Angabe von Konstitutivegleichungen. Spezialisieren wir diese auf lineare Beziehungen und isotrope Beziehungen (da (3.17) punktweise gelten, muss Homogenität nicht gefordert werden), also wie in (1.6), dann können wir Sprungbedingungen für alle Komponenten etwa durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} ausdrücken. Dabei bleiben (3.17b) und natürlich bestehen. Für das elektrische Feld bekommt man so

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2) = \sigma_f, \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (3.19b)$$

und für das magnetische

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mu_1^{-1} \mathbf{B}_1 - \mu_2^{-1} \mathbf{B}_2) = \mathbf{K}_f. \quad (3.20b)$$

Spezialisiert man weiter auf den Fall verschwindender Oberflächenladungen und - Ströme, so wird daraus, wenn wir die Komponenten parallel und senkrecht zur Fläche mit \parallel und \perp bezeichnen:

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_1^\perp = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2^\perp, \quad \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel, \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{B}_1^\perp = \mathbf{B}_2^\perp, \quad \mu_1^{-1} \mathbf{B}_1^\parallel = \mu_2^{-1} \mathbf{B}_2^\parallel. \quad (3.21b)$$

Ist $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ und $\mu_2 > \mu_1$ so nennen wir das Medium 2 *optisch dichter* als das Medium 1. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in diesen Medien gilt dann $c_2 < c_1$. Für das elektrische Feldes sind die Tangentialkomponenten stetig und die Normalkomponenten stehen im *umgekehrten* Verhältnis wie die ε -Werte. Also wird der elektrische Feldvektor beim Übergang in das optisch dichtere Medium von der Normale weggebrochen.

Gleiches gilt für das magnetische Feld, wenn auch mit unterschiedlicher Begründung: hier sind die Normalkomponente stetig und die Tangentialkomponenten stehen im *gleichen* Verhältnis wie die μ s. Das Resultat ist das gleiche: der magnetische Feldvektor wird beim Übergang in das optisch dichtere Medium von der Normale weggebrochen. Bezeichnet man die Winkel der elektrischen und magnetischen Feldstärkevektoren zur Normalen mit α^{el} bzw. α^{mag} , so dass also

$$\tan(\alpha^{\text{el}}) := \frac{\|\mathbf{E}^\parallel\|}{\|\mathbf{E}^\perp\|} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha^{\text{mag}}) := \frac{\|\mathbf{B}^\parallel\|}{\|\mathbf{B}^\perp\|}, \quad (3.22)$$

dann

$$\frac{\tan(\alpha_1^{\text{el}})}{\tan(\alpha_2^{\text{el}})} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{und} \quad \frac{\tan(\alpha_1^{\text{mag}})}{\tan(\alpha_2^{\text{mag}})} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (3.23)$$

3.5 Die Fresnel'schen Formeln

Die Fresnel'schen Formeln behandeln das Verhalten ebener elektromagnetischer Wellen beim Übergang zwischen Medien verschiedener optischer Dichte, die wir hier mit Medium 1 und Medium 2 bezeichnen. Diese seien als linear, isotrop und homogen vorausgesetzt. In ihnen gilt also $\mathbf{D} = \varepsilon_{1,2}\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu_{1,2}\mathbf{H}$ mit konstanten (ε_1, μ_1) in Medium 1 und (ε_2, μ_2) in Medium 2. Die geometrischen Verhältnisse sind in Abbildung 3.5 dargestellt.

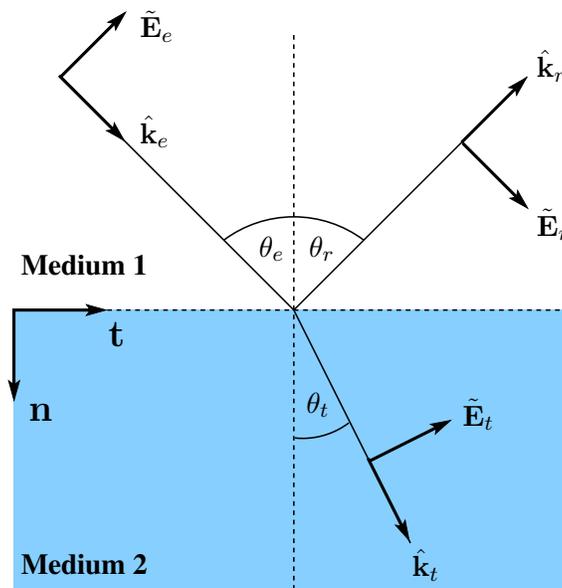


Abbildung 3.5: Lichtbrechung an der Grenzfläche zwischen Medium 1 (oben) und Medium 2 (unten, blau), hier gezeigt für den Fall, dass der elektrische Feldvektor in der Einfallsebene liegt und der magnetische entsprechend senkrecht zur Papierebene. Wegen $\theta_e = \theta_r$ sind hier Einfallswinkel und Reflexionswinkel bereits gleich groß gezeichnet, während der Brechungswinkel θ_t hier kleiner als θ_e gezeichnet ist, entsprechend dem Fall, dass Medium 2 optisch dichter als Medium 1 ist. Die Orientierungen der als positiv anzusehenden elektrischen Amplituden sind für alle Teilwellen (e, r, t) gleich und in Richtung von \mathbf{t} . Ein Phasensprung der reflektierten Welle macht sich somit durch ein negatives Vorzeichen von \tilde{E}_r bemerkbar. Die Orientierungen der als positiv anzusehenden Magnetfeldamplituden sind durch $c\tilde{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}$ definiert und senkrecht zur Zeichenebene, auf den Leser hin zeigend für die einfallende und transmittierte Welle, und vom Leser weg weisend für reflektierte Welle. Maßgebend für diese Konvention ist die Verabredung, dass die als positiv anzusehenden Tangentialkomponenten des *elektrischen* Feldes alle in die *gleiche* Richtung weisen.

Die Lichtgeschwindigkeiten und Brechungsindizes in diesen Medien $i = 1, 2$ sind dann durch

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}, \quad n_i = \frac{c_0}{c_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_i \mu_i}{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (3.24)$$

Die Grenzfläche zwischen den Medien sei als eben angenommen mit Normalenvektor \mathbf{n} , der so orientiert ist, dass er in die Region von Medium 2 hinein zeigt (in Abbildung nach unten). Die einfallende ebene Welle propagiert mit Wellenvektor \mathbf{k}_e erst durch Medium 1 in Richtung von Medium 2, wird an der Grenzfläche zum Teil mit Wellenzahlvektor \mathbf{k}_r in das Medium 1 zurück reflektiert und zum Teil mit Wellenzahlvektor \mathbf{k}_t in das Medium 2 durchgelassen (transmittiert). Die auf Einheitslänge normierten Wellenzahlvektoren werden bzw. mit $\hat{\mathbf{k}}_e$, $\hat{\mathbf{k}}_r$ und $\hat{\mathbf{k}}_t$ bezeichnet. Diese bilden somit spitze Winkel von bzw. θ_e , θ_r und θ_t mit der Richtung von bzw. \mathbf{n} , $(-\mathbf{n})$ und \mathbf{n} . Es gilt also

$$\hat{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{n} = \cos \theta_e, \quad \hat{\mathbf{k}}_r \cdot \mathbf{n} = -\cos \theta_e, \quad \hat{\mathbf{k}}_t \cdot \mathbf{n} = \cos \theta_e. \quad (3.25)$$

Mit \mathbf{t} bezeichnen wir den zur Grenzfläche tangentialen Normalenvektor, der durch die Projektion des einfallenden Strahls in die Grenzfläche definiert wird. Die durch den einfallenden Strahl und die Normale \mathbf{n} definierte Ebene heißt die *Einfallsebene*. Die Vektoren $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$ bilden also eine Orthonormalbasis aller in dieser Ebene liegenden Vektoren. Wie wir noch sehen werden, liegen sowohl der reflektierte als auch der transmittierte Wellenvektor ebenfalls in dieser Ebene. Es gilt dann

$$\hat{\mathbf{k}}_e \cdot \mathbf{t} = \sin \theta_e, \quad \hat{\mathbf{k}}_r \cdot \mathbf{t} = \sin \theta_e, \quad \hat{\mathbf{k}}_t \cdot \mathbf{t} = \sin \theta_e, \quad (3.26)$$

und somit

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \sin(\theta_e) \mathbf{t} + \cos(\theta_e) \mathbf{n}, \quad (3.27a)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_r = \sin(\theta_r) \mathbf{t} - \cos(\theta_r) \mathbf{n}, \quad (3.27b)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_t = \sin(\theta_t) \mathbf{t} + \cos(\theta_t) \mathbf{n}. \quad (3.27c)$$

Man mache sich diese nochmals an Abbildung 3.5 klar.

Nun zu den allgemeinen Aussagen der MG zu diesem Vorgang. Wir nehmen an, dass die Oberflächendichten der Ladung, σ_f , und des Stroms, \mathbf{K}_f , verschwinden (vgl. (3.19a) und (3.20b)). Es gelten also die Sprungbedingungen in der Form (3.21). Außerdem gelten also die Beziehungen von Abschnitt (3.3) für monochromatische Wellen fester Frequenz ω , die sich für die einfallende, reflektierte und

transmittierte Welle als gleich erweisen wird. Es gelten also die Beziehungen

$$\mathbf{E}_e(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}_e \exp[i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \mathbf{B}_e(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c_1} (\hat{\mathbf{k}}_e \times \mathbf{E}_e), \quad (3.28a)$$

$$\mathbf{E}_r(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}_r \exp[i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \mathbf{B}_r(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c_1} (\hat{\mathbf{k}}_r \times \mathbf{E}_r), \quad (3.28b)$$

$$\mathbf{E}_t(t, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}_t \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \mathbf{B}_t(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{c_2} (\hat{\mathbf{k}}_t \times \mathbf{E}_t). \quad (3.28c)$$

Hier sind die Größen $\tilde{\mathbf{E}}_e$, $\tilde{\mathbf{E}}_r$ und $\tilde{\mathbf{E}}_t$ konstante Vektoren, die die Maximalamplituden des jeweiligen elektrischen Feldes angeben.

Die Beträge der drei Wellenzahlvektoren genügen jeweils den Dispersionsrelationen (3.12) für das Medium, in dem sie sich befinden; also Medium 1 für die einfallende und reflektierte, Medium 2 für die transmittierte Welle. In diesen gelten die Phasengeschwindigkeiten c_1 und c_2 bzw. Brechungsindizes $n_1 = c_0/c_1$ und $n_2 = c_0/c_2$. Da, wie wir gleich sehen werden, ω in allen drei Fällen als gleich erweist, haben wir

$$k_e c_1 = k_r c_1 = k_t c_2 = \omega \quad (3.29)$$

oder

$$k_e = k_r = k_t \frac{c_2}{c_1} = k_t \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.30)$$

Im Gebiet 1 überlagern sich die elektrischen Felder zu $\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r$ sowie die magnetischen zu $\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_r$. An der Grenzfläche müssen diese dann unter Einhaltung der Sprungbedingungen (3.21) an die transmittierten Felder \mathbf{E}_t bzw. \mathbf{B}_t angeschlossen werden. Es sind die Sprungbedingungen die an dieser Stelle den wesentlichen Input der MG liefern.

Bei den Sprungbedingungen handelt es sich um lineare Beziehungen zwischen den Komponenten $\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r$ und \mathbf{E}_t sowie $\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_r$ und \mathbf{B}_t . Deren analytische Abhängigkeit von (t, \mathbf{x}) ist ausschließlich in den Exponentialfunktionen enthalten, so dass sie folgende Struktur besitzen:

$$\mathbf{X} \exp[i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{x} - \omega_e t)] + \mathbf{Y} \exp[i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega_r t)] = \mathbf{Z} \exp[i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x} - \omega_t t)]. \quad (3.31)$$

Hier sind \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} irgendwelche von \mathbf{x} und t unabhängigen (also konstante) Vektoren ungleich dem Nullvektor, die aus den $\tilde{\mathbf{E}}_{e,r,t}$ und $\tilde{\mathbf{B}}_{e,r,t}$ und den Konstanten $\varepsilon_{1,2}$ und $\mu_{1,2}$ gebildet sind. Man beachte, dass wir hier explizit zugelassen haben, dass die Frequenzen des einlaufenden, des reflektierten und des transmittierten Strahls unterschiedlich sind. Die Beziehung (3.31) muss nun für alle t und alle \mathbf{x} mit $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$ gelten mit $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$.

Daraus fließen nun eine Reihe von Beziehungen, denn eine Identität der Form (3.31) gilt genau dann wenn

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Z} \quad (3.32)$$

und

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{x} - \omega_e t = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x} - \omega_r t = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x} - \omega_t t, \quad (3.33)$$

letztere für alle Zeiten t und alle \mathbf{x} senkrecht zu \mathbf{n} .

Hält man beispielsweise \mathbf{x} fest und lässt nur t variieren, dann kann die so entstehende Identität nur dann für alle t gleichzeitig erfüllt werden, wenn

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t =: \omega \quad (3.34)$$

was unsere obige Annahme wie versprochen nachträglich rechtfertigt. Genauso folgt dann weiter aus (3.33)

$$(\mathbf{k}_e)_{\parallel} = (\mathbf{k}_r)_{\parallel} = (\mathbf{k}_t)_{\parallel}. \quad (3.35)$$

Dabei bezeichnet \parallel die Projektion parallel zur Grenzfläche, die hier am Beispiel von etwa \mathbf{k}_e folgende Form hat:

$$(\mathbf{k}_e)_{\parallel} := \mathbf{k}_e - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_e). \quad (3.36)$$

Formel (3.35) besagt also, dass sich die drei Vektoren \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_t nur um Vielfache des Normalenvektors \mathbf{n} zur Grenzfläche unterscheiden.

Daraus folgt bereits das *Erste Gesetz der Geometrischen Optik*: Einfallende, reflektierte und transmittierte Wellenvektoren bilden eine Ebene, die sogenannte *Einfallsebene*, in der auch die Normale zur Grenzfläche enthalten ist.

Die Gleichheit der Beträge der in (3.35) auftretenden Vektoren lässt sich durch die oben definierten Winkel θ_e , θ_r und θ_t (vgl. Abbildung 3.5) ausdrücken:

$$k_e \sin(\theta_e) = k_r \sin(\theta_r) = k_t \sin(\theta_t). \quad (3.37)$$

Die Dispersionsrelation (3.30) impliziert nun das *zweite und dritte Gesetz der geometrischen Optik*, nämlich die Gleichheit von Einfallswinkel und Reflektionswinkel

$$\theta_e = \theta_r \quad (3.38)$$

sowie das *Snellius'sche¹ Brechungsgesetz*:

$$\frac{\sin(\theta_t)}{\sin(\theta_e)} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.39)$$

¹Benannt nach dem niederländischen Mathematiker und Astronom Willebrord van Roijen Snell (1580-1626), genannt Snellius.

Schließlich haben wir noch die Gleichheit (3.32). In dieser Gleichung stehen die Ausdrücke für die parallelen und senkrechten Amplituden der elektrischen und magnetischen Felder, wie sie in den Bedingungen (3.21) zusammen mit den Faktoren von $\varepsilon_{1,2}$ und $\mu_{1,2}$ auftreten. Diese sind

$$\varepsilon_1 (\tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_r) \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_2 \tilde{\mathbf{E}}_t \cdot \mathbf{n}, \quad (3.40a)$$

$$(\tilde{\mathbf{B}}_e + \tilde{\mathbf{B}}_r) \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{B}}_t \cdot \mathbf{n}, \quad (3.40b)$$

$$(\tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_r)_{\parallel} = (\tilde{\mathbf{E}}_t)_{\parallel}, \quad (3.40c)$$

$$\mu_1^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}_e + \tilde{\mathbf{B}}_r)_{\parallel} = \mu_2^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}_t)_{\parallel}. \quad (3.40d)$$

In jedem dieser Fälle gelten die allgemeinen Bedingungen an ebene Wellen, dass $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ ein rechtshändiges orthogonales System von Vektoren bildet mit, in unserem Fall, $\tilde{\mathbf{B}} = (1/c)\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}$.

Man unterscheidet nun zwei spezielle Fälle von Polarisationen, aus denen sich alle anderen durch Linearkombination zusammensetzen lassen. Im ersten Fall liegt der elektrische Feldvektor in der Einfallsebene (die ja auch den Normalenvektor \mathbf{n} enthält), der magnetische also senkrecht dazu und somit parallel zur Trennebene. Im zweiten Fall ist es umgekehrt.

3.5.1 1. Fall: Elektrisches Feld in der Einfallsebene

Abbildung 3.5 zeigt für diesen Fall die elektrischen Amplitudenvektoren $\tilde{\mathbf{E}}_e$, $\tilde{\mathbf{E}}_r$ und $\tilde{\mathbf{E}}_t$ für die einfallende, reflektierte und transmittierte Welle. Ihre gezeichnete Orientierung ist Willkürlich; wir folgen hier der Konvention in [?]. Da die Einfallsebene durch die Vektoren \mathbf{t} und \mathbf{n} aufgespannt wird, können wir die Amplitudenvektoren nach diesen entwickeln. Mit Hilfe von Abbildung 3.5 liest man ab:

$$\tilde{\mathbf{E}}_e = \tilde{E}_e (\cos(\theta_e) \mathbf{t} - \sin(\theta_e) \mathbf{n}), \quad (3.41a)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_r = \tilde{E}_r (\cos(\theta_r) \mathbf{t} + \sin(\theta_r) \mathbf{n}), \quad (3.41b)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \tilde{E}_t (\cos(\theta_t) \mathbf{t} - \sin(\theta_t) \mathbf{n}). \quad (3.41c)$$

Und daraus mit

$$\tilde{\mathbf{B}}_e = \frac{1}{c_1} \hat{\mathbf{k}}_e \times \tilde{\mathbf{E}}_e, \quad \tilde{\mathbf{B}}_r = \frac{1}{c_1} \hat{\mathbf{k}}_r \times \tilde{\mathbf{E}}_r, \quad \tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{1}{c_2} \hat{\mathbf{k}}_t \times \tilde{\mathbf{E}}_t, \quad (3.42)$$

und (3.27):

$$\tilde{\mathbf{B}}_e = \frac{\tilde{E}_e}{c_1} \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad (3.43a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_e = -\frac{\tilde{E}_r}{c_1} \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad (3.43b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{\tilde{E}_t}{c_2} \mathbf{n} \times \mathbf{t}. \quad (3.43c)$$

Mit diesen Ausdrücken werten wir nun die vier Sprungbedingungen (3.40) aus. Es ist sofort ersichtlich, dass wegen der Orthogonalität aller Magnetfelder zu \mathbf{n} Gleichung (3.40b) identisch erfüllt ist und nicht weiter beachtet werden muss. Ersetzen wir gleich θ_r durch θ_e gemäß , dann ist Gleichung (3.40b) äquivalent zu

$$\tilde{E}_e - \tilde{E}_r = \frac{\varepsilon_2 \sin \theta_t}{\varepsilon_1 \sin \theta_e} \tilde{E}_t = \frac{\varepsilon_2 n_1}{\varepsilon_1 n_2} \tilde{E}_t, \quad (3.44)$$

wobei wir im 2. Schritt (3.39) benutzt haben. Gleichung (3.40c) ist äquivalent zu

$$\tilde{E}_e + \tilde{E}_r = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_e} \tilde{E}_t, \quad (3.45)$$

und Gleichung (3.40d) zu

$$\tilde{E}_e - \tilde{E}_r = \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} \tilde{E}_t, \quad (3.46)$$

Die letzte Gleichung (3.46) ist aber äquivalent zu (3.44), denn mit $c_i = 1/\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$ und $n_1/n_2 = c_2/c_1$ rechnet man sofort nach, dass die Faktoren auf den rechten Seiten von (3.44) und (3.46) gleich sind und als Funktion der elektrischen und magnetischen Konstanten wie folgt geschrieben werden können:

$$\beta := \frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2} = \frac{\varepsilon_2 n_1}{\varepsilon_1 n_2} = \sqrt{\frac{\mu_1/\varepsilon_1}{\mu_2/\varepsilon_2}} \quad (3.47)$$

Das Verhältnis $Z_i := \sqrt{\mu_i/\varepsilon_i}$ hat die Dimension eines Widerstandes und wird für Nicht-Leiter ($\sigma = 0$) auch als *Wellenwiderstand* oder *Wellen-Impedanz* (engl. *wave impedance*) bezeichnet. Im Vakuum ist gerundet $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377 \Omega$. Hier tritt also das Verhältnis Z_1/Z_2 der beiden Wellenwiderstände in den Medien 1 und 2 auf:

$$\beta := \frac{Z_1}{Z_2} \quad (3.48)$$

Den Faktor der rechten Seite von (3.45) kürzen wir ebenfalls ab mit

$$\alpha := \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_e} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)}}{\cos(\theta_e)} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin(\theta_e)]^2}}{\cos(\theta_e)}, \quad (3.49)$$

wobei wir (3.39) verwendet haben.

Somit beläuft sich der Gehalt von (3.40) auf die beiden Gleichungen (3.44), d.h. auf $\tilde{E}_e - \tilde{E}_r = \beta \tilde{E}_t$ und $\tilde{E}_e + \tilde{E}_r = \alpha \tilde{E}_t$. Aus deren Summe und Differenz folgen die *Fresnelschen Formeln* für den vorliegenden Fall der linearen Polarisation des **E**-Feldes in der Einfallsebene:

$$\tilde{E}_r = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_e, \quad (3.50a)$$

$$\tilde{E}_t = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_e. \quad (3.50b)$$

Man beachte, dass $\tilde{E}_r < 0$ genau dann wenn $\alpha < \beta$. In diesem Fall tritt also bei der Reflexion ein Phasensprung auf. Bei der Transmission ist dies nie der Fall, da der Faktor auf der rechten Seite von (3.50b) nie negativ wird. Der Grenzfall $\alpha = \beta$ entspricht verschwindender Reflexion, den wir noch ausführlich behandeln werden.

Für $\theta_e = 0$ erhält man den Spezialfall senkrechten Einfalls für den (3.5.1) und das Snellius'sche Brechungsgesetz (3.39) auch $\theta_r = \theta_t = 0$ verlangen. Dann ist $\alpha = 1$ und (3.50) vereinfachen sich zu

$$\tilde{E}_r = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \tilde{E}_e, \quad (3.51a)$$

$$\tilde{E}_t = \frac{2}{1 + \beta} \tilde{E}_e. \quad (3.51b)$$

Die reflektierte Amplitude verschwindet für $\beta = 1$, also gleichen Wellenwiderständen $Z_1 = Z_2$. Wir werden unten sehen, dass davon auch die Umkehrung gilt; d.h., bei gleichen Wellenwiderständen verschwindet die reflektierte Amplitude genau bei senkrechtem Einfall.

Im allgemeinen Fall verschwindet \tilde{E}_r für $\alpha = \beta$ bei vorgegebenen Materialien, also für den Einfallswinkel θ_e der durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\sin^2(\theta_e) = \sin^2(\theta_B^{\parallel}) := \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}. \quad (3.52)$$

Diesen durch die zweite Gleichheit definierten Winkel θ_B^{\parallel} nennt man *Brewster Winkel*². Wir haben ihm noch als oberen Index das Symbol \parallel angehängt um anzudeuten, dass es sich hier um den Brewster-Winkel für die Polarisation parallel zur Einfallsebene handelt. Wir werden seine allgemeinen Eigenschaften gemeinsam mit – und im interessanten direkten Vergleich zu – dem Fall der senkrechten Polarisation in Abschnitt 3.5.3 besprechen.

Wir kommen nun zu den energetischen Aspekten. Die Komponente des Poynting-Vektors für die Amplituden (also unter Weglassung des für alle Wellen gleichen oszillatorischen Faktors) in Richtung der Normale der Grenzfläche ist $\tilde{S} = \mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}})$ ergibt für den die einfallende, reflektierte und transmittierte Welle zu

$$\tilde{S}_e = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_e := \mu_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_e \times \tilde{\mathbf{B}}_e = \frac{\tilde{E}_e^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_e) \quad (3.53)$$

$$\tilde{S}_r = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_r := \mu_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_r \times \tilde{\mathbf{B}}_r = \frac{\tilde{E}_r^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_r) \quad (3.54)$$

$$\tilde{S}_t = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_t := \mu_2^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_t \times \tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{\tilde{E}_t^2}{\mu_2 c_2} \cos(\theta_t). \quad (3.55)$$

Da unsere Medien nichtabsorbierend sind, fordert der Energieerhaltungssatz, dass die einlaufende Energiestromdichte gleich ist der Summe der auslaufenden. In der Tat ist mit $\theta_r = \theta_e$ und den Fresnel'schen Gleichungen (3.50)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_r + \tilde{S}_t &= \frac{\cos(\theta_e)}{\mu_1 c_1} \left[\tilde{E}_r^2 + \tilde{E}_t^2 \underbrace{\frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_e)}}_{=\alpha} \underbrace{\frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}}_{=\beta} \right] \\ &= \frac{\tilde{E}_e^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_e) \left[\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 + \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha - \beta} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\tilde{E}_e^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_e) = \tilde{S}_e \end{aligned} \quad (3.56)$$

Aus der gleichen Rechnung ergeben sich auch die Verhältnisse von reflektierter und transmittierter zu eingestrahelter Energiestromdichte, die man den *Reflexions-* bzw. *Transmissionskoeffizienten* nennt und die wir hier für den Fall parallel (zur

²Benannt nach dem britischen Wissenschaftler und Erfinder Sir David Brewster (1781-1868).

Einfallsebene) polarisierter Wellen mit R_{\parallel} und T_{\parallel} bezeichnen:

$$R_{\parallel} := \frac{\tilde{S}_r}{\tilde{S}_e} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \quad (3.57a)$$

$$T_{\parallel} := \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_e} = \alpha\beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2. \quad (3.57b)$$

Gleichung (3.56) ist dann einfach äquivalent zu

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1. \quad (3.58)$$

3.5.2 2. Fall: Elektrisches Feld senkrecht zur Einfallsebene

Statt Gleichungen (3.41) haben wir nun für die eingezeichneten Orientierungen der Magnetfelder folgende Entwicklungen nach \mathbf{n} und \mathbf{t} :

$$\tilde{\mathbf{B}}_e = \tilde{B}_e (\sin(\theta_e) \mathbf{n} - \cos(\theta_e) \mathbf{t}), \quad (3.59a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_r = \tilde{B}_r (\sin(\theta_r) \mathbf{n} + \cos(\theta_r) \mathbf{t}), \quad (3.59b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = \tilde{B}_t (\sin(\theta_t) \mathbf{n} - \cos(\theta_t) \mathbf{t}). \quad (3.59c)$$

Aus (3.15) erhalten wir für die elektrischen Felder

$$\mathbf{E}_e = -c_1 \hat{\mathbf{k}}_e \times \mathbf{B}_e, \quad \mathbf{E}_r = -c_1 \hat{\mathbf{k}}_r \times \mathbf{B}_r, \quad \mathbf{E}_t = -c_2 \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_t, \quad (3.60)$$

was sogleich resultiert in

$$\tilde{\mathbf{E}}_e = c_1 \tilde{B}_e \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_r = c_1 \tilde{B}_r \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_t = c_2 \tilde{B}_t \mathbf{n} \times \mathbf{t}. \quad (3.61)$$

Darauf wenden wir nun erneut die Sprungbedingungen (3.40) an. Da das elektrische Feld tangential an die Grenzfläche liegt, ist (3.40a) identisch erfüllt. Die Stetigkeit der Normalkomponente des Magnetfeldes, (3.40b), ergibt mit (3.59) unter Verwendung von (3.5.1) (d.h. $\theta_e = \theta_r$) und (3.39) (Snellius'sches Brechungsgesetz)

$$\tilde{B}_e + \tilde{B}_r = \frac{n_1}{n_2} \tilde{B}_t. \quad (3.62)$$

Da aus (3.61) folgt, dass

$$\tilde{E}_e = c_1 \tilde{B}_e, \quad \tilde{E}_r = c_1 \tilde{B}_r, \quad \tilde{E}_t = c_2 \tilde{B}_t, \quad (3.63)$$

können wir (3.62) auch einfacher schreiben als

$$\tilde{E}_e + \tilde{E}_r = \tilde{E}_t. \quad (3.64)$$

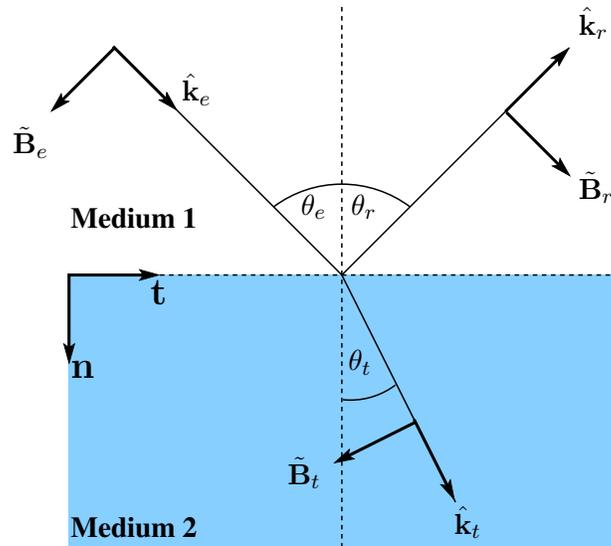


Abbildung 3.6: Lichtbrechung an der Grenzfläche zwischen Medium 1 (oben) und Medium 2 (unten, blau), hier gezeigt für den Fall, dass der magnetische Feldvektor in der Einfallsebene liegt und der elektrische entsprechend senkrecht zur Papierebene. Wegen $\theta_e = \theta_r$ sind hier Einfalls- und Reflexionswinkel bereits gleich groß gezeichnet, während der Brechungswinkel θ_t hier kleiner als $e\theta_e$ gezeichnet ist, entsprechend dem Fall, dass Medium 2 optisch dichter als Medium 1 ist. Die Orientierungen der als positiv anzusehenden Magnetfeldamplituden ist so gewählt, dass die Orientierung der als positiv anzusehenden elektrischen Amplituden ($\tilde{\mathbf{E}} = -c \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{B}}$), die parallel zur Grenzfläche sind, alle in die gleiche Richtung weisen, nämlich senkrecht zur Zeichenebene auf den Leser hin. Ein Phasensprung der reflektierten Welle macht sich somit auch hier durch ein negatives Vorzeichen von \tilde{E}_r bemerkbar.

Dabei haben wir benutzt, dass $c_i n_i = c_0$, so dass $(n_1 c_1)/(n_2 c_2) = 1$. Dies drückt ja gerade die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes aus, also (3.40c), die somit keine neue Bedingung bedeutet.

Somit bleibt als letzte der vier Sprungbedingungen die Gleichungen (3.40d) auszuwerten. Wieder mit (3.59) ergibt sich

$$\tilde{B}_e - \tilde{B}_r = \frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_e)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \tilde{B}_t. \quad (3.65)$$

Auch diese können wir mit (3.63) als Beziehung zwischen den elektrischen Am-

plituden ausdrücken:

$$\tilde{E}_e - \tilde{E}_r = \frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_e)} \frac{\mu_1 c_1}{\mu_1 c_2} \tilde{E}_t = \alpha \beta \tilde{E}_t, \quad (3.66)$$

wobei wir wieder die Abkürzungen (3.49), $\alpha := \cos(\theta_t) / \cos(\theta_e)$, und (3.47), $\beta := (\mu_1 c_1) / (\mu_2 c_2)$, verwendet haben.

Aus (3.64) und (3.66) ergeben sich durch Addition und Subtraktion dann als Analoga zu (3.50) das zweite Paar der Fresnel'schen Formeln:

$$\tilde{E}_r = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_e, \quad (3.67a)$$

$$\tilde{E}_t = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \tilde{E}_e. \quad (3.67b)$$

Man beachte, dass dieses zweite Paar von Fresnel-Gleichungen aus dem ersten Paar (3.50) formal einfach durch die Ersetzung $(\alpha + \beta) \rightarrow (1 + \alpha\beta)$ hervorgeht. Wir werden im anschließenden Kapitel diese Ersetzung eine einfache Interpretation im Sinne eines Austauschs elektrischer mit magnetischen Eigenschaften geben.

Die reflektierte Welle erleidet nun einen Phasensprung genau dann, wenn $\alpha\beta > 1$. Wieder ist das für die transmittierte Wellen nie der Fall. Dazwischen liegt der Grenzfall $\alpha\beta = 1$ einer verschwindenden Reflexionsamplitude. Auch hier können wir nach einem Brewster-Winkel fragen, den wir nun entsprechend θ_B^\perp nennen. Existiert er, muss er der Gleichung $\alpha^2 = \beta^{-2}$ genügen, die nach (3.49) äquivalent ist zu

$$\sin^2(\theta_e) ((n_1/n_2)^2 - \beta^{-2}) = 1 - \beta^{-2}. \quad (3.68)$$

Diese können wir wieder nach $\sin^2(\theta_e)$ auflösen, sofern der Koeffizient nicht verschwindet. Nun ist gemäß (3.47) $\beta^{-2} = (\mu_2/\mu_1)^2 (n_1/n_2)^2$, also $((n_1/n_2)^2 - \beta^{-2})$ genau dann gleich Null wenn $\mu_1 = \mu_2$. Die Gleichung (3.68) kann dann nur entweder für kein oder für alle θ_e bestehen, letzteres genau dann wenn $\beta = 1$ also $n_1 = n_2$, die beiden Medien also optisch gleich sind. Klarerweise gibt es dann keine Reflexion! Ist der Koeffizient nun aber nicht Null, bekommen wir analog zu (??)

$$\sin^2(\theta_e) = \sin^2(\theta_B^\perp) := \frac{1 - \beta^{-2}}{(n_1/n_2)^2 - \beta^{-2}}. \quad (3.69)$$

Wie man sofort sieht, entsteht dieser Ausdruck aus (3.52) indem man β durch β^{-1} ersetzt und n_1/n_2 ungeändert lässt. Wir werden diese Symmetrie im folgenden Kapitel deuten.

Wie zuvor im Fall paralleler Polarisation können wir nun auch hier die Normalenkomponenten des Poynting-Vektors bestimmen. Die Rechnung brauchen wir nicht

zu wiederholen, denn die Energiestromdichten hängen ja nicht von der Orientierung der Polarisation ab und sind daher identisch zu den bereits zuvor berechneten (falls durch die elektrischen Amplituden ausgedrückt):

$$\tilde{S}_e = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_e := \mu_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_e \times \tilde{\mathbf{B}}_e = \frac{\tilde{E}_e^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_e) \quad (3.70)$$

$$\tilde{S}_r = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_r := \mu_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_r \times \tilde{\mathbf{B}}_r = \frac{\tilde{E}_r^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_r) \quad (3.71)$$

$$\tilde{S}_t = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{S}}_t := \mu_2^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_t \times \tilde{\mathbf{B}}_t = \frac{\tilde{E}_t^2}{\mu_2 c_2} \cos(\theta_t). \quad (3.72)$$

Nun gelten aber die Fresnel'schen Gleichungen in der Form , so dass die Rechnung der Energieerhaltung statt (3.56) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{S}_r + \tilde{S}_t &= \frac{\cos(\theta_e)}{\mu_1 c_1} \left[\tilde{E}_r^2 + \tilde{E}_t^2 \underbrace{\frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_e)}}_{=\alpha} \underbrace{\frac{\mu_1 c_1}{\mu_2 c_2}}_{=\beta} \right] \\ &= \frac{\tilde{E}_e^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_e) \left[\left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2 + \alpha\beta \left(\frac{2}{1 - \alpha\beta} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\tilde{E}_e^2}{\mu_1 c_1} \cos(\theta_e) = \tilde{S}_e \end{aligned} \quad (3.73)$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind nun gegeben durch

$$R_{\perp} := \frac{\tilde{S}_r}{\tilde{S}_e} = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2, \quad (3.74a)$$

$$T_{\perp} := \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_e} = \alpha\beta \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta} \right)^2. \quad (3.74b)$$

Gleichung (3.73) ist wider äquivalent zu

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1. \quad (3.75)$$

Die Ausdrücke (3.74) geben aus den Ausdrücken (3.57) durch die Ersetzung $\beta \rightarrow \beta^{-1}$ oder die Ersetzung $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$ hervor. Reflexions- und Transmissions-Amplituden und -Koeffizienten für die Materialpaarung Luft-Quarzglas sind in Abbildung 3.7 graphisch dargestellt.

3.5.3 Elektrische und magnetische Brewster-Winkel

In diesem Kapitel wollen wir die Ausdrücke für die *möglichen* Brewster-Winkel für beide Polarisierungen gemeinsamer weiterentwickeln, so dass ein direkter Vergleich leicht möglich ist. Wir werden sehen, dass diese formal durch eine Symmetrie verbunden sind, die man Austausch elektrischer mit magnetischer Relationen bezeichnen kann.

Zunächst schreiben wir die Ausdrücke (3.52) und (3.52) um, so dass statt des Sinus der Tangens des Winkels erscheint. Dazu benutzen wir einfach die Beziehung $\tan^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)/(1 - \cos^2(\varphi))$ und erhalten

$$\tanh^2(\theta_B^{\parallel}) = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - 1}, \quad (3.76a)$$

$$\tanh^2(\theta_B^{\perp}) = \frac{1 - \beta^{-2}}{(n_1/n_2)^2 - 1}. \quad (3.76b)$$

Der Grund für diese Umschreibung ist u.a. folgender: Wenn wir entscheiden wollen, unter welchen Bedingungen die Gleichungen (3.52) und nach θ_B^{\parallel} bzw. θ_B^{\perp} aufgelöst werden können, müssen wir im Falle des Sinus angeben, wann genau die rechten Seiten im Intervall $[0, 1]$ liegen, während sie im Fall des Tangens nur nicht-negativ sein müssen. Letzteres führt zu einfachen algebraischen Bedingungen, wie wir gleich sehen werden.

Nun drücken wir die rechten Seiten durch die elektrischen und magnetischen Parameter ε_i und μ_i aus. Tatsächlich hängen die rechten Seiten nur von deren Verhältnissen ab, die wir wie folgt definieren:

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \mu := \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (3.77)$$

Dann ist nämlich

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (3.78)$$

so dass (3.76) die folgende Form annehmen:

$$\tanh^2(\theta_B^{\parallel}) = \varepsilon \frac{\varepsilon - \mu}{\varepsilon\mu - 1} \quad (3.79a)$$

$$\tanh^2(\theta_B^{\perp}) = \mu \frac{\mu - \varepsilon}{\varepsilon\mu - 1}. \quad (3.79b)$$

Deren rechten Seiten gehen durch Vertauschen von ε mit μ auseinander hervor. Dieser Tausch entspricht genau der Ersetzung von β durch β^{-1} bei festem n_1/n_2 ,

die wir bereits im vorherigen Kapitel als die Symmetrie identifiziert hatten, die θ_B^{\parallel} und θ_B^{\perp} auseinander hervorgehen lässt.

Wie eben bereits erwähnt, müssen die rechten Seiten der Gleichungen (3.79) nicht-negativ sein damit überhaupt eine Lösung für die Brewster-Winkel θ_B^{\parallel} und/oder θ_B^{\perp} existiert. In der Tat ist die Nicht-Negativität der rechten Seite notwendig und hinreichend für die Existenz des entsprechenden Brewster-Winkels, da die Funktion “Tangens-Quadrat” das Intervalls $[0, \pi/2)$ bijektiv (ein-eindeutig) auf das Intervall $[0, \infty)$ abbildet. Der Grenzfall des Verschwindens einer der rechten Seiten in (3.79) tritt nur für $\varepsilon = \mu$ auf (da ε und μ als positiv angenommen werden), tritt also stets nur für beide rechten Seiten gleichzeitig auf und entspricht einem senkrechtem Einfall. Es ist klar, dass in diesem – und nur in diesem – Fall die Polarisation keine Rolle spielt, denn bei senkrechtem Einfall sind sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld parallel zur Grenzfläche und wegen der angenommenen Isotropie des Materials gilt die Rotationsinvarianz um die Strahlachse.

Sind nun die rechten Seiten nicht Null, dann kann die Bedingung der Positivität niemals für beide gleichzeitig gelten, denn der Zähler in (3.79a) ist das Negative des Zählers in (3.79b), während ihre Nenner übereinstimmen. Bei der weiteren Diskussion der Existenz reicht es dann aus, sich auf einen dieser Winkel zu beschränken, etwa θ_B^{\parallel} , denn die rechten Seiten (3.79) gehen durch Vertauschen von ε und μ auseinander hervor. Die Existenzbedingung für θ_B^{\perp} erhält man also aus der für θ_B^{\parallel} durch Vertauschen von ε und μ .

Der allgemeine Fall ist nun schnell abgehandelt, denn die Positivität der rechten Seite von (3.79a) ist gleichbedeutend damit, dass entweder

$$(\varepsilon > \mu \quad \text{und} \quad \varepsilon > \mu^{-1}) \quad \text{oder} \quad (\varepsilon < \mu \quad \text{und} \quad \varepsilon < \mu^{-1}). \quad (3.80)$$

Das kann äquivalent auch so geschrieben werden, dass entweder

$$\varepsilon > \text{Sup}\{\mu, \mu^{-1}\} \quad \text{oder} \quad \varepsilon < \text{Inf}\{\mu, \mu^{-1}\}. \quad (3.81)$$

Man beachte, dass diese durch das logische “oder” verknüpften Bedingungen invariant unter Inversion sind, soll heißen: Ist (ε, μ) ein Paar, dass (3.80) genügt, dann trifft dies auch für das Paar $(\varepsilon' := \varepsilon^{-1}, \mu' := \mu^{-1})$ zu. Der Grund ist einfach zu sehen: Erfüllen nämlich (ε, μ) die erste Ungleichung, dann erfüllen die Inversen die zweite, und umgekehrt. Der Übergang zu den Inversen bedeutet aber gemäß (3.77) die Vertauschung der beiden Medien 1 und 2. Daraus folgern wir, dass ein Brewster-Winkel für den Übergang von Medium 1 zu Medium 2 genau dann existiert, wenn das für den Übergang von Medium 2 zu Medium 1 der Fall ist. Man beachte, dass sich die soeben ausgesprochene Äquivalenz nur auf die *Existenz* der

Brewster-Winkel bezieht, nicht auf deren Größe, die natürlich unterschiedlich sein wird. In der Tat ist der Bruch auf der rechten Seite von (3.79a) invariant unter Ersetzung von (ε, μ) durch $(\varepsilon^{-1}, \mu^{-1})$:

$$\frac{\varepsilon - \mu}{\varepsilon\mu - 1} = \frac{\varepsilon^{-1} - \mu^{-1}}{\varepsilon^{-1}\mu^{-1} - 1}. \quad (3.82)$$

Also besteht zwischen dem Brewster-Winkel θ_B^{\parallel} für dem Übergang von Material 1 zu Material 2, den wir mit $\theta_B^{\parallel}(1, 2)$ bezeichnen, zu dem Brewster-Winkel $\theta_B^{\parallel}(2, 1)$ die Beziehung

$$\frac{\tan(\theta_B^{\parallel}(1, 2))}{\tan(\theta_B^{\parallel}(2, 1))} = \varepsilon. \quad (3.83)$$

Sei etwa $\varepsilon > 1$, das Medium 2 also elektrisch dichter als Medium 1, dann ist der Brewster Winkel von 1 nach 2 größer als der von 2 nach 1.

Einfache Fälle sind $\mu = 1 \neq \varepsilon > 0$, in dem θ_B^{\parallel} immer und θ_B^{\perp} nie existiert, sowie $\varepsilon = 1 \neq \mu > 0$, in dem es umgekehrt ist. Aus diesem Grund nennt man auch θ_B^{\parallel} den *elektrischen* und θ_B^{\perp} den *magnetischen* Brewster-Winkel; denn θ_B^{\parallel} existiert eben nur bei elektrisch unterschiedlichen, θ_B^{\perp} nur bei magnetisch unterschiedlichen Materialien. Mit Ausnahme der Ferromagnetika haben die meisten Stoffe ein μ_i/μ_0 nahe bei 1, leicht unterhalb 1 für diamagnetische und leicht oberhalb 1 für paramagnetische Stoffe. Für $\mu = 1$ ist

$$\tan^2(\theta_B^{\parallel}(1, 2)) = \varepsilon \quad (3.84a)$$

und wegen (3.83)

$$\tan^2(\theta_B^{\parallel}(2, 1)) = \varepsilon^{-1}. \quad (3.84b)$$

Also

$$\theta_B^{\parallel}(1, 2) + \theta_B^{\parallel}(2, 1) = 90^\circ. \quad (3.84c)$$

Nehmen wir als Beispiel Luft als Material 1 und Wasser als Material 2. Dann ist $\mu_1/\mu_0 = 1 + 4 \times 10^{-7}$ und $\mu_2/\mu_0 = 1 - 9 \times 10^{-6}$. Das Verhältnis $\mu = \mu_2/\mu_1$ weicht also von 1 um weniger als 10^{-5} ab, während $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1,00059$ und $\varepsilon_2/\varepsilon_0 = 1,77$ (im sichtbaren Frequenzspektrum). Damit ergibt sich, dass für die Materialpaarungen (Luft, Wasser) kein magnetischer Brewster-Winkel existiert und *zwei* elektrische Brewster-Winkel, einer für den Übergang von Luft zu Wasser und einer für

den umgekehrten Übergang von Wasser zu Luft:

$$\theta_B^{\parallel}(\text{Luft, Wasser}) = \arctan \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right] = \arctan \left[\sqrt{\frac{1,77}{1,00059}} \right] = 53,06^\circ, \quad (3.85a)$$

$$\theta_B^{\parallel}(\text{Wasser, Luft}) = \arctan \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right] = \arctan \left[\sqrt{\frac{1,00059}{1,77}} \right] = 36,94^\circ. \quad (3.85b)$$

Dass die Summe dieser Winkel gerade 90° ergibt ist Folge der magnetischen Ähnlichkeit der Materialien und (3.84c). Eine graphische Darstellung der Brewster-Winkel θ_B^{\parallel} für die Materialpaarung Luft-Quarzglas sind in Abbildung 3.7 am Ende dieses Kapitels graphisch dargestellt.

Die magnetische Ähnlichkeit ist nicht nur hinreichend sondern auch notwendig für das Bestehen der Beziehung (3.84c). In der Tat zeigt man leicht, dass diese Bedingung *genau* dann erfüllt ist, wenn $\mu = 1$; denn die Bedingung, dass der Ausdruck der rechten Seite von (3.79a) in sein Inverses übergeht, wenn dort ε und μ durch ihre Inversen ersetzt werden, ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \left[\frac{\varepsilon - \mu}{\varepsilon\mu - 1} \right]^{-1} &= \varepsilon^{-1} \frac{\varepsilon^{-1} - \mu^{-1}}{\varepsilon^{-1}\mu^{-1} - 1} = \varepsilon^{-1} \frac{\varepsilon - \mu}{\varepsilon\mu - 1} \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{\varepsilon - \mu}{\varepsilon\mu - 1} \right]^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (\varepsilon\mu - 1) = \pm(\varepsilon - \mu) \\ &\Leftrightarrow (\varepsilon \pm 1)(\mu \mp 1) = 0. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Also muss entweder $\mu = 1$ oder $\varepsilon = 1$ sein. Die zweite Möglichkeit kommt aber nicht in Betracht, da für $\varepsilon = 1$ der Brewster-Winkel θ_B^{\parallel} überhaupt nicht existiert, wie wir gesehen haben.

Zum Schluss erwähnen wir noch eine weitere interessante Schreibweise, die Brewster-Winkel durch Materialkonstanten zu parametrisieren. Diese besteht darin, die rechten Seiten (3.79) statt durch ε und μ durch den relativen Brechungsindex n und den relativen Wellenwiderstand Z auszudrücken

$$n := \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} = \sqrt{\mu\varepsilon}, \quad Z := \frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{\frac{\mu_2/\varepsilon_2}{\mu_1/\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (3.87)$$

Dann ist also $\mu = nZ$ und $\varepsilon = n/Z$ und (3.79) nimmt die Form an

$$\tanh^2(\theta_B^{\parallel}) = \left(\frac{n}{Z} \right)^2 \frac{1 - Z^2}{n^2 - 1}, \quad (3.88a)$$

$$\tanh^2(\theta_B^{\perp}) = n^2 \frac{Z^2 - 1}{n^2 - 1}. \quad (3.88b)$$

Wieder liest man einige Beziehungen sofort ab, so z.B. dass Brewster-Winkel von 0° genau bei $Z = 1$ möglich sind, und dass bei Übergang zu einem optisch dichteren Medium ($n > 1$) ein elektrischer oder magnetischer Brewster-Winkel genau dann existiert, wenn $Z < 1$ bzw. $Z > 1$. Findet der Übergang zu einem optisch dünneren Medium statt ($n < 1$) so kehren sich die Ungleichungen für Z gerade um.

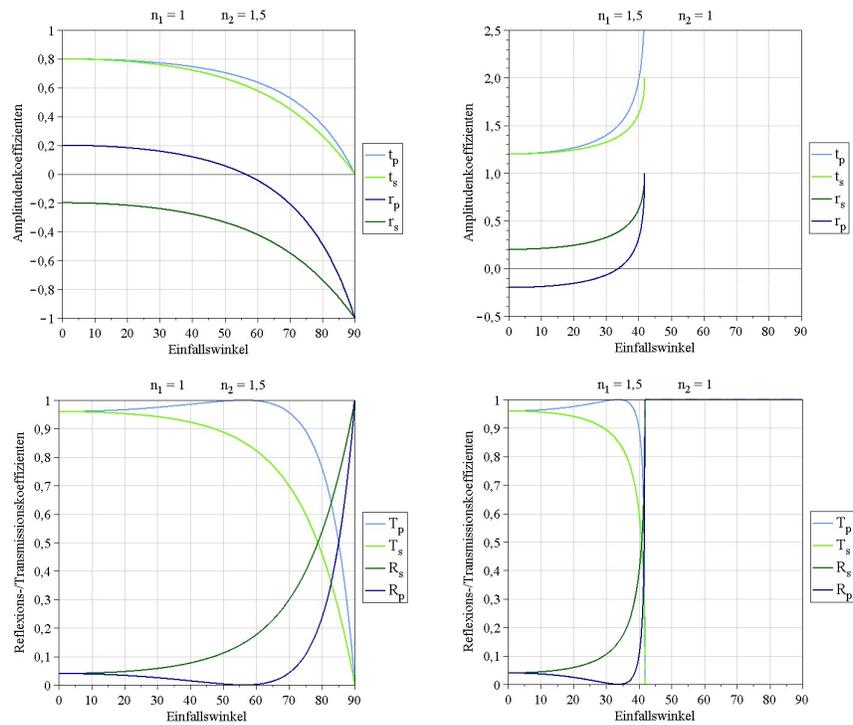


Abbildung 3.7: Graphen der Amplitudenkoeffizienten $t := \tilde{E}_t/\tilde{E}_s$ und $r := \tilde{E}_r/\tilde{E}_s$ sowie der Energie-Koeffizienten $T := \tilde{S}_t/\tilde{S}_s$ und $R := \tilde{S}_r/\tilde{S}_s$ sowohl für den 1. Fall paralleler (Index p) als auch den 2. Fall senkrechter (Index s) Polarisation. Diese wiederum sind gezeigt für $n_1 = 1$ und $n_2 = 1,5$ (linke Spalte: Übergang in ein optisch dichteres Medium) und für $n_1 = 1,5$ und $n_2 = 1$ (rechte Spalte: Übergang in ein optisch dünneres Medium), entsprechend den Medien Luft ($n = 1$) und Quarzglas ($n = 1,5$). Für die parallele Polarisation liegt der Brewster-Winkel bei etwa $56,3^\circ$ für den Übergang von Luft zu Wasser (linke Spalte) und bei etwa $33,7^\circ$ für den umgekehrten Übergang. Er äußert sich in der Nullstelle von R_p bzw. dem Wert eins von T_p . Für die senkrechte Polarisation besitzt R_p keine Nullstelle und es existiert kein Brewster-Winkel. (Quelle: Wikimedia)

Kapitel 4

Statische Probleme

4.1 Der Weg zur Poisson-Gleichung

Wir betrachten die Maxwell'schen Gleichungen für den Spezialfall verschwindender zeitlicher Ableitungen und homogener Medien (z.B. Vakuum). Dann gelten die Gleichungen (3.3) mit $\dot{\mathbf{B}} = 0 = \dot{\mathbf{D}}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}. \quad (4.1b)$$

Es ist also \mathbf{B} divergenz- und \mathbf{E} rotationsfrei. Aus dem Poincaré'schen Lemma wissen wir, dass dann ein Skalarfeld ϕ und ein Vektorfeld \mathbf{A} existiert, so dass

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.2b)$$

Außerdem wissen wir, dass \mathbf{A} divergenzfrei gewählt werden kann:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.2c)$$

Durch die Einführung der Potentiale sind die beiden ersten Gleichungen (4.1a) erfüllt. Die restlichen beiden Gleichungen (4.1b) sind dann äquivalent den Bedingungen, die wir erhalten, wenn wir (4.2a) in die erste und (4.2b) unter Benutzung von (4.2c) und (1.27d) in die zweite einsetzen:

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon, \quad (4.3)$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}. \quad (4.4)$$

Dies sind die Grundgleichungen der Elektro- bzw. Magnetostatik. Im zweiten Fall ist noch folgendes zu beachten: Nimmt man von (4.4) die Divergenz und setzt voraus, dass ∇ mit Δ vertauscht (was der Fall ist wenn \mathbf{A} dreimal stetig differenzierbar ist), dann erhält man wegen (4.2c) als Integrabilitätsbedingung die Divergenzfreiheit der Stromdichte:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.5)$$

Dies ist gerade die Integrabilitätsbedingung (3.1) der lokalen Ladungserhaltung im statischen Fall. In der Magnetostatik sind also als Quellen \mathbf{J} in (4.4) nur divergenzfreie Ströme erlaubt.

Man bezeichnet eine Gleichung der Form (4.3) als *Poisson-Gleichung*. Deren rechte Seite bezeichnet man oft als "Quelle". Bei gegebener Quelle (hier die Ladungsdichte ρ) sollen Lösungen ϕ gefunden werden. Ohne weitere einschränkende Bedingungen an die Lösung ϕ werden diese natürlich nicht eindeutig sein. Die Nichteindeutigkeit besteht dann *genau* in den Lösungen der homogenen Gleichung, also der *Laplace Gleichung*

$$\Delta\phi = 0. \quad (4.6)$$

Der Beweis dieser Behauptung ist ziemlich offensichtlich: Ist einerseits ϕ_1 eine Lösung von (4.3) und ϕ_0 eine Lösung von (4.6), dann ist $\phi_2 := \phi_1 + \phi_0$ wieder eine Lösung von (4.3). Sind andererseits ϕ_1 und ϕ_2 Lösung von (4.3), dann ist $\phi_0 := \phi_2 - \phi_1$ eine Lösung von (4.6).

4.2 Randbedingungen, Eindeutigkeit und Green-Funktionen.

Lösungen von (4.6) in ganz \mathbb{R}^3 gibt es massenhaft. Beispiele sind die konstante Funktionen, die homogen linearen Funktionen $\sum_a C_a x_a$, homogen quadratische Funktionen $\sum_{a,b} C_{ab} x_a x_b$ mit symmetrisch-spurlosen Koeffizienten-Matrizen C_{ab} (z.B. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$) und allgemein homogene Polynom vom Grad $n > 2$ der Form $\sum_{a_1, \dots, a_n} C_{a_1 \dots a_n} x_{a_1} \cdots x_{a_n}$ mit vollständig symmetrischen und spurlosen Koeffizienten $C_{a_1 \dots a_n}$. Letzteres heißt, dass $C_{a_1 \dots a_n} = C_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}}$ für alle Permutationen¹ σ der Menge $\{1, \dots, n\}$ und dass $\sum_b C_{bba_3 \dots a_n} = 0$.²

¹Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist gleich der Menge der Bijektionen dieser Menge und heißt die *Symmetrische Gruppe* S_n .

²Der Vektorraum der symmetrisch-spurlosen Koeffizienten $C_{a_1 \dots a_n}$ hat daher die Dimension $\binom{n+2}{n} - \binom{n}{n-2} = (2n+1)$.

Darüberhinaus gilt natürlich wegen der Linearität der Laplace-Gleichung, dass jede Linearkombination der bisher genannten Lösungen wieder eine Lösung ist. Allerdings gilt auch, dass außer den konstanten Lösungen keine weitere der genannten Lösungen - sofern sie in ganz \mathbb{R}^3 betrachtet werden - beschränkt ist. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft der Laplace-Gleichung, wie wir gleich sehen werden.

Um die Frage zu klären, unter welchen Bedingungen die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung hat, betrachten wir zunächst ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mit orientierter Randfläche ∂G und wenden den Gauß'schen Satz (8.36) auf das Vektorfeld $\mathbf{V} = \phi \nabla \phi$ an. Dann ist $\nabla \cdot \mathbf{V} = \phi \Delta \phi + \|\nabla \phi\|^2$ und der Gaußsche Satz ergibt mit $\Delta \phi = 0$:

$$\int_G dv \|\nabla \phi\|^2 = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (\phi \nabla \phi). \quad (4.7)$$

Daraus lesen wir folgendes ab: Ist auf dem Rand ∂G entweder $\phi = 0$ oder $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0$ dann verschwindet die rechte Seite. Die linke Seite ist aber ein Integral über einen stetigen nicht-negativen Integranden, das genau dann verschwindet wenn der Integrand selbst die Nullfunktion ist. Die Norm des Gradienten verschwindet aber nur, falls der Gradient selbst verschwindet, d.h. ϕ konstant ist. Im ersten Fall, wo $\phi|_{\partial G} = 0$, heißt das $\phi = 0$, im zweiten Fall, wo $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi|_{\partial G} = 0$, impliziert dies $\phi = \text{konst.}$

Übertragen auf die Poisson-Gleichung haben wir also folgendes Eindeutigkeitsresultat:

Satz 16. Eine Lösung der Poisson-Gleichung zur gegebenen Quelle im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ ist – sofern existent – eindeutig, falls die Werte der Funktion ϕ auf dem Rand ∂G vorgegeben werden. Man spricht in diesem Fall von Dirichlet-Randbedingungen³. Sie ist eindeutig bis auf eine additive Konstante, falls die Normalenableitung der Funktion ϕ auf dem Rand ∂G vorgegeben werden. Man spricht in diesem Fall von Neumann-Randbedingungen⁴. Ist $G = \mathbb{R}^3$ und fällt die Norm von $\phi \nabla \phi$ im Unendlichen schneller ab als r^{-2} (so dass das Oberflächenintegral auf der rechten Seite von (4.7) über 2-Sphären wachsenden Radius' im Limes unendlich großen Radius' gegen Null konvergiert), so ist die Lösung wieder eindeutig. \square

In diesem Zusammenhang sind die Green'schen Identitäten wichtig, die wir in Abschnitt 8.4.3 diskutieren. In der Tat kommt (4.7) der ersten Green'schen Identität (8.46) gleich, deren Beweis aber so kurz ist, dass wir ihn oben einfach

³Benannt nach dem Mathematiker Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

⁴Benannt nach dem Mathematiker Carl Neumann (1832-1925).

nochmal wiederholt haben. Eine wichtige Beziehung ergibt sich aus der zweiten Green'schen Identität

$$\int_G dv (S\Delta T - T\Delta S) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (S\nabla T - T\nabla S). \quad (4.8)$$

die wir aus (8.47) entnehmen, wenn wir in ihr an Stelle von S unser Potential ϕ einsetzen und für T eine "Funktion" $\mathbf{x} \mapsto G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (genauer: Distribution), die folgende Gleichung erfüllt:

$$\Delta G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{y}}^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (4.9)$$

Man nennt ein solches $G_{\mathbf{y}}$ eine *Green'sche Funktion*.

Wir wissen, dass diese Gleichung Lösungen - im Distributiven Sinne! - besitzt, wie in (8.64) gezeigt. Zu jeder Lösung können wir aber eine Lösung der homogenen Gleichung (also der Laplace-Gleichung) addieren und bekommen wieder eine Lösung. Diese Freiheit kann man ausnutzen, um bestimmte Randbedingungen zu implementieren.

Setzen wir in also $S = \phi$ und $T = G_{\mathbf{y}}$, so bekommen wie die Identität.

$$\phi(\mathbf{y}) = \int_G dv G_{\mathbf{y}}\Delta\phi + \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (\phi\nabla G_{\mathbf{y}} - G_{\mathbf{y}}\nabla\phi) \quad (4.10)$$

Diese ist der Schlüssel zur Lösung des Randwertproblems, denn es zeigt sich, dass die Green-Funktion $G_{\mathbf{y}}$ so bestimmt werden kann, dass entweder sie oder ihre Normalenableitung auf dem Rand verschwindet und damit nur einer der beiden Terme im Oberflächenintegral in (4.10) überlebt. Dieser ist dann aber bestimmt, wenn wir entsprechend ϕ bzw. die Normalenableitung von ϕ auf dem Rand vorgeben und statt $\Delta\phi$ die rechte Seite der Poisson-Gleichung einsetzen. Wir wir schon wissen, ist die so bestimmte Lösung dann eindeutig.

Sind keine Ränder vorhanden und fordert man Abfall im Unendlichen, so ist die zugehörige Green-Funktion gegeben durch

$$G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (4.11)$$

und die Lösungen zu (4.3) und (4.4) sind gegeben durch

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.13)$$

wo wir jetzt das Argument \mathbf{x} in \mathbf{x}' und das Argument \mathbf{y} in \mathbf{x} umbenannt haben und dv' für $d^3\mathbf{x}'$ steht. Daraus entstehen durch anwenden des negativen Gradienten bzw. der Rotation Ausdrücke für das elektrische bzw. magnetische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}. \quad (4.15)$$

Wichtige Grenzfälle für (4.12) und (4.13) bzw. (4.14) und (4.15) entstehen für die Ladungsdichte einer Punktladung und die Stromdichte eines unendlich dünnen Drahtes.

4.3 Elektrostatik

4.3.1 Konfigurationen von Punktladungen und ihre Energie

Eine punktförmige Ladung am Ort \mathbf{x}' und der Stärke e' kann man mathematisch durch die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{x}) = q' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.16)$$

repräsentiert werden, die jetzt als Distribution aufzufassen ist. Dann erhalten wir aus (4.12) ihr Potential und elektrisches Feld zu

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}. \quad (4.17b)$$

Man nennt sie das *Coulomb-Potential* bzw. *Coulomb-Feld* zur Ladung e' am Ort \mathbf{x}' . Sie beschreibt das elektrische Feld einer einzelnen Ladung bei Abwesenheit von Rändern in einem homogen-isotropen Medium der elektrischen Feldkonstante $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$, insbesondere also im Vakuum $\epsilon_r = 1$. Die Kraft auf eine Probeladung e am Ort \mathbf{x} ist dann nach (1.8) gegeben durch

$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3}. \quad (4.18)$$

Sie genügt offensichtlich Newtons drittem Axiom “actio = reactio”, den die Kraft die e' auf e ausübt ist offensichtlich das Negative der Kraft, die e auf e' ausübt

(Vertauschen von (e, \mathbf{x}) mit (e', \mathbf{x}')). Daraus berechnet man leicht die Arbeit, die man aufwenden muss, um die Ladung q aus dem Unendlichen an den Punkt \mathbf{x} zu bringen, entgegen der Kraft die Ladung q' am festen Punkt \mathbf{x}' auf sie ausübt. Es ist aber sogar noch einfacher, diesen Ausdruck allgemein abzuleiten. Da $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ und es sich bei \mathbf{E} um ein Gradientenfeld (4.2a) handelt, d.h. $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, ist die Arbeit unabhängig vom Weg, auf dem die Ladung q bis zum Punkt \mathbf{x} geführt wird. Bezeichnet also K irgend eine Kurve von (idealisiert) ∞ , wo $\phi(\infty) = 0$, nach \mathbf{x} , dann ist die Arbeit, die man entgegen der Kraft \mathbf{F} aufwenden muss gegeben durch

$$A = - \int_K d\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} = q \int_{\infty}^{\mathbf{x}} d\mathbf{k} \cdot \nabla\phi = q\phi(\mathbf{x}). \quad (4.19)$$

Dies gilt völlig allgemein. In unserem Fall ist dies gleich

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qq'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.20)$$

Diese Arbeit entspricht der gesamten elektrostatischen Energie des aus den zwei Punktteilchen bestehenden Systems wenn man annimmt, das die Energie E den Wert Null annimmt, wenn die Teilchen unendlich weit voneinander entfernt sind. Die Verallgemeinerung auf n Punktteilchen der Ladungen q_a und Positionen \mathbf{x}_a , wo $a \in \{1, 2, \dots, n\}$, ist dann, wenn wir die Bezeichnung A (Arbeit) durch E (Energie) ersetzen

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a < b}}^n \frac{q_a q_b}{\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^n \frac{q_a q_b}{\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|}. \quad (4.21)$$

Man beachte die Einschränkung der doppelten Summation auf die Terme in denen $a \neq b$ gilt.

Die gesamte Ladungsdichte dieser Konfiguration aus n Teilchen ist

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^n q_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a), \quad (4.22)$$

womit man (4.21) *fast* auch als Doppelintegral über den ganzen Raum schreiben kann:

$$E = \left\{ \frac{1}{8\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right\}_{\text{reg}}. \quad (4.23)$$

Hier bedeutet die geschweifte Klammer mit dem Subskript “reg”, dass der Ausdruck innerhalb der Klammer regularisiert werden muss, denn er enthält ja auch

die n Terme mit $a = b$, die alle divergieren und deshalb zu verwerfen sind: die Selbstenergien der einzelnen Teichen sind in dieser Doppelsumme nicht mitzunehmen! Dieser unschöne mathematische *ad hoc* Regel ist eine Konsequenz unserer Verwendung von Punktteilchen, die in der Kontinuumstheorie mathematisch nicht konsistent eingebaut werden können. Zwar können diese in *linearen* Beziehungen als Distributionen berücksichtigt werden, wie in (4.22), was aber zu Divergenzen führt wenn man Ausdrücke mit Distributionen multipliziert, wie im Term $\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')$ in (4.21).

Der in geschweiften Klammern stehende Ausdruck in (4.23) gibt für reguläre Ladungsverteilungen die elektrostatische Gesamtenergie des Feldes korrekt wieder. Das Doppelintegral existiert dann auch an den Stellen an denen $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ da bereits das Integrationsmaß einer einzelnen Integration, etwa der über $dv = d^3x$ bei festgehaltenem \mathbf{x}' , bei Einführung von Polarkoordinaten um \mathbf{x}' eine $r^2 dr$ enthält was mit dem $1/r$ durch den Nenner zu einem $\propto r^2$ nach dr -Integration führt.

Interessanterweise kann die elektrostatische Feldenergie durch Verwendung von (4.17a) und nachfolgend (4.3) auch als reines Integral über das elektrische Feld geschrieben werden:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (4.24a)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}), \quad (4.24b)$$

$$= -\frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv (\Delta\phi(\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x}), \quad (4.24c)$$

$$= \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dv \|\mathbf{E}(\mathbf{x})\|^2. \quad (4.24d)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt von (4.24c) nach (4.3.1) $\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi$ und $\nabla\phi = -\mathbf{E}$ benutzt, sowie eine partielle Integration und den Gauß'schen Satz. Das Oberflächenintegral verschwindet dabei, weil ϕ gemäß (4.12) im Unendlichen wie $1/r$ und $\nabla\phi$ wie $1/r^2$ verschwinden, ihr Product also wie $1/r^3$ und somit bei Integration über die 2-Sphäre im Unendlichen keinen Beitrag liefern.

Man beachte, dass sich jedes der Integrale in (4.24a) und das Integral in (4.24b) eigentlich nur über den Träger von ρ erstrecken, während das Integral (4.24c) stets über den ganzen Raum zu nehmen ist, da \mathbf{E} ohne Ränder keinen beschränkten Träger besitzen wird. Man kann sich also fragen, was die richtige räumliche Lokalisation der elektrischen Energie ist. Wir werden in Kapitel 5 noch allgemein, dass diese durch den Integranden von gegeben ist, die räumliche Energiedichte des

elektrischen Feldes in einem homogenen und isotropen Medium durch

$$W_e = \frac{\epsilon}{2} \|\mathbf{E}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (4.25)$$

4.3.2 Elektrische Dipole

Als nächstes betrachten wir zwei nahe benachbarte Punktladungen q und $-q$, die an den Punkten $\mathbf{x}' \pm \mathbf{d}/2$, entsprechend einer Lagungsverteilung

$$\rho(\mathbf{x}) = q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - (\mathbf{x}' + \mathbf{d}/2)) - q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - (\mathbf{x}' - \mathbf{d}/2)). \quad (4.26)$$

Deren Potential ist gemäß (4.12) gegeben durch die Summe der von den einzelnen Ladungen herrührenden Potentiale, also

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{d}/2\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{d}/2\|} \right\}. \quad (4.27)$$

Wir setzen

$$\mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r := \|\mathbf{r}\|, \quad \mathbf{n} := \mathbf{r}/r, \quad (4.28)$$

betrachten den Fall wo $\|\mathbf{d}\| \ll r$, die Ausdehnung des Dipols also klein ist gegen den Abstand von seinem Mittelpunkt. Dann können wir die zwei Terme in der geschweiften Klammer der rechten Seite von (4.27) nach dem Schema

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \text{Terme} \propto x^3 \text{ und höher} \quad (4.29)$$

entwickeln. Es ist nämlich

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}' \mp \mathbf{d}/2\| = r \|\mathbf{n} \mp \mathbf{d}/2r\| = r \sqrt{1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}/r + (\|\mathbf{d}\|/2r)^2}. \quad (4.30)$$

Wenden wir nun darauf (4.29) an um bis zur einschließlich quadratischen Ordnung in $\|\mathbf{d}\|/r$ zu entwickeln, dann erhalten wir

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}' \mp \mathbf{d}/2\|} = \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}}{2r} + \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})^2 - \|\mathbf{d}\|^2}{8r^2} \right) + \mathcal{O}(1/r^4). \quad (4.31)$$

Also wird aus (4.27), wenn wir wieder zu den ursprünglichen Bezeichnungen übergehen und Terme der Ordnung $\mathcal{O}(r^{-4})$ weglassen

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right), \quad (4.32)$$

wo

$$\mathbf{p} := q \mathbf{d} \quad (4.33)$$

das elektrische Dipolmoment bezeichnet. Natürlich hätten wir statt $\nabla \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^{-1}$ auch $-\nabla' \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^{-1}$ schreiben können. Diesem Ausdruck können wir in der Form (4.12) schreiben wenn wir setzen

$$\rho(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.34)$$

Lassen wir den Abstand $\|\mathbf{d}\|$ des Ladungspaares $(q, -q)$ $\|\mathbf{d}\|$ gegen Null und den Betrag der Ladung q gleichzeitig gegen Unendlich gehen, so dass \mathbf{p} konstant bleibt, dann werden im Limes (4.32) und (4.34) exakt. Man spricht dann vom Potential und der Ladungsverteilung eines *Punktdipols* am Ort \mathbf{x}' mit Dipolmoment \mathbf{p} .

Das elektrische Feld des Dipols ist der negative Gradient von (4.32), also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

wobei wir die Bezeichnung (4.28) verwenden.

Die Kraft, die ein elektrisches Feld \mathbf{E} auf den Dipol insgesamt ausübt, ist die Summe der Kräfte auf die beiden Ladungen. Im Limes $\|\mathbf{d}\| \rightarrow 0$ und konstant gehaltenem \mathbf{p} ist diese gegeben durch

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}' + \mathbf{d}/2) - \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{d}/2) \right] = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{x}'). \quad (4.36)$$

Das Drehmoment in Bezug auf den Mittelpunkt \mathbf{x} ist, wieder im gleichen Limes,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= q \left[(\mathbf{d}/2) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}' + \mathbf{d}/2) - (-\mathbf{d}/2) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}' - \mathbf{d}/2) \right] \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Kräfte die zwei Punktdipole mit Momenten \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 an den Orten \mathbf{x}_1 bzw. \mathbf{x}_2 wechselseitig aufeinander ausüben bekommen wir aus (4.36) und (4.35) wie folgt: Sei \mathbf{E}_2 das Feld von Dipol 2. Dann ist die Kraft, die Dipol 2 auf Dipol 1 ausübt gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1) \mathbf{E}_2(\mathbf{x}_1). \quad (4.38)$$

Hier bezeichnet ∇_1 den auf die Ortsvariable \mathbf{x}_1 bezogenen Nabla-Operator. Also ist

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1) (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_1) \nabla_1 \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \right) = -\nabla_1 U_{12}, \quad (4.39)$$

wo

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{-1}{4\pi\epsilon} (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla_1) (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_1) \frac{1}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_{12})}{r_{12}^3}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dabei haben wir wieder die Bezeichnung (4.28) verwenden, jetzt allerdings angepasst auf die Unterscheidung der Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 :

$$\mathbf{r}_{12} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad r_{12} := \|\mathbf{r}_{12}\|, \quad \mathbf{n}_{12} := \mathbf{r}_{12}/r_{12}, \quad (4.41)$$

Die Größe U_{12} der Variablen $(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ gibt also die potentielle Energie der beiden Dipole in der durch die Variablen $(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ gekennzeichneten Konfiguration an. Der negative Gradient bezüglich \mathbf{x}_1 gibt die Kraft auf den ersten, der negative Gradient bezüglich \mathbf{x}_2 die Kraft auf den zweiten Dipol an. Beide unterscheiden sich nur um das Vorzeichen da U_{12} nur von der Differenz $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ abhängt. Die Kräfte genügen also Newtons 3. Axiom “actio gleich reactio”, also dem Impulserhaltungssatz.

Man beachte jedoch, dass die Kraft \mathbf{F}_{12} nicht notwendig proportional zu \mathbf{n}_{12} , also i.a. nicht parallel zur Verbindungslinie der beiden Dipolpositionen ist. Das ist nicht schwer zu sehen: Nimmt man den Gradienten $\nabla_1 U_{12}$ dann ergeben die Ableitungen ∇r_{12} Terme proportional zu \mathbf{r}_{12} . Der Gradient wirkt aber auch auf die zwei \mathbf{n}_{12} im Nenner, wobei (unter Weglassung der Indizes 1 und 12),

$$\nabla_a \mathbf{n}_b = \frac{1}{r} (\delta_{ab} - n_a n_b) = \frac{1}{r} P_{ab}^\perp \quad (4.42)$$

wobei P^\perp die Projektion auf das orthogonale Komplement zu \mathbf{n} ist. Also ergibt sich für die Dipol-Dipol-Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{3}{r_{12}^4} \right) \left[\mathbf{n}_{12} \left(\mathbf{p}_1^\perp \cdot \mathbf{p}_2^\perp - 2p_1^\parallel p_2^\parallel \right) + \mathbf{p}_1^\perp p_2^\parallel + \mathbf{p}_2^\perp p_1^\parallel \right], \quad (4.43)$$

wo $\mathbf{p}_1^\perp := \mathbf{p}_1 - \mathbf{n}_{12}(\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{p}_1)$ die orthogonalprojektion und $p_1^\parallel := \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{p}_1$ den Betrag der Parallelkomponente bezeichnet. Der erste Term in der eckigen Klammer gibt die Komponente der Kraft entlang der Verbindungslinie der Dipolmittelpunkte

an, wobei zu beachten ist, dass \mathbf{n}_{12} vom Dipol 2 zum Dipol 1 weist, ein positiver Koeffizient vor \mathbf{n}_{12} also eine Abstoßung von Dipol 1 durch Dipol 2 bedeutet. Der zweite und dritte Term der eckigen enthält Kraftbeiträge die nicht parallel zur Verbindungslinie angreifen und entweder in Richtung von \mathbf{p}_1^\perp zeigen falls $p_2^\parallel \neq 0$ oder in Richtung von \mathbf{p}_2^\perp falls $p_1^\parallel \neq 0$. Keine solchen zur Verbindungslinie transversalen Kräfte treten also auf, wenn die Dipolmomente entweder beide keine Parallelkomponenten besitzen oder beide parallel zur Verbindungslinie liegen.

Genauso können wir das Drehmoment ausrechnen, das Dipol 2 auf Dipol 1 ausübt (bezogen auf den Mittelpunkt von Dipol 1). Wir verwenden (4.37) und erneut (4.35):

$$\mathbf{D}_{12} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{E}_2(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{3(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{n}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}_{12}) - \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{r_{12}^3}. \quad (4.44)$$

Man beachte, dass dieser Ausdruck nicht antisymmetrisch unter $1 \leftrightarrow 2$ ist. Das ist kein Widerspruch zum Prinzip "Actio = Reactio" weil die beiden Drehmomente auf verschiedene Punkte bezogen sind: \mathbf{D}_{12} auf \mathbf{x}_1 und \mathbf{D}_{21} auf \mathbf{x}_2 . Bezogen \mathbf{x}_2 ist das gesamte auf den ersten Dipol wirkende Drehmoment nicht durch \mathbf{D}_{12} sondern $\mathbf{D}_{12} + \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12}$ gegeben. Mit Hilfe von (4.43) folgt sofort

$$\mathbf{D}_{12} + \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{D}_{21}. \quad (4.45)$$

Diese Gleichung besagt gerade, dass die Summe aller angreifenden Drehmomente bezogen auf \mathbf{x}_2 verschwindet also. Durch Umstellen dieser Gleichung und Ausnutzen der Antisymmetrie von sowohl \mathbf{r}_{12} als auch \mathbf{F}_{12} unter $1 \leftrightarrow 2$ folgt die entsprechende Aussage für die auf \mathbf{x}_1 bezogenen Drehmomente: $\mathbf{D}_{21} + \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{D}_{12}$.

4.3.3 Das Feld elektrisch polarisierter Körper

Die Ausdrücke (4.32) und (4.35) für das Potential und das elektrische Feld eines einzelnen Dipols lassen sich durch Summation auf die entsprechenden Ausdrücken einer beliebigen Anzahl von Dipolen verallgemeinern. Ist das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ im Raum von einer kontinuierlichen Dipoldichte \mathbf{P} erfüllt, so dass die dem infinitesimalen Raumvolumen dv' am Punkt \mathbf{x}' das Dipolmoment $\mathbf{P}(\mathbf{x}')dv'$ zugeordnet wird, so erhält man deren Gesamtpotential und gesamtes elektrisches Feld durch Integration. Aus (4.32) erhält man so

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G dv' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (4.46)$$

Dabei haben wir im außerhalb der Dipolverteilung Vakuum angenommen, so dass $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Man beachte, dass hier der Nabla-Operator ∇ die Differentiation nach \mathbf{x} ausführt. Diese können wir ersetzen durch das Negative der Differentiation nach \mathbf{x}' , also durch $(-\nabla')$, da diese beiden Operatoren zum gleichen Ergebnis führen wenn man sie auf die Funktion $1/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ anwendet (das stimmt für jede Funktion, die nur von der Differenz $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ abhängt). Dieser Schritt ist sinnvoll, weil danach die Integrationsvariable und die Variable der Differentiation beide gleich sind, nämlich \mathbf{x}' , und wir so eine partielle Integration ausführen und den Gauß'schen Satz anwenden können. Wir können also den Ausdruck für das Potential wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_G dv' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{\partial G} d\mathbf{f}' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \int_G dv' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right].\end{aligned}\quad (4.47)$$

Der erste Term verschwindet, wenn \mathbf{P} auf dem Rand ∂G und außerhalb von G verschwindet, also - wie man sagt - seinen Träger in G hat. In diesem Fall können wir diesen Ausdruck mit dem ursprünglichen (4.12), so lesen wir folgendes ab: Eine Polarisationsdichte \mathbf{P} die innerhalb eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^3$ konzentriert ist, deren Träger also in G liegt, erzeugt außerhalb G ein elektrisches Potential das identisch ist zu dem, das eine im Gebiet G konzentrierte Ladungsverteilung

$$\rho_b := -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.48)$$

erzeugt. Aus diesem Grund nennt man $(-\nabla \cdot \mathbf{P})$ auch die Polarisationsladungsdichte.

Verschwindet die Polarisierung \mathbf{P} auf dem Rand ∂G nicht, so erzeugt der Randterm in (4.47) ein elektrisches Potential gleich dem einer auf ∂G konzentrierten Flächenladungsdichte

$$\sigma_b := \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}, \quad (4.49)$$

wo \mathbf{n} die nach außen weisende Normale zu ∂G ist. Im allgemeinen werden sowohl der Oberflächen- als auch der Volumenanteil aus (4.47) beitragen und wir könne diese Formel sowohl für Punkte \mathbf{x} innerhalb G , auf dem Rand ∂G und außerhalb G anwenden. Ist aber z.B. der Körper in seinem Inneren homogen polarisiert, also \mathbf{P} im Inneren des Körpers konstant, dann verschwindet der Volumenanteil und alle Beiträge stammen von der Oberfläche.

Ein Material mit einer permanenten elektrischen Polarisierung heißt *Elektret*. Elektrete sind das elektrische Analogon der *Magnete*, die eine permanente magnetische

Polarisierung besitzen und den wir uns später zuwenden werden. Spezielle Elektrete sind die *Ferroelektrika*, die Analoga der Ferromagnete sind: in beiden gibt es lokale Bereiche mit nicht verschwindender mittlerer Polarisation, die aber von Bereich zu Bereich variieren können. Aus dieser Analogie leitet sich auch der Name her, der insofern irreführend ist, als das Material nicht notwendig Eisen enthalten muss, um als ferroelektrisch zu gelten. Ein bekanntes Ferroelektrikum ist *Bariumnitrat*, BaTiO_3 , ein aus Barium und Titan gebildetes Mischoxid, was zur Gruppe der Elektrokeramiken gehört.

Als idealisiertes Beispiel betrachten wir eine homogen polarisierten Kugel mit Radius R und Mittelpunkt am Ursprung. Für diese ist \mathbf{P} gegeben durch (wie immer ist $r := \|\mathbf{x}\|$)

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{P}_0 & \text{für } r \leq R, \\ \mathbf{0} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (4.50)$$

Der Rand ∂G ist also eine Sphäre vom Radius R und Mittelpunkt am Ursprung, die wir mit S_R^2 bezeichnen. Das gesamte, im Inneren dieser Sphäre enthaltene Dipolmoment \mathbf{p} ist also gegeben durch

$$\mathbf{p} := \int_G dv \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{P}_0. \quad (4.51)$$

Das Potential ist also gegeben durch ein Integral über diese Kugel:

$$\phi(x) = \frac{\mathbf{P}_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{S_R^2} \frac{d\mathbf{f}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.52)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir genauer sehen, wie man das Integral auswertet. Das Resultat ist

$$\int_{S_R^2} \frac{d\mathbf{f}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \mathbf{x} \frac{4\pi}{3} \begin{cases} 1 & \text{für } r < R, \\ R^3/r^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.53)$$

so dass

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{x}}{3\epsilon_0} \begin{cases} 1 & \text{für } r < R, \\ R^3/r^3 & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (4.54)$$

Daraus erhalten wir schließlich das elektrische Feld, das wir statt durch die Dipoldichte \mathbf{P}_0 durch das gesamte Dipolmoment \mathbf{p} gemäß (4.51) ausdrücken:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} -\mathbf{p}/R^3 & \text{für } r < R, \\ [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}]/r^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.55)$$

Wir erhalten also, nicht ganz unerwartet, ein exaktes Dipolfeld der Form (4.35) für den Außenbereich $r > R$, das innen durch ein konstantes Feld fortgesetzt wird, das antiparallel zu \mathbf{p} (und damit zu \mathbf{P}_0) liegt. Man sieht ohne Rechnung sofort, dass bei $r = R$ die zu \mathbf{n} senkrechte Komponente, also die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes, beim Übergang von $r > R$ zu $r < R$ stetig ist, wie in (3.4) allgemein gefordert. Der Sprung den die Normalenkomponente $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ von Innen ($r < R$) nach Außen ($r > R$) erleidet ist $(1/4\pi\epsilon_0)(3\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})/R^3 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_0)/\epsilon_0$, was mit ϵ_0 multipliziert gerade wieder der Oberflächenladungsdichte (4.49) entspricht, wie es gemäß (3.17) sein muss.

Man beachte anhand dieses Beispiels die Relation (1.6a) zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} : Außerhalb der Sphäre S_R^2 , wo die Polarisation \mathbf{P} verschwindet und Vakuum herrscht, gilt die Proportionalität $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ und \mathbf{D} ist ebenfalls ein reines Dipolfeld. Innerhalb der Sphäre S_R^2 ist aber

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_0 &= \frac{1}{4\pi}(-\mathbf{p}/R^3 + 3\mathbf{p}/R^3) = \frac{\mathbf{p}}{2\pi R^3} \\ &= 2\mathbf{P}_0/3 = -2\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Insgesamt ist also

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \begin{cases} 2\mathbf{p}/R^3 & \text{für } r < R, \\ [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}]/r^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.57)$$

\mathbf{D} innen also nun parallel zu \mathbf{p} und vom doppeltem Betrag wie $\epsilon_0 \mathbf{E}$.

4.3.4 Mittelwerte elektrischer Felder

Sei G das Innere einer Kugel vom Radius R mit Mittelpunkt am Punkt \mathbf{c} . Wir leiten einfache Ausdrücke für das Integral des elektrischen Feldes \mathbf{E} über G ab indem wir den Gauß'schen Satz in der Form (8.38) anwenden:

$$\int_G dv \mathbf{E}(\mathbf{x}) = - \int_G dv \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \phi(\mathbf{x}). \quad (4.58)$$

Verwenden wir nun (4.12) für das Potential und vertauschen das Volumenintegral nach \mathbf{x}' und die Oberflächenintegration nach \mathbf{x} , dann folgt

$$\int_G dv \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \rho(\mathbf{x}') \int_{\partial G} \frac{d\mathbf{f}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (4.59)$$

Das zweite hier auftretende Integral, also

$$I(\mathbf{x}') := \int_{S_c^2(R)} \frac{d\mathbf{f}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (4.60)$$

in dem über die Oberfläche einer Sphäre mit Radius R und Mittelpunkt \mathbf{c} integriert wird, ist so typisch für die in der Elektro- und Magnetostatik auftretenden Integrale, dass wir seine Auswertung explizit vorführen wollen. Dazu führen wir bei \mathbf{c} zentrierte sphärische Polarkoordinaten ein und setzen

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &:= \mathbf{x} - \mathbf{c}, & r &= \|\mathbf{r}\|, \\ \mathbf{r}' &:= \mathbf{x}' - \mathbf{c}, & r' &= \|\mathbf{r}'\|.\end{aligned}\quad (4.61)$$

Die Polachse wählen wir so, dass $\mathbf{r}' = r' \mathbf{e}_3$. Dann ist

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}. \quad (4.62)$$

Außerdem ist das orientierte Flächenmaß $d\mathbf{f} = df \mathbf{n}$ mit der radial nach außen zeigenden Normalen in Polarkoordinaten gegeben durch

$$d\mathbf{f} = R^2 (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4.63)$$

Für jede Komponente des vektorwertigen Integranden haben wir eine Integral auszuwerten, wobei die φ -Integration von 0 nach 2π und die von θ von 0 nach π zu erstrecken. Der Nenner des Integranden in (4.60) hängt nicht von φ ab. Im Zähler ist gemäß (4.63) die erste Komponente proportional zu $\cos \varphi$ die zweite zu $\sin \varphi$. Beide implizieren, dass die Integration nach φ diese Komponenten zum Verschwinden bringt. Also überlebt nur die dritte Komponente bei der Integration, deren Integrand von φ überhaupt nicht abhängt, so dass lediglich ein Faktor 2π aus der φ -Integration resultiert. Also haben wir soweit, wenn wir noch bedenken, dass die Polachse in Richtung des Normalenvektors $\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}'/r'$ zeigt und $r = R$ auf der Randsphäre ist:

$$\begin{aligned}I(\mathbf{x}') &:= 2\pi \frac{\mathbf{r}'}{r'} R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\cos \theta}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos \theta}} \\ &= 2\pi \frac{\mathbf{r}'}{r'} R^2 \int_{-1}^1 d\sigma \frac{\sigma}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \sigma}}.\end{aligned}\quad (4.64)$$

Das Integral formen wir durch partielle Integration wie folgt um:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 d\sigma \frac{\sigma}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \sigma}} &= \frac{-1}{Rr'} \int_{-1}^1 d\sigma \sigma \frac{d}{d\sigma} \sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \sigma} \\ &= \frac{-1}{Rr'} \left\{ \sigma \sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \sigma} \Big|_{\sigma=-1}^{\sigma=1} - \int_{-1}^1 d\sigma \sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \sigma} \right\} \\ &= -\frac{1}{Rr'} \left\{ |R - r'| + |R + r'| + \frac{1}{3Rr'} (|R - r'|^3 - |R + r'|^3) \right\}.\end{aligned}\quad (4.65)$$

Für eine weitere Auswertung unterscheiden wir die Fälle $R > r'$ und $R < r'$. Im ersten Fall ist $|R - r'| = R - r'$ und $|R - r'|^3 = R^3 - 3R^2r' + 3Rr'^3 - r'^3$, im zweiten sind die Rollen von R und r' vertauscht: $|R - r'| = r' - R$ und $|R - r'|^3 = r'^3 - 3r'^2R + 3r'R^2 - R^3$. Somit folgt

$$\int_{-1}^1 d\sigma \frac{\sigma}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr'\sigma}} = \frac{2}{3} \begin{cases} r'/R^2 & \text{für } R > r', \\ R/r'^2 & \text{für } r' > R, \end{cases} \quad (4.66)$$

oder

$$I(\mathbf{x}') = \frac{4\pi}{3} \begin{cases} \mathbf{r}' & \text{für } R > r', \\ \mathbf{r}'R^3/r'^3 & \text{für } r' > R. \end{cases} \quad (4.67)$$

Der Zusammenhang zwischen $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ und $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist natürlich durch (4.61) gegeben, wobei $r = R$.

Damit können wir nun das Integral (4.59) berechnen. Wir betrachten wieder zwei Fälle: Im ersten Fall ist der Träger von ρ ganz im inneren der Rand-Sphäre $\partial G = S_c^2(R)$ enthalten. Das bedeutet, dass für alle \mathbf{x}' , an denen der Integrand von Null verschieden ist, die Ungleichung $R > r'$ gilt. Also müssen wir für $I(\mathbf{x}')$ die erste Zeile in (4.67) nehmen und erhalten

$$\int_G dv \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3\varepsilon} \mathbf{p}, \quad (4.68a)$$

wo

$$\mathbf{p} := \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') \mathbf{r}' \quad (4.68b)$$

das elektrische Dipolmoment der elektrischen Ladungsverteilung ρ bezüglich des Mittelpunktes \mathbf{c} der Rand-Sphäre ∂G ist. Das Ergebnis ist unabhängig von Radius der Sphäre solange diese den gesamten Träger von ρ umschließt.

Im zweiten Fall ist nun der Träger der Ladungsverteilung außerhalb des Integrationsgebiets G , also $r' > R$. Dann verwenden wir die zweite Zeile in (4.67) und erhalten

$$\int_G dv \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{4\pi}{3} R^3 \int_{\mathbb{R}^3} dv' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = \text{Vol}(G) \mathbf{E}(\mathbf{c}) \quad (4.69a)$$

wo

$$\mathbf{E}(\mathbf{c}) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{c} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{c} - \mathbf{x}'\|^3} \quad (4.69b)$$

das von der Ladungsverteilung ρ erzeugte elektrische Feld am Mittelpunkt \mathbf{c} der Sphäre ist und $\text{Vol}(G)$ das Volumen der Sphäre bedeutet. Man hat also das einfache

Ergebnis, dass der Volumen-Mittelwert des elektrischen Feldes über das Innere einer Sphäre vom Radius R gleich ist dem Wert am Mittelpunkt, sofern der Träger der Ladungsdichte außerhalb der Sphäre liegt. Zusammenfassend stellen wir also fest: Ist also $G = B_{\mathbf{c}}(R)$ (Ball vom Radius R um \mathbf{c}), dann

$$\langle \mathbf{E} \rangle_G := \frac{1}{\text{Vol}(G)} \int_G dv \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{c}) & \text{falls } \text{supp}(\rho) \subset \mathbb{R}^3 \setminus G \\ \frac{-\mathbf{p}}{3\epsilon \text{Vol}(G)} & \text{falls } \text{supp}(\rho) \subset G \end{cases} \quad (4.70)$$

4.3.5 Methode der Spiegelladungen für ebene Ränder

Zur Bestimmung der Green-Funktion $G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ aus (4.9) bei Anwesenheit von Rändern ∂G auf denen entweder die Green-Funktion selbst (Dirichlet-Bedingung) oder ihre Normalenableitung (Neumann-Bedingung) verschwindet gelingt oft mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen. Zur Veranschaulichung dieser Methode machen wir uns klar, dass die Lösung ja darin besteht, die Laplace-Gleichung für ein Punktteilchen *innerhalb* des Gebietes G zu lösen, so dass bestimmte Bedingungen an das Potential auf dem Rand gestellt werden. Wir dürfen also im Komplement von G , “jenseits” des Randes ∂G , weitere imaginäre Punktladungen angebracht denken, denn deren Potential erfüllt ja die Laplace-Gleichung überall in G und nur das ist gefordert. Diese Freiheit in der Superposition von Punktladungspotentialen mit Quellpunkt jenseits ∂G können wir benutzen, um die Randbedingungen zu erfüllen.

Ein einfaches Beispiel ist gegeben durch den Halbraum $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 > 0\}$, also mit kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) für die $x_3 > 0$. Der Rand ∂G ist dann durch $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z = 0\}$, also die Ebene $x_3 = 0$ gegeben. Addieren wir zu der Green-Funktion (4.11), die dem Potential einer Einheitsladung am Punkt $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in G$ entspricht, das Potential einer Punktladung vom η -Fachen der Einheitsladung am Punkt $\mathbf{y}' := \mathbf{y} - 2\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{y}) = (y_1, y_2, -y_3)$, der also dem Bild von \mathbf{y} unter der Spiegelung an der Ebene ∂G entspricht, so liegt die addierte Ladung ϵ' außerhalb G und die Summe der ist wieder eine Green-Funktion für das Gebiet G und gegeben durch

$$G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = -4\pi \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \frac{\eta}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|} \right). \quad (4.71)$$

Da \mathbf{y}' das Spiegelbild von \mathbf{y} ist folgt geometrisch sofort, dass jeder Punkt der Ebene ∂G , also des “Spiegels”, gleich weit von \mathbf{y} und \mathbf{y}' entfernt ist. Wählt man also $\eta = -1$ so erfüllt (4.71) die Dirichlet-Randbedingung $G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \partial G$. Das kann man auch durch Symmetrieargumente einsehen: Da die Funktion $G_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$

(im Komplement der Punkte \mathbf{y}, \mathbf{y}' handelt es sich ja in der Tat um eine glatte Funktion) für $\eta = -1$ antisymmetrisch unter der Abbildung der Spiegelungen an der Ebene $x_3 = 0$ ist, muss die Funktion auf der Fixpunktmenge dieser Abbildung den Wert Null annehmen. Genauso leicht folgt aus Symmetriegründen, dass (4.71) für $\eta = 1$ den Neumann-Randbedingungen genügt, denn dann ist die Green-Funktion symmetrisch unter der Spiegelungsabbildung. Ihr Gradient auf der Fixpunktmenge muss also tangential zu dieser liegen.

Natürlich kann dieser Fall auf eine allgemeine Ebene E mit Normalenvektor \mathbf{n} im Abstand b vom Ursprung verallgemeinert werden:

$$E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - b = 0\}. \quad (4.72)$$

Die Spiegelung an der Ebene ist dann durch folgende Abbildung gegeben:

$$P_E : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' := P_E(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + 2b\mathbf{n}. \quad (4.73)$$

Man prüft leicht nach, dass $P_E|_E = id_E$ (d.h. jeder Punkt von E ist Fixpunkt), $\frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') = b$ (d.h. der Mittelpunkt der Verbindung zwischen x und x' liegt auf E), der Verbindungsvektor $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ ist parallel zu \mathbf{n} (folgt sofort aus (4.73)) und $P_E \circ P_E = id_{\mathbb{R}^3}$ (d.h. P_E ist selbstinvers, also eine Involution). Außerdem folgt $\partial x'_a / \partial x_b = R_{ab} := \delta_{ab} - 2n_a n_b$, was eine orthogonale Matrix ist. Ist ϕ eine Funktion und $\phi' := \phi \circ P_E$, dann folgt nach der Kettenregel $\nabla_b \phi' = R_{ab}(\nabla_a \phi) \circ P_E$ und somit wegen $R_{ab}R_{cb} = \delta_{ac}$

$$\Delta(\phi \circ P_E) = (\Delta\phi) \circ P_E. \quad (4.74)$$

Das bedeutet, dass die Anwendung der Ebenenspiegelung und die Anwendung des Laplace-Operators auf Funktionen vertauschen. Damit ist klar, dass P_E eine Symmetrie der Laplace-Gleichung ist.

4.3.6 Beispiele für Lösungen mit ebenen Rändern

In einfachen konkreten Anwendungen kann die Lösung des Problems oft sofort - oder zumindest nach wenigen Schritten - einfach hingeschrieben werden. Wir geben einige solcher einfachen Anwendungen, wobei wir uns immer eine Ladung der Stärke q am Ort $(0, 0, a)$ mit $a > 0$ im oberen Halbraum $x_3 > 0$ interessieren.

1. Die Ebene $x_3 = 0$ sei geerdet und auf konstantem Potential $\phi = 0$ gehalten. Letzteres wird durch eine Spiegelladung $-q$ am Punkt $(0, 0, -a)$ erreicht, wie wir bereits oben gesehen haben. Das Potential ist also gegeben durch

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - a\mathbf{e}_3\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} + a\mathbf{e}_3\|} \right). \quad (4.75)$$

Dieses ist gleichzeitig das $(-q/\varepsilon)$ -Fache der Green-Funktion zum Dirichlet-Problem für diesen Rand.

Die Normalenkomponente des \mathbf{D} -Feldes ist gleich der Flächenladungsdichte σ_f :

$$\sigma_f(x_1, x_2) := -\varepsilon \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \phi(\mathbf{x})|_{x_3=0} = -\frac{qa}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + a^2}} \right)^3. \quad (4.76)$$

Die gesamte Ladung der geerdeten Fläche ist

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 \sigma_f(x_1, x_2) = -qa \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = -q. \quad (4.77)$$

- Besteht der Rand $x_3 = 0$ nicht aus einem geerdeten Leiter sondern einen ungeladenen Isolator, dann ist als Randbedingung nicht das Verschwinden des Potentials sondern dessen Normalenableitung bei $x_3 = 0$ zu fordern. Das wird nun erreicht durch eine Spiegelladung $+q$ am Punkt $(0, 0, -a)$, wie ebenfalls bereits diskutiert. Das Potential ist also gegeben durch

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - a\mathbf{e}_3\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x} + a\mathbf{e}_3\|} \right). \quad (4.78)$$

das nun das $(-q/\varepsilon)$ -Fache des Neumann Problems für den gegebenen Rand ist. Man beachte, dass der Feldlinienverlauf des elektrischen Feldes zum Potential (4.78) nahe dem Rand ganz anders ist als für (4.75). Das gleiche Vorzeichen der Spiegelladung führt nämlich nun dazu, dass die Feldlinien in Gebiet $x_3 > 0$ von Rand $x_3 = 0$ abstoßen werden und nahe zu ihm nahezu parallel verlaufen. Auf den Rand sind die Feldlinien parallel zu ihm, was klar ist, denn unsere Randbedingung verschwindender Normalkomponente fordert ja genau das. Da folgende Beispiel wird die ersten beiden Fälle als Grenzsituationen mit enthalten. Aus ihm wird die Frage des Feldlinienverlaufs noch besser verständlich.

- Dieses Beispiel dient nicht dazu eine Green-Funktion zu bestimmen (wir kennen sie ja bereits für sowohl das Dirichlet als auch das Neumann Problem), sondern ein physikalisches Problem direkt zu lösen. Wir betrachten nun die Ebene $x_3 = 0$ als die Trennfläche zweier Gebiete 1 und 2, an denen zwei homogene und isotrope Medien der Permittivitäten ε_1 (Gebiet 1: $x_3 > 0$) und ε_2 (Gebiet 2: $x_3 < 0$) zusammenstoßen. Die Ladungsdichten seien überall Null, insbesondere sind also keine Flächenladungen auf der Grenzfläche vorhanden. Im Unterschied zum ersten und zweiten Beispiel

suchen wir nun eine Lösung der Laplace-Gleichung mit der Ladung q am Punkt $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_3$ in *ganzen* Raum, also auch für $x_3 < 0$. Im oberen Halbraum $x_3 > 0$ hat die Lösung die Form

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{q}{\|\mathbf{x} - a\mathbf{e}_3\|} + \frac{q_2}{\|\mathbf{x} + a\mathbf{e}_3\|} \right), \quad (x_3 > 0), \quad (4.79)$$

in der q_2 eine fiktive Ladung im Halbraum $x_3 < 0$ ist, also im Gebiet 2 liegt. Im unteren Halbraum darf die Lösung keine in diesem Halbraum gelegene Punktladung enthalten und hat deshalb die Form

$$\phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q_1}{\|\mathbf{x} - a\mathbf{e}_3\|}, \quad (x_3 < 0), \quad (4.80)$$

wo q_1 eine fiktive, nun im Gebiet 1 gelegene Punktladung ist. Wir schreiben hier ε_2 statt wie in (4.79) ε_1 in den Vorfaktor, weil das Feld eben im Gebiet 2 gilt, wo die Permittivität ε_2 ist.⁵ Diese Ladung dient wieder nur dazu, die Erfüllung der Randbedingungen bei gleichzeitiger Erfüllung der Laplace-Gleichung zu gewährleisten. Zu beachten ist, dass diese zwar am gleichen Ort wie die wirkliche Ladung q sitzt, i.a. aber eine von dieser verschiedene Ladung hat. Die zwei Werte für die Ladungen q_1 im oberen und q_2 im unteren Halbraum werden aus den zwei zu stellenden Randbedingungen folgen, die im vorliegenden Fall in (3.21a) zusammengefasst sind. Die erste Bedingung ist die der Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{E} . Wegen $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ bedeutet dies, dass ϕ an der Grenzfläche stetig sein muss; denn Gradienten der Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 müssen an der Grenzfläche $x_3 = 0$ gleiche Tangentialkomponenten ihrer Gradienten besitzen, können sich also auf der Grenzfläche nur um eine Konstante unterscheiden, die wir o.B.d.A Null setzen dürfen. Die zweite Bedingung ist die der Stetigkeit der Normalkomponente von \mathbf{D} , also von $\varepsilon\nabla\phi$ (und nicht etwa des Gradienten selbst, dessen Normalkomponente in der Tat unstetig sein werden).

Da jeder Punkt der Grenzfläche von den beiden Orten $\mathbf{x} = \pm a\mathbf{e}_3$ gleich weit entfernt ist, ergibt die erste Bedingung sofort

$$q + q_2 = q_1 (\varepsilon_1/\varepsilon_2). \quad (4.81)$$

Die zweite Bedingung ist äquivalent zu

$$\mathbf{e}_3 \cdot \left(\varepsilon_1 \nabla\phi_1 \Big|_{x_3 \rightarrow 0_+} - \varepsilon_2 \nabla\phi_2 \Big|_{x_3 \rightarrow 0_-} \right) = 0, \quad (4.82)$$

⁵Wir hätten hier auch ε_1 stehen lassen können. Dies tut etwa [?, § 19.6], was aber etwas inkonsequent ist, denn das Feld gilt ja im Gebiet 2, wo die Permittivität ε_2 ist und wo die Flussdichte $\mathbf{D}_2 = -\varepsilon_2 \nabla\phi_2$ die einer Punktladung der Stärke q_1 sein soll. Hätten wir ε_1 stehen lassen, so wäre – vom Gebiet 2. beurteilt – $\mathbf{D}_2 = -\varepsilon_2 \nabla\phi_2$ der Fluss eine Punktladung der Stärke $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)q_1$.

was mit (4.79) und (4.80) folgende einfache Relation ergibt

$$q - q_2 = q_1. \quad (4.83)$$

Zusammen ergeben (4.81) und (4.83) also

$$q_1 = q \frac{2(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)} \quad \text{und} \quad q_2 = q \frac{1 - (\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)}. \quad (4.84)$$

Man beachte, dass q_1 immer das gleiche Vorzeichen wie q besitzt, q_2 hingegen für $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Allgemein verläuft zwischen $0 < \varepsilon_2/\varepsilon_1 < \infty$ die Ladung q_1 streng monoton steigend⁶ zwischen 0 und $2q$ und q_2 streng monoton fallend zwischen q und $-q$. Im Extremfall $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ist $q_1 = 0$ und $q_2 = q$. Er entspricht unserem obigen 2. Beispiel in dem das Gebiet 2 wie ein Isolator wirkt in den die \mathbf{D} -Felder nicht eindringen können. Nahe der Grenzfläche verlaufen die \mathbf{D} Linien also nahezu tangential. Im entgegengesetzte Extremfall $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ist $q_1 = 2q$ und $q_2 = -q$. Er entspricht im Gebiet 1 unserem ersten Beispiel, in dem wir die Trennfläche $x_3 = 0$, oder den ganzen Halbraum $x_3 < 0$, als geerdeten Leiter angenommen hatten. Hier wird der gleiche Effekt durch die starke Polarisierung in diesem Gebiet erzielt

Wir betonen nochmals, dass die Spiegelladungen q_1 im Gebiet 1 ($x_3 > 0$) nur für die Lösung im Gebiet 2 ($x_3 < 0$) und q_2 im Gebiet 2 ($x_3 < 0$) nur für die Lösung im Gebiet 1 ($x_3 > 0$) hinzugedacht werden um dort die Randbedingungen zu erfüllen. Das von ihnen erzeugte Feld fasst die Wirkung Polarisierung der Dielektrika zusammen, deren Wirkung in den Gebieten 1 und 2 eben gerade so sind, *als ob* sich die genannten Punktladungen in den jeweils anderen Gebiet 2 bzw. 1 befänden. Keinesfalls darf man auf die Idee kommen, die Felder der Ladungen q_1 und q_2 auch in den Gebieten 1 und 2 für real zu halten. Das Feld im Gebiet 1 sieht demnach so aus wie die Superposition zweier Coulombfelder zu den Ladungen q und q_2 an den Orten $\pm a\mathbf{e}_3$ in einem Raum der *überall* mit einem Medium der Permittivität ε_1 erfüllt ist. Das Feld im Gebiet 2 sieht hingegen so aus wie das einer einzelnen Ladung q_1 in einem Raum der Permittivität ε_2 . Die Feldlinien im Gebiet 2 sind also immer gerade, entsprechend einem Coulomb-Feld einer einzigen Ladung, während die Feldlinien im Gebiet 1 gekrümmt sind entsprechend der Superposition zweier Coulomb-Felder zu den Ladungen q und q_2 . Nur im entarteten Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ verschwindet q_2 und die Feldlinien sind gerade. Haben q und q_2 das

⁶Hätten wir im Ansatz (4.80) für das Potential ϕ_2 in Gebiet 2 ε_1 statt ε_2 geschrieben, so würde in der ersten Gleichung (4.84) $q_1 = 2q/(1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1))$ stehen, was für $0 < \varepsilon_2/\varepsilon_1 < \infty$ streng monoton fallend von $2q$ nach Null fällt.

gleiche Vorzeichen, ist also $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, dann werden die Feldlinien in Gebiet 1 von der Grenze weggekrümmt (abgestoßen), während bei unterschiedlichem Vorzeichen, also $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, sie zur Grenzebene hin gekrümmt (angezogen) werden.

4.3.7 Methode der Spiegelladungen für sphärische Ränder

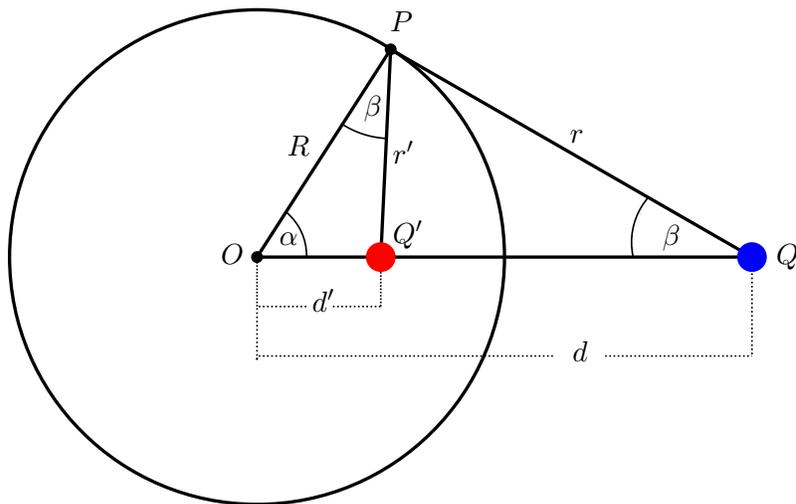


Abbildung 4.1: Inversionsabbildung an einer Sphäre vom Radius R mit Mittelpunkt O . Die Abstände d der Ladung Q (blau) und d' der Spiegelladung Q' (rot) vom Mittelpunkt genügen der Bedingung des geometrischen Mittels: $dd' = R^2$.

Wir diskutieren zuerst die geometrische Idee, die an Abbildung 4.1 erläutert sei. Zu sehen ist eine 2-Sphäre mit Radius R und Mittelpunkt O am Ursprung des Koordinatensystems im \mathbb{R}^3 . Eine Ladung Q (blauer Punkt), befindet sich außerhalb der Sphäre im Abstand d vom Ursprung. Eine zweite Ladung Q' wird auf der Verbindungslinie OQ im Abstand d' von O so angebracht, dass das geometrische Mittel der Abstände d' und d gerade der Radius R der Sphäre ist, also bei $d' = R^2/d$. Die so per „Inversion an der Sphäre“ gespiegelten Ladungen liegen also immer auf unterschiedlichen Seiten der Sphäre, wenn sie nicht auf der Sphäre selbst liegen. Für jeden Punkt P der Sphäre gilt dann, dass das Dreieck POQ' ähnlich ist zum Dreieck QOP , denn die den Winkel α einschließenden Seiten OP und OQ' bzw. OQ und OP haben das gleiche Längenverhältnis, nämlich $R/d' = d/R$. Dann ist aber auch das Längenverhältnis von $OP = R$ zu $PQ' = r'$ gleich dem von

$OQ = d$ zu $PQ = r$. Also ist das Verhältnis $r'/r = R/d$ für alle Punkte der Sphäre gleich. Äquivalent ausgedrückt ist $(1/r) - (R/d)(1/r') = 0$, was folgendes bedeutet: Wenn wir für die Ladung Q' das $(-R/d)$ -Fache der Ladung Q wählen, dann verschwindet ihr gemeinsames Potentiale auf der Sphäre.

Das fassen wir nun analytisch. Weil vieles von dem was nun folgt tatsächlich in allen Dimensionen $n \geq 2$ funktioniert, gönnen wir uns für einem Moment diese Verallgemeinerung. Im Rahmen dieser Vorlesung sind wir letztlich natürlich nur am Fall $n = 3$ interessiert.

Im euklidischen \mathbb{R}^n betrachten wir eine $(n - 1)$ -Sphäre vom Radius R und mit Mittelpunkt \mathbf{c} . Als "Inversion" an dieser Sphäre bezeichnet man die Abbildung

$$I_{(R,\mathbf{c})} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{c}\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{c}\},$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' := I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) := \frac{R^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}. \quad (4.85)$$

Aus dieser folgt sofort

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \cdot \|I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\| = R^2 \quad (4.86)$$

die gerade die Tatsache ausdrückt, dass R das geometrische Mittel ist der Abstände $d := \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$ und $d' := \|I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\|$ der Punkte \mathbf{x} und $I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x})$ vom Kugelmittelpunkt. Daraus folgt auch sofort, dass $I_{(R,\mathbf{c})}$ eine Involution ist, soll heißen, das zweimaliges Hintereinanderausführen der Abbildung liefert die Identität; denn

$$I_{(R,\mathbf{c})} \circ I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) = \frac{R^2}{\|I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\|^2} (I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}) + \mathbf{c}$$

$$= \frac{R^2}{\|I_{(R,\mathbf{c})}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\|^2} \frac{R^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \quad (4.87)$$

$$= (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = \mathbf{x},$$

wobei wir beim Übergang in die letzte Zeile (4.86) verwendet haben.

Die Jacobi-Matrix der Inversionsabbildung ist

$$J_{ab}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x'_a}{\partial x_b} = \frac{R^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2} (\delta_{ab} - 2n_a n_b), \quad (4.88a)$$

wo

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{c}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|}. \quad (4.88b)$$

Das bedeutet, dass die Inversion an Sphären *konforme Transformationen* sind, denn das infinitesimale Abstandsquadrat im euklidischen \mathbb{R}^n transformiert wie folgt

$$\begin{aligned}\delta_{ab} dx_a dx_b &\mapsto \delta_{ab} dx'_a dx'_b = \delta_{ab} \frac{\partial x'_a}{\partial x_c} \frac{\partial x'_b}{\partial x_d} dx_c dx_d \\ &= \left(\frac{R}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|} \right)^4 \delta_{cd} dx^c dx^d.\end{aligned}\quad (4.89)$$

Das folgt sofort aus der Bemerkung, dass der letzte Faktor in (4.88a), also die Matrix mit den Komponenten $(\delta_{ab} - 2n_a n_b)$, orthogonal ist (Spiegelung an der Ebene mit Normalen \mathbf{n}).

Mit $d_{\mathbf{y}}$ bezeichnen wir die nicht-negative Funktion im euklidischen \mathbb{R}^n , die jedem Punkt \mathbf{x} seinen euklidischen Abstand vom fest gewählten Punkt \mathbf{y} zuordnet. Es gilt also

$$d_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (4.90)$$

Daraus folgt sofort

$$\nabla d_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \mathbf{n}. \quad (4.91)$$

Ebenfalls durch direktes Nachrechnen überprüft man, dass sich die Abstandsfunktion $d_{\mathbf{y}}$ durch Komposition mit der Inversion – die wir in der folgenden Gleichung einfach I statt $I_{(R,\mathbf{c})}$ nennen, um die Gleichung nicht symbolisch zu überfrachten – wie folgt verhält:

$$d_{\mathbf{y}} \circ I = d_{\mathbf{y}}(\mathbf{c}) \cdot \frac{d_{I(\mathbf{y})}}{d_{\mathbf{c}}}. \quad (4.92)$$

In dieser Gleichung ist $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{c}\}$. Für $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{c}$ geht auf der rechten Seite $d_{\mathbf{c}}(\mathbf{y}) \rightarrow 0$ und der Abstand $d_{I(\mathbf{y})}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ für jedes \mathbf{x} . Die für $\mathbf{y} = \mathbf{c}$ gültige Formel kennen wir aber schon, denn (4.86) kann ohne Argument \mathbf{x} ja äquivalent geschrieben werden als

$$d_{\mathbf{c}} \circ I = \frac{R^2}{d_{\mathbf{c}}}. \quad (4.93)$$

Man beachte, dass (4.92) eine Gleichheit zwischen Funktionen ist, wobei auf der rechten Seite der Quotient der Funktionen $d_{I(\mathbf{y})}$ und $d_{\mathbf{c}}$ steht, der selbst wieder eine Funktion ist, multipliziert mit der Zahl $d_{\mathbf{y}}(\mathbf{c})$. Analoges gilt für (4.93).

Auf der Menge der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{c}\}$ (eventuell mit weiteren isolierten Singularitäten) definieren wir nun folgende Abbildung $J_{(R,\mathbf{c})}$:

$$J_{(R,\mathbf{c})}(f) := \left(\frac{R}{d_{\mathbf{c}}} \right)^{(n-2)} \cdot (f \circ I_{(R,\mathbf{c})}). \quad (4.94)$$

Aus (4.93) und der involutiven Eigenschaft von $I_{(R,c)}$ folgt, dass auch $J_{(R,c)}$ eine Involution ist, denn (wir lassen die Subskripte (R, c) an J und I hier wieder weg)

$$\begin{aligned} J \circ J(f) &:= \left(\frac{R}{d_c}\right)^{(n-2)} \cdot \left(\frac{R}{d_c \circ I}\right)^{(n-2)} \cdot (f \circ I \circ I) \\ &= \left(\frac{R^2}{d_c \cdot (d_c \circ I)}\right)^{(n-2)} \cdot (f \circ (I \circ I)) = f, \end{aligned} \quad (4.95)$$

wobei wir im letzten Schritt (4.93) und die Involutivität von I benutzt haben.

Von dieser Abbildung $J_{(R,c)}$ zeigt man durch Rechnung, dass sie bezüglich des Laplace-Operators $\Delta = \nabla_a \nabla_a$ folgender Relation genügt:

$$\Delta(J_{(R,c)}(f)) = \left(\frac{R}{d_c}\right)^4 \cdot J_{(R,c)}(\Delta f). \quad (4.96)$$

Diese impliziert, dass $J(f)$ die Laplace-Gleichung erfüllt sofern das auf f zutrifft. Wir erhalten also neue Lösungen zur Laplace Gleichung aus bereits bekannten durch Anwenden von $J_{(R,c)}$. Dass dies bei der Freiheit der Wahl der Parameter (R, c) und der Möglichkeit der beliebigen Komposition dieser Abbildungen zu einer kaum zu überblickenden Vielzahl neuer Lösungen aus bereits bekannten führt, überrascht nicht.

Als Beispiel betrachten wir für $n \geq 3$ einen "Pol" der Stärke A am Punkt \mathbf{a} :

$$P_{(A,\mathbf{a})} := \frac{A}{d_{\mathbf{a}}^{(n-2)}}, \quad (4.97)$$

also – nochmals konkret – die Funktion mit den Werten

$$P_{(A,\mathbf{a})}(\mathbf{x}) := \frac{A}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{n-2}}, \quad (4.98)$$

Dieser erfüllt die Laplace-Gleichung außerhalb des Punktes \mathbf{a} . (Für $n = 2$ hätte man eine logarithmische Abhängigkeit vom Abstand; was wir hier nicht eigens betrachten wollen.) Sie entsteht gemäß (4.94) aus der konstanten Funktion mit dem Wert Eins durch Anwenden von $J_{(R,c)}$ mit $R = A^{\frac{1}{n-2}}$ und $\mathbf{c} = \mathbf{a}$. Wenden wir darauf erneut $J_{(R,c)}$ mit einem anderen Paar (R, c) an, so folgt mit (4.92)

$$J_{(R,c)}(P_{(A,\mathbf{a})}) = P_{(A',\mathbf{a}')}, \quad (4.99a)$$

mit

$$A' = A \cdot \left(\frac{R}{\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|}\right)^{(n-2)} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}' = I_{(R,c)}(\mathbf{a}) \quad (4.99b)$$

Das Bild unter $J_{(R,c)}$ eines Pols der Stärke A am Punkt \mathbf{a} ist also wieder ein Pol, nun am Bildpunkt von \mathbf{a} unter der Inversion $I_{(R,c)}$, mit einer um den Faktor $R/\|\mathbf{a}-\mathbf{c}\|$ veränderten Stärke. Dieser Faktor ist < 1 falls der Ausgangspol bei \mathbf{a} außerhalb, und > 1 falls er innerhalb der der Sphäre liegt.

Nimmt man die Summe der Pole

$$\psi = P_{(A,\mathbf{a})} + P_{(A',\mathbf{a}')} = P_{(A,\mathbf{a})} + J_{(R,c)}\left(P_{(A,\mathbf{a})}\right) \quad (4.100)$$

so folgt aus der Involutivität von $J_{(R,c)}$ sofort die Invarianz von ψ unter $J_{(R,c)}$:

$$J_{(R,c)}(\psi) = \psi. \quad (4.101)$$

Statt mit Polen hätten wir dieses Verfahren des ‘‘Mittelns’’ auf jede jeder Lösung ϕ der Laplace Gleichung anwenden können, $\psi := \phi + J_{(R,c)}(\phi)$, und hätten eine unter J invariante Lösung der Laplace-Gleichung bekommen. Die Invarianz einer Funktion ψ unter J bedingt, dass ihre Normalenableitung auf der Sphäre $S_c^2(R)$ verschwindet. In Kontext der Elektrostatik bedeutet das, dass wir durch (4.100) die Green-Funktion für das Neumann-Problem sowohl im Innen- als auch im Außenbereich bekommen.

Tatsächlich

4.3.8 Beispiele für Lösungen mit sphärischen Rändern

Wie im Fall ebener Ränder kann auch hier die Lösung eines Problems oft einfach erraten werden. Wir geben wider einige solcher einfachen Anwendungen, wobei wir uns anfangs eine Ladung der Stärke q am Ort $d\mathbf{e}_3$ mit $d > 0$ außerhalb der Sphäre S_R^2 vom Radius R mit Mittelpunkt im Ursprung denken, wobei $d > R$, die Ladung also außerhalb der Sphäre liegt.

1. Die Sphäre sei geerdet, also auf konstantem Potential $\phi = 0$ gehalten. Dann ist nach den geometrischen Erklärungen im Zusammenhang mit Abbildung 4.1 sofort klar, dass diese Randbedingung erreicht wird durch eine Spiegelladung der Stärke $q' = -(R/d)q$ am Punkt $(R^2/d)\mathbf{e}_3$. Das den Randbedingungen genügende Potential ist also

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_3\|} - \frac{R/d}{\|\mathbf{x} - (R^2/d)\mathbf{e}_3\|} \right). \quad (4.102)$$

Dieses ist das $(-q/\varepsilon)$ -Fache der Green-Funktion $G_{d\mathbf{e}_3}$ zum Dirichlet-Problem für den Außenraum der Sphäre (mit Sphäre als Rand) und gleichzeitig das $(qR/\varepsilon d)$ -Fache der Green-Funktion $G_{(R^2/d)\mathbf{e}_3}$ zum Dirichlet-Problem für den Innenraum (mit Sphäre als Rand). Das elektrische Feld zu

(4.102) ist ausgewertet auf der Sphäre ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x})|_{S_R^2} &= -\nabla\phi(\mathbf{x})|_{S_R^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\mathbf{x} - d\mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_3\|^3} - \frac{R}{d} \frac{\mathbf{x} - (R^2/d)\mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x} - (R^2/d)\mathbf{e}_3\|^3} \right) \Big|_{S_R^2} \quad (4.103) \\
&= -\frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{d^2}{R^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_3\|^3} \Big|_{S_R^2}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir bereits ausgenutzt, dass auf der Inversionssphäre mit $r := \|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_3\|$ und $r' := \|\mathbf{x} - d'\mathbf{e}_3\|$, wo $d' = R^2/d$, gilt, dass $r/r' = d/R$, wie wir bereits in Zusammenhang mit Abbildung 4.1 gezeigt haben. Insbesondere sehen wir, dass das elektrische Feld auf der Sphäre radial zeigt, was von vornherein klar ist, da ϕ ja auf der Sphäre konstant ist. Die Oberflächenladungsdichte σ_f ist die Normalenkomponente von \mathbf{D} und somit gegeben durch ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$)

$$\sigma_f = \epsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}|_{S_R^2} = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{d^2}{R^2} - 1 \right) \frac{R}{[R^2 + d^2 - 2Rd(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)]^{3/2}}. \quad (4.104)$$

Das Integral dieser Ladungsdichte über S_R^2 ist elementar ausführbar wenn wir sphärische Polarkoordinaten mit Polachse in \mathbf{e}_3 -Richtung einführen. Die Integration können wir uns aber sparen, denn wir wissen über den Gauß'schen Satz was herauskommen muss (und auch tatsächlich herauskommt!), nämlich die von der Fläche S_R^2 eingeschlossene Ladung, und die ist $-qR/d$:

$$\int_{S_R^2} d\varphi d\theta \sin\theta R^2 \sigma_f = -qR/d. \quad (4.105)$$

2. Ist die Sphäre im vorherigen Beispiel zwar leitend aber nicht geerdet und als Ganzes ungeladen, so wird sie sich auch nicht aufladen wenn man die Ladung q in ihre Nähe bringt. Es muss also weiterhin gelten, dass das elektrische Feld normal auf ihrer Oberfläche steht (weil sie leitend ist), nur die Gesamtladung muss verschwinden. Das erreichen wir einfach dadurch, dass wir eine weitere Punktladung vom Betrag $+qR/d$ an ihren Mittelpunkt setzen. Deren Potential müssen wir dann einfach zu (4.102) addieren und erhalten

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - d\mathbf{e}_3\|} - \frac{R/d}{\|\mathbf{x} - (R^2/d)\mathbf{e}_3\|} + \frac{R/d}{\|\mathbf{x}\|} \right). \quad (4.106)$$

Der Zusatzterm leistet einen konstanten Beitrag Ladung/Oberfläche = $(qR/d)/(4\pi R^2)$ zur Oberflächenladung, die nun gegeben ist durch

$$\sigma_f(\mathbf{x}) = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{d^2}{R^2} - 1 \right) \frac{R}{[R^2 + d^2 - 2Rd(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)]^{3/2}} + \frac{q}{4\pi R d}, \quad (4.107)$$

wobei $\mathbf{x} = \mathbf{n}R$. Dadurch erhält die Kugel ein Dipolmoment was man in der üblichen Weise berechnen kann, indem man sphärische Polarkoordinaten mit Polachse in \mathbf{e}_3 Richtung wählt. Die zu \mathbf{e}_3 orthogonalen Komponenten verschwinden dann (wegen der φ Integration) und es bleibt nur eine elementar auszuführende Integration über θ . Es ergibt sich mit $\omega = \cos \theta$,

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \int_{S_R^2} \mathbf{x} \sigma_f(\mathbf{x}) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \mathbf{e}_3 R^3 2\pi \int_{-1}^1 d\omega \omega \sigma_f(\omega) \\ &= \left(-q \frac{R}{d} \right) \frac{R^2}{d} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.108)$$

3. Eine interessante Grenzsituation entsteht aus dem vorherigen Fall wenn man die Ladung q außerhalb der Sphäre entlang der durch \mathbf{e}_3 erzeugten Geraden ins Unendliche rückt und dabei gleichzeitig die Ladung proportional zum Quadrat des Abstandes d so anwachsen lässt, dass $E_0 = q/(4\pi\epsilon d^2)$ konstant bleibt. Dann geht das Feld der Ladung asymptotisch in ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E} = -E_0 \mathbf{e}_3$ über. Die Spiegelladung $q' = -qR/d$ wird dann zu $q' = -4\pi\epsilon R d E_0$ und das Dipolmoment (4.108) hat den endlichen Grenzwert

$$\mathbf{d} = 4\pi\epsilon R^3 \mathbf{E} \quad (4.109)$$

Diesen Wert erhält man auch für ein Thomson'sches Atom in einem konstanten elektrischen Feld.

4.3.9 Das Konzept der Kapazität

Wir betrachten eine endliche Menge leitender geladener Körper K_a , $a \in \{1, \dots, n\}$, die im Raum jeweils die Gebiete $G_a \subset \mathbb{R}^3$ mit zumindest stückweise glatten Rand ∂G_a einnehmen. Da die Körper leitend sind, nimmt das Potential ϕ auf und in ihnen einen konstanten Wert ϕ_a an. Das elektrische Feld verschwindet. Die Ladungen dieser Körper seien Q_a , wobei die Gesamtladung aller Körper verschwindet: $Q := \sum_{a=1}^n Q_a = 0$. Das bedeutet, dass das Potential der gesamten

Ladungsverteilung gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dv' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} + \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} + O(1/r^3) \right),\end{aligned}\quad (4.110)$$

wobei hier \mathbf{x}' ein Punkt bezeichnet, um den herum man die asymptotische Entwicklung formuliert und $O(r^{-3})$ Terme bezeichnet die wie oder schneller als r^{-3} abfallen (vgl. Abschnitt 8.1). Wichtig für uns ist, dass wenn $Q = 0$ das Potential asymptotisch wie r^{-2} und das elektrische Feld wie r^{-3} abfällt.

Wir zeige nun, dass das Potential im Bereich

$$G := \mathbb{R}^3 - \bigcup_{a=1}^n G_a. \quad (4.111)$$

durch folgende vier Annahmen eindeutig bestimmt ist:

1. Das Potential genügt der Poisson Gleichung

$$\Delta\phi = -\rho/\epsilon \quad \text{in } G; \quad (4.112a)$$

2. die Ladungen

$$-\epsilon \int_{\partial G_a} d\mathbf{f} \cdot \nabla\phi = Q_a \quad (4.112b)$$

sind vorgegeben;

3. die Randwerte

$$\phi_a := \phi|_{\partial G_a} \quad (4.112c)$$

sind konstant (aber nicht vorgegeben) und die Gesamtladung verschwindet:

$$Q := \sum_{a=1}^n Q_a = 0. \quad (4.112d)$$

Der Beweis ist ein typischer Widerspruchsbeweis: Angenommen es gibt zwei Lösungen $\phi^{(1)}$ und $\phi^{(2)}$, die beide den Bedingungen 1.-4. genügen, bei gegebenen ρ und Q_a , aber möglicherweise verschiedenen konstanten Randwerten $\phi_a^{(1)}$ und $\phi_a^{(2)}$. Dann betrachten wir die Differenz $\phi^{(3)} := \phi^{(1)} - \phi^{(2)}$. Diese genügt

$$\Delta\phi^{(3)} = 0 \quad \text{in } G, \quad (4.113a)$$

$$\int_{\partial G_a} d\mathbf{f} \cdot \nabla \phi_3 = 0, \quad (4.113b)$$

$$\phi_a^{(3)} := \phi^{(3)}|_{\partial G_a} = \text{konst.}, \quad (4.113c)$$

und

$$\phi^{(3)}(\mathbf{x}) \leq r^{-3} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.113d)$$

Wir betrachten das Vektorfeld $\phi^{(3)} \nabla \phi^{(3)}$ und integrieren seine Divergenz über G unter Benutzung des Gauß'schen Satzes

$$\begin{aligned} \int_G dv \nabla \cdot (\phi^{(3)} \nabla \phi^{(3)}) &= \int_G dv \|\nabla \phi^{(3)}\|^2 + \int_G dv \phi^{(3)} \Delta \phi^{(3)} \\ &= - \sum_{a=1}^n \int_{\partial G_a} d\mathbf{f} \phi^{(3)} \nabla \phi^{(3)} \\ &= - \sum_{a=1}^n \phi_a^{(3)} \int_{\partial G_a} d\mathbf{f} \nabla \phi^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Dabei tritt das Minuszeichen ab der 2. Zeile auf der rechten Seite auf, weil der Rand ∂G_a mit nach außen (also in G hinein) zeigender Normale orientiert ist. Bei Anwendung des Gauß'schen Satzes auf die Integration über G werden aber die Randkomponenten mit der aus G heraus zeigender, also in die G_a hinein zeigenden Normalen genommen. Außerdem haben wir kein Randintegral "im Unendlichen" bekommen, weil das Abfallverhalten von $\phi^{(3)}$ so ist, dass $\phi^{(3)} \nabla \phi^{(3)}$ auf jeden Fall schneller als r^{-3} abfällt während die Oberfläche nur wie r^2 zunimmt. Beim vorletzten Schritt haben wir $\phi^{(3)}$ wegen (4.113c) aus dem Integral herausziehen können und im letzten Schritt haben wir (4.113b) benutzt. Verwenden wir nun (4.113a), dann folgt

$$\int_G dv \|\nabla \phi^{(3)}\|^2 = 0. \quad (4.115)$$

und da der Integrand nicht negativ und stetig ist: $\phi^{(3)} = \text{konst.}$ Unter den Bedingungen (4.113) ist also ϕ bis auf eine Konstante und das elektrische Feld eindeutig bestimmt.

Sei nun ϕ eine solche – bis auf eine Konstante – eindeutige Lösung die den Bedingungen (4.112) genügt. Dann existieren $\frac{1}{2}n(n-1)$ Zahlen

$$U_{ab} = \int_{K_{ab}} d\mathbf{k} \cdot \nabla \phi = \phi_a - \phi_b. \quad (4.116)$$

wo K_{ab} irgend eine Kurve ist die auf dem Körper K_b beginnt und auf dem Körper K_a endet. Die Zahlen U_{ab} hängen nur von den Ladungen Q_a der Körper

und der eventuell vorhandenen Ladungsverteilung ρ zwischen ihnen ab, nicht aber davon, welche Kurven K_{ab} man wählt um sie zu verbinden. Die antisymmetrische Matrix U_{ab} kodiert die Potentialdifferenzen zwischen den Körpern.

Wir spezialisieren nun auf den Fall verschwindender Ladungsdichte ρ im Außenbereich der Körper. Dann erfüllt ϕ wegen (4.112a) die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ in G . Würde man nur eine Einheitsladung auf den Körper K_a bringen und alle andern ungeladen lassen, so wäre das davon erzeugte Potential $\hat{\phi}_a$. Dieses erfüllt

$$-\varepsilon \int_{\partial G_b} d\mathbf{f} \cdot \nabla \hat{\phi}_a = \delta_{ab}. \quad (4.117)$$

Eine solche ‘‘Einheitsladungslösung’’ erstellen wir für jeden Körper K_a , $a = 1, \dots, n$. Wegen der Linearität der Laplace-Gleichung ist dann die allgemeine Lösung, die jedem Körper K_a die Ladung Q_a zuweist, gegeben durch

$$\phi = \sum_{a=1}^n Q_a \hat{\phi}_a. \quad (4.118)$$

Denn diese erfüllt wieder die Laplace-Gleichung, gibt wegen (4.117) jedem Körper K_a die Ladung Q_a und ist auf jedem Körper konstant; letzteres weil dies für jede der ‘‘Einheitsladungslösungen’’ $\hat{\phi}_a$ gilt. Genauer: Bezeichnen wir mit ϕ_{ab} den Wert, den $\hat{\phi}_b$ auf K_a annimmt, also

$$\phi_{ab} := \hat{\phi}_b|_{\partial G_a}, \quad (4.119)$$

dann ist der Wert ϕ_a , den die Superpositionslösung (4.118) auf K_a annimmt, gegeben durch

$$\phi_a = \sum_{b=1}^n \phi_{ab} Q_b. \quad (4.120)$$

Man nennt die $n \times n$ Größen ϕ_{ab} die *Potentialkoeffizienten* des Systems der Körper K_1, \dots, K_n . Da die Ladungen Q_a die Lösungen eindeutig bestimmen und umgekehrt die Ladungen durch die Lösung bestimmt ist, ist die Matrix der Kapazitätskoeffizienten invertierbar. Die Inverse Matrix habe die Einträge C_{ab} , dann gilt

$$Q_a = \sum_{b=1}^n C_{ab} \phi_b. \quad (4.121)$$

Die C_{ab} heißen *Kapazitätskoeffizienten*.

Die Matrizen der Potential- und Kapazitätskoeffizienten sind symmetrisch und positiv definit. Wir beweisen zuerst die Symmetrie $\phi_{ab} = \phi_{ba}$, aus der die Symmetrie der Inversen, also $C_{ab} = C_{ba}$, dann natürlich folgt. Dazu benutzen wir die

2. Green'sche Identität (8.47) für die Funktionen $\hat{\phi}_a$ und $\hat{\phi}_b$ für das Gebiet G :

$$\int_G dv (\hat{\phi}_a \Delta \hat{\phi}_b - \hat{\phi}_b \Delta \hat{\phi}_a) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (\hat{\phi}_a \nabla \hat{\phi}_b - \hat{\phi}_b \nabla \hat{\phi}_a). \quad (4.122)$$

Die linke Seite verschwindet, da in G beide Funktionen die Laplace-Gleichung erfüllen. Die rechte Seite zerfällt in die Summe über die n Randkomponenten ∂G_c , die also Null ergeben muss (keine Summenkonvention hier):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{c=1}^n \int_{\partial G_c} d\mathbf{f} \cdot (\hat{\phi}_a \nabla \hat{\phi}_b - \hat{\phi}_b \nabla \hat{\phi}_a) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{c=1}^n (\phi_{ac} \delta_{cb} - \phi_{bc} \delta_{ca}) = -\frac{1}{\varepsilon} (\phi_{ab} - \phi_{ba}). \end{aligned} \quad (4.123)$$

Dabei haben wir beim Übergang von der ersten in die zweite Zeile sowohl (4.117) als auch (4.119) benutzt. Damit ist die Symmetrie bewiesen. Die Positiv-Definitheit folgt aus dem Energieausdruck, den wir jetzt ableiten.

Da die Körper K_a Leiter sind, verschwindet das elektrische Feld innerhalb jedes Gebiets G_a (im stationären Fall). Die Gesamtenergie des elektrischen Feldes ist nach (4.25) das Integral von $\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ über den ganzen Raum. Weil aber \mathbf{E} innerhalb der Körper verschwindet, reicht es aus, das Integral über das Komplement G der Körper zu erstrecken (siehe (4.111)). Dort ist $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. Also ist die elektrische Gesamtenergie E_{el} des Systems gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{\varepsilon}{2} \int_G dv \nabla \phi \cdot \nabla \phi = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial G_a} d\mathbf{f} \cdot \phi \nabla \phi - \frac{\varepsilon}{2} \int_G dv \phi \Delta \phi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \phi_a Q_a. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Dabei haben wir im ersten Schritt eine partielle Integration vorgenommen und den Gauß'schen Satz angewendet mit den in die Gebiete G_a hineinzeigenden Normalen von ∂G_a (deshalb das erste Minuszeichen). Im Zweiten Schritt haben wir ausgenutzt, dass ϕ auf ∂G_a konstant und gleich ϕ_a ist, so dass es vor das Integral gezogen werden kann, dass gemäß (4.112b) das verbleibende Oberflächenintegral gerade die Ladung Q_a ergibt und letztlich, dass ϕ die Laplace Gleichung erfüllt. Mit (4.120) und (4.121) wird daraus

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n \phi_{ab} Q_a Q_b = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n C_{ab} \phi_a \phi_b. \quad (4.125)$$

Da die Energie gleich ist dem Integral über den nicht-negativen Integranden $\varepsilon \|E\|^2/2$, kann die Energie nur den Wert Null annehmen wenn der Integrand identisch Null ist (als mindestens stetige Funktion). Also ist die Energie echt positiv für jedes nicht identisch verschwindende Feld, was immer die beliebig vorgebbaren Ladungen Q_a auch sein mögen. Also muss die Bilinearform in (4.125) in den Q_a positiv definit sein. Das gleiche folgt dann automatisch für die Inverse. Eine jede Anordnung von n leitenden Körpern definiert somit eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n der Ladungs- n -Tupel (Q_1, \dots, Q_n) .

4.4 Magnetostatik

Wir idealisieren die Stromdichte \mathbf{J} auf einen unendlich dünnen Draht. Die über den Querschnitt integrierte Stromdichte ergibt den Strom, I , also die durch den Draht pro Zeiteinheit transportierte Ladungsmenge.

Mathematisch repräsentiert man den Draht durch eine einzelne Raumkurve $\lambda \mapsto \mathbf{k}(\lambda)$. So wie man einem einzelnen punktförmigen Teilchen eine ‐Ladungsdichte‐ in Form einer Distribution zuordnet, kann man auch einem fadenförmigen Draht eine distributive Stromdichte zuordnen. Das ist nützlich, weil man diese dann in die allgemeinen Ausdrücke (4.13) und (4.15) einsetzen kann und damit sofort analytische Ausdrücke für das Vektorpotential bzw. Magnetfeld erhält, ganz analog zum Vorgehen in der Elektrostatik.

4.4.1 Stromkurven und das Biot-Savartsche Gesetz

Um den distributiven Ausdruck für die Stromdichte zu bekommen, denken wir uns die Kurve in kurze Stücke zerlegt, in denen jeweils eine Längenladungsdichte dq/ds (Ladung/Länge; hier bezeichnet ds das Längenintervall) mit der Geschwindigkeit ds/dt in Richtung des Einheits-Tangentenvektors $\mathbf{k}'/\|\mathbf{k}'\|$ strömt. Nun ist die Stromdichte, die von bewegten Ladungen herrührt (konvektiver Strom), immer durch das Produkt der Ladungsdichte mit der Strömungsgeschwindigkeit gegeben, so wie in (2.6b) für den Fall einer einzelnen Ladung bereits angegeben. Summiert (d.h. integriert) man dies für alle Ladungsstücke entlang des Drahtes auf, so erhält

man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(x) &= \int dq \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}(\lambda)) \mathbf{v}(\mathbf{k}(\lambda)) \\
 &= \int ds \frac{dq}{ds} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}(\lambda)) \frac{ds}{dt} \frac{\mathbf{k}'}{\|\mathbf{k}'\|} \\
 &= I \int d\mathbf{k} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}) .
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

Hier ist *der Strom*

$$I := \frac{dq}{dt} . \tag{4.127}$$

wegen der Ladungserhaltung entlang der Kurve (also an jede Stelle des Drahtes) konstant und konnte deshalb vor das Integral geschrieben werden. Außerdem haben wir benutzt, dass das Eigenlängenintervall ds mit dem Parameterintervall $d\lambda$ verbunden ist durch $ds = \|\mathbf{k}'(\lambda)\| d\lambda$ und am Ende wieder $\mathbf{k}' d\lambda = d\mathbf{k}$ geschrieben; siehe Abschnitt 8.2.

Mit diesem Ausdruck für die Stromdichte berechnen wir gemäß (4.13) und (4.15) das Vektorpotemntial \mathbf{A} und das Magnetfeld \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_K d\mathbf{k} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{k})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_K \frac{d\mathbf{k}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{k}\|}
 \end{aligned} \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_K d\mathbf{k} \times \int_{\mathbb{R}^3} dv' \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{k}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_K \frac{d\mathbf{k} \times (\mathbf{x} - \mathbf{k})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{k}\|^3}
 \end{aligned} \tag{4.129}$$

Man bezeichnet (4.129) als das *Biot-Savart'sche Gesetz*.⁷ Es stellt die Felder am Punkt \mathbf{x} als Integral von Beiträgen entlang des Drahtes dar, so als ob jedes Drahtstück für sich genommen ein Eigenes Magnetfeld erzeugte, vergleichbar dem

⁷Nach Jean-Baptiste Biot (1774-1862) und Félix Savart (1791-1841).

Coulomb'schen Gesetz (4.17b) für mehrere Punkteilchen, das einfach einer Superposition der einzelnen Coulomb-Felder entspricht. In dieser Analogie ist der vom Drahtstück im Intervall $[\mathbf{k}, \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}]$ erzeugte Anteil des Magnetfelds $\delta\mathbf{B}(\mathbf{x})$ gegeben durch

$$\delta\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu I}{4\pi} \delta\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{k}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{k}\|^3}. \quad (4.130)$$

4.4.2 Nochmal Ladungserhaltung

Diese obige Analogie ist allerdings nicht ganz überzeugend, weil wir zur Ableitung des Biot-Savart'schen Gesetzen benutzt haben, dass der Strom dem Erhaltungsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ genügt. Das ist für eine Stromdichte der Form (4.126) nur der Fall, wenn die Kurve K entweder geschlossen ist oder an beiden Enden nach Unendlich läuft (soll heißen: jedes beschränkte Gebiet verlässt). Das sieht man so: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ bedeutet für ein distributives \mathbf{J} , dass das Integral

$$X = \int dv f(\mathbf{x}) \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (4.131)$$

für jede Testfunktion (kompakter Träger) verschwindet. Mit einem \mathbf{J} der Form (4.126) bekommt man so

$$\begin{aligned} X &= I \int_{\mathbb{R}^3} dv f(\mathbf{x}) \int_K d\mathbf{k} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_K d\mathbf{k} \cdot \nabla f(x) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \\ &= -I \int_K d\mathbf{k} \cdot \nabla f(\mathbf{k}) = -I(f(\mathbf{k}_2) - f(\mathbf{k}_1)). \end{aligned} \quad (4.132)$$

Dabei sind \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 der Anfangs- und Endpunkt der Kurve K . Für jedes f bekommen wir nur dann Null, wenn $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ (geschlossene Kurve) oder wenn K jeden kompakten Träger an beiden Enden verlässt.

In diesem Sinne ist also (4.130) keine lokale Version von (4.129), denn (4.130) entspricht nicht für sich genommen dem \mathbf{B} -Feld eines möglichen Stromes (dessen Divergenzfreiheit ja durch die Maxwell-Gleichungen gefordert ist).

4.4.3 Kräfte zwischen Strömen

Wie im Fall der Elektrostatik wollen wir auch die Kräfte zwischen den elementaren Quellen der Magnetfelder berechnen. Das ist hier viel komplizierter, weil diese elementaren Quellen ausgedehnte Objekte und keine Punkte sind. Trotzdem lässt sich

eine relativ einfache Formel ableiten. Dazu erinnern wir uns an die Lorentz'sche Formel für die Kraftdichte (2.5) im Fall eines reinen Magnetfeldes:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (4.133)$$

Wir betrachten nun die Situation zweier Ströme der Form (4.126): Der eine, I_2 , erzeugt ein Magnetfeld \mathbf{B}_2 das auf den anderen, I_1 , einwirkt und so auf ihn eine Gesamtkraft \mathbf{F}_{12} ausübt. Diese können wir durch Integration der Kraftdichte (4.133) ermitteln, wenn wir für \mathbf{J} die Stromdichte von I_1 und für das Magnetfeld den Biot-Savart-Ausdruck für I_2 einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv \int_{K_1} d\mathbf{k}_1 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}_1) \times \int_{K_2} d\mathbf{k}_2 \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{k}_2)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{k}_2\|^3} \\ &= \frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \int_{K_1} \int_{K_2} d\mathbf{k}_1 \times \left(d\mathbf{k}_2 \times \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|^3} \right) \end{aligned} \quad (4.134)$$

Hier mussten wir die Klammer setzen weil das dreifache vektorielle Produkt nicht assoziativ ist. Deshalb tauchen die beiden Integrationen über die Kurven K_1 und K_2 auch noch nicht in symmetrischer Form auf, was wir aber jetzt ändern. Nach der $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ Regel bekommen wir, wenn wir mit dem zweiten Term zuerst starten

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= -\frac{\mu I_1 I_2}{4\pi} \left[\int_{K_1} \int_{K_2} d\mathbf{k}_1 \cdot d\mathbf{k}_2 \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|^3} \right. \\ &\quad \left. - \int_{K_2} d\mathbf{k}_2 \int_{K_1} d\mathbf{k}_1 \cdot \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Betrachten wir das letzte auftretende Integral über $d\mathbf{k}_1$. Ausgeschrieben in einer konkreten Parametrisierung $\lambda \mapsto \mathbf{k}_1(\lambda)$ ist dieses wie folgt definiert (siehe Mathematischen Anhang)

$$\begin{aligned} \int_{K_1} d\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)}{\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|^3} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d\mathbf{k}_1}{d\lambda} \frac{(\mathbf{k}_1(\lambda) - \mathbf{k}_2)}{\|\mathbf{k}_1(\lambda) - \mathbf{k}_2\|^3} \\ &= - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\|\mathbf{k}_1(\lambda) - \mathbf{k}_2\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{k}_1(\lambda_1) - \mathbf{k}_2\|} - \frac{1}{\|\mathbf{k}_1(\lambda_2) - \mathbf{k}_2\|} \end{aligned} \quad (4.136)$$

Ist die Kurve K_1 geschlossen, was den meisten physikalischen Anwendungen entsprechen dürfte, dann $\mathbf{k}_1(\lambda_1) = \mathbf{k}_1(\lambda_2)$ und das zweite Integral verschwindet. Ist

die Kurve K_1 nicht geschlossen läuft aber mit beiden Enden ins Unendliche, so dass für $\lambda_{1,2} \rightarrow \pm\infty$ der Abstand der Punkte $\mathbf{k}_1(\lambda_{1,2})$ unbeschränkt ist, dann verschwinden die inversen Abstände zu jedem Punkt auf der Kurve K_2 und damit das Integral (4.138). Da bleibt richtig, wenn auch die zweite Kurve nicht geschlossen ist und an beiden Enden ins Unendliche läuft. Dann kann es (muss aber nicht) passieren, dass das Integral über die Zweite Kurve nicht mehr konvergiert

Für geschlossene Leiter, sogenannte *Leiterschleifen*, oder beidseitig ins Unendliche sich fortsetzende Leiter gilt also folgende Gleichung für die Kraft:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \int_{K_1} \int_{K_2} d\mathbf{k}_1 \cdot d\mathbf{k}_2 \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{\|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|^3}. \quad (4.137)$$

In diese Formel gehen nun beide Ströme in symmetrischer Weise ein und man sieht sofort, dass "Actio = Reactio" erfüllt ist: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Außerdem ist sofort ersichtlich, dass bei parallelen Strömen ($d\mathbf{k}_1 \cdot d\mathbf{k}_2 > 0$) die Kraft auf die erste Stromschleife in Richtung der zweiten wirkt, also anziehend, bei antiparallelen Strömen ($d\mathbf{k}_1 \cdot d\mathbf{k}_2 < 0$) hingegen wirkt sie abstoßend.

4.4.4 Beispiel: Kräfte zwischen parallelen Drähten

Als einfaches Beispiel betrachten wir zwei parallele Drähte im Abstand d , die durch folgende Kurven beschrieben seien:

$$\mathbf{k}_1(\lambda_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{k}_1 = \mathbf{e}_3 d\lambda_1, \quad (4.138a)$$

$$\mathbf{k}_2(\lambda_2) = d \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{k}_2 = \mathbf{e}_3 d\lambda_2. \quad (4.138b)$$

$$(4.138c)$$

Der erste läuft also genau auf der 3-Achse, der andere dazu parallel im Abstand d in 1-Richtung verschoben. Eingesetzt in die Kraftgleichung folgt mit $d\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}'_2 d\lambda_1 d\lambda_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 d\lambda_1 d\lambda_2 = d\lambda_1 d\lambda_2$:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_3 - d\mathbf{e}_1}{[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + d^2]^{3/2}}. \quad (4.139)$$

Wir führen zuerst das Integral über λ_2 aus in dem wir setzen die neue Variable $w := (\lambda_1 - \lambda_2)/d$ benutzen. Dann wird daraus

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_3 - d\mathbf{e}_1}{[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + d^2]^{3/2}} &= \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{w\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1}{[w^2 + 1]^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{d} \mathbf{e}_1 \frac{w}{\sqrt{w^2 + 1}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= -\frac{2}{d} \mathbf{e}_1.
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt gleich verwendet, dass das erste Integral proportional zu \mathbf{e}_3 verschwindet, weil der Integrand eine ungerade Funktion von w ist und das Integrationsgebiet symmetrisch um $w = 0$ liegt (es wäre auch sehr leicht gewesen, das Integral direkt auszuführen). Man beachte, dass das Ergebnis von λ_1 unabhängig ist. Eingesetzt in (4.139) ergibt sich

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \mathbf{e}_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \tag{4.141}$$

Auf jedes Längenstück wirkt also die gleiche anziehende Kraft proportional zur Länge, die natürlich integriert über die gesamte Länge des ersten Drahtes divergieren würde. Beachte, dass wegen $ds = \|\mathbf{k}'_1(\lambda_1)\| d\lambda_1 = d\lambda_1$ die Eigenlänge s entlang der Kurve K_1 proportional zu λ_1 ist. Statt der (unendlichen) Gesamtkraft können wir aber die Kraft pro Eigenlänge berechnen und die ist einfach gegeben durch den Term vor dem Integral:

$$\frac{d\mathbf{F}_{12}}{ds} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \mathbf{e}_1. \tag{4.142}$$

4.4.5 Die Energie von Stromverteilungen

Einen Ausdruck für die im magnetischen Feld gespeicherte Energie haben wir bisher nicht abgeleitet. In der Elektrostatik gelang uns dies in Abschnitt 4.3.1 mit Hilfe mechanischer Argumente, nachdem die Kraftwirkungen auf Punktladungen bestimmt wurde. Dieses Vorgehen ist mangels magnetischer Punktladungen in der Magnetostatik nicht so einfach möglich; allenfalls könnte man daran denken, statt Punktteilchen Dipole oder einfache Stromsysteme zu nehmen. Das wollen wir hier aber nicht tun sondern im Vorgriff auf ein späteres Kapitel gleich den einfachen Ausdruck angeben, der die Energiedichte des magnetischen Feldes angibt und das magnetische Analogon zu (4.25) darstellt:

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \tag{4.143}$$

Dieser ist gültig in linearen und homogenen, nicht aber notwendig isotropen Medien. Die Verbindung zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} kann also von der allgemein-linearen Form (1.7b) sein, in der \mathbf{B} nicht parallel zu \mathbf{H} sein muss. Hier beschränken wir uns allerdings der Einfachheit halber auf das Vakuum, in dem wir (4.143) auf solche Magnetfelder anwenden wollen, die von räumlich lokalisierten Stromverteilungen erzeugt werden. Dann wird

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2, \quad (4.144)$$

und die Gesamtenergie erhalten wir durch Integration über den ganzen Raum. Es ist $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und es gilt die Identität

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (4.145)$$

Für Stromverteilungen, die im Endlichen konzentriert sind, also kompakten Träger haben, wissen wir aus (4.13) und (4.15), dass \mathbf{A} im Unendlichen wie $1/r$ und \mathbf{B} wie $1/r^2$ abfällt, ihr Produkt also wie $1/r^3$. Damit trägt der 2. Term in (4.145) im Raumintegral nichts bei, denn er kann mit Hilfe des Gauß'schen Satzes in ein Oberflächenintegral über die Sphäre "im Unendlichen" umgewandelt werden, dessen Integrand wie $1/r^3$ abfällt, also eine Potenz schneller als die Fläche anwächst. Im verbleibenden 1. Term ersetzen wir $\nabla \times \mathbf{B}$ durch $\mu_0 \mathbf{J}$ und erhalten

$$E_{\text{mag}} = \int_{\mathbb{R}^3} dv W_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_G dv \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (4.146)$$

Das ist die zu (4.24b) analoge Formel. Wichtig ist hier wie dort, nicht den Faktor $1/2$ zu übersehen, und dass das Integral nur über den Träger G der Quelle \mathbf{J} erstreckt zu werden braucht. Genau wie im elektrostatischen Fall können wir nun erneut die Lösung Poisson-Gleichung benutzen, hier also (4.13), um das Feld \mathbf{A} zu eliminieren und die Energie als bilineares Funktional der Quellen zu schreiben, analog zu (4.24a):

$$E_{\text{mag}} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_G dv \int_G dv' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.147)$$

Genau wie im elektrostatischen Fall existieren in dieser Form für reguläre Quellendichten keine Divergenzen der Integrale bei $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, wie man etwa sieht, wenn man für die \mathbf{x} -Integration sphärische Polarkoordinaten um den Punkt \mathbf{x}' verwendet, so dass $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ und $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = r$. Ist dann \mathbf{J} eine in G beschränkte Funktion, konvergiert das Integral bei $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ wie $\int dr r \propto r^2$.

Stellen wir uns n stromführende Drähte vor die, allerdings jeweils einen endlichen Querschnitt besitzen, so dass deren jeweilige Stromdichte überall regulär ist. Die

gesamte Stromdichte \mathbf{J} zerfällt dann in die Summe von n Teilströmen \mathbf{J}_a , mit $a \in \{1, \dots, n\}$, deren Träger $G_a := \text{supp}(\mathbf{J}_a)$ untereinander schnittfremd (disjunkt) sind und die jede für sich die Erhaltungsgleichung erfüllen:

$$\mathbf{J} = \sum_{a=1}^n \mathbf{J}_a, \quad \text{mit } G_a \cap G_b = \emptyset \quad \text{für } a \neq b, \quad (4.148)$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_a = 0, \quad \text{für alle } a \quad (4.149)$$

Die letzten Gleichungen besagen, dass jeder der Stromdichten \mathbf{J}_a konstante Ströme in ihren jeweiligen Stromröhren (Trägergebieten) besitzen und man so

$$\mathbf{J}_a = I_a \mathbf{j}_a \quad (\text{keine Summation über } a). \quad (4.150)$$

Dabei sind I_a die (konstanten!) Flüsse der Vektorfelder \mathbf{J}_a durch *jede* die Flussröhre transversal schneidende 2-dimensionale Fläche. Setzt man dies in den Ausdruck (4.147) für die gesamte magnetische Energie ein, so folgt

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^n L_{ab} I_a I_b, \quad (4.151a)$$

mit

$$L_{ab} := \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{G_a} dv \int_{G_b} dv' \frac{\mathbf{j}_a(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}_b(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.151b)$$

Die Koeffizienten L_{ab} nennt man *Induktionskoeffizienten* und die von ihnen gebildete Matrix die *Induktionsmatrix*. Sie ist, wie man aus (4.151b) sofort sieht, symmetrisch und tatsächlich auch positiv definit: denn der in den I_a bilineare Ausdruck ist ja gemäß Ableitung gleich dem Integral des nicht negativen Integranden. Also ist (4.151) für jede Wahl der I_a positiv, außer im Fall $I_a = 0$ für alle a .

Gleichung (4.151) kann als Analogie zur Gleichung (4.125) für E_{el} gelesen werden, in der die Gesamtenergie als symmetrische, positiv-definite Bilinearform in den Ladungen Q_a oder den Potentialen ϕ_a geschrieben werden konnte.

Die Diagonalelemente der Induktionsmatrix heißen *Selbstinduktionskoeffizienten*, denn in ihnen werden ja beide Integrale über den gleichen Stromkreis ausgeführt. Die Nicht-Diagonalelemente heißen *Gegeninduktionskoeffizienten*.

Versucht man nun zu unendlich dünnen Stromleitern (Drähten) überzugehen, so wie sie durch (4.126) beschrieben werden, setzt mal also in (4.151b)

$$\mathbf{j}_a(\mathbf{x}) = \int_{K_a} d\mathbf{k}_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{k}_a), \quad (4.152)$$

so führen die beiden Integrationen über G_a und G_b wegen der zwei $\delta^{(3)}$ -Funktionen lediglich dazu, \mathbf{x} durch ein \mathbf{k}_a und \mathbf{x}' durch ein \mathbf{k}_b zu ersetzen, und man erhält ein Kurven-Doppelintegral:

$$L_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{K_a} \int_{K_b} \frac{d\mathbf{k}_a \cdot d\mathbf{k}_b}{\|\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b\|} \quad (4.153)$$

Dieser Ausdruck für die Induktionskoeffizienten nennt man die *Neumann'sche Formel*⁸.

Das elegante und einfache Aussehen der Neumann-Formel ist trügerisch: Selbst für einfache Drahtverläufe ist das Doppelintegral nicht einfach auszurechnen. Darüberhinaus ist es überhaupt nur für die Berechnung der Gegeninduktionskoeffizienten - also der L_{ab} mit $a \neq b$ - geeignet, denn die Doppelintegrale über ein und dieselbe Kurve divergieren an den Nullstellen des Nenners $\|\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b\|$. Diese Divergenz haben wir uns durch die Idealisierung unendlich dünner Drähte eingehandelt. Ist \mathbf{J} überall endlich, wie es in physikalisch realistische Situationen ja auch sein soll, verschwindet diese Divergenz, wie wir bereits oben diskutiert haben. Diese Divergenz ist konzeptuell nicht unähnlich der, die wir in Abschnitt 4.3.1 bei der Berechnung der Energie von Systemen von Punktladungen gefunden haben. Dort mussten wir in Ausdruck (4.24a) für die Gesamtenergie als Funktional der Ladungsdichte im Falle von Punktladungen eine Regularisierung einführen, die darin besteht, die divergierenden Eigenenergiebeiträge der einzelnen Punktladungen einfach wegzulassen. Übertragen wir dieses Schema auf den magnetischen Fall, so bekommen wir als regularisierte Energie eines Systems von n disjunkten Stromkurven

$$\{E_{\text{mag}}\}_{\text{reg}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^n L_{ab} I_a I_b = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a < b}}^n L_{ab} I_a I_b \quad (4.154)$$

Wie im elektrostatischen Fall wird durch diese Regularisierung die Positiv-Definitheit zerstört. $\{E_{\text{mag}}\}_{\text{reg}}$ kann also durchaus negative Werte annehmen.

Eine solche Regularisierung ist sinnvoll, wenn der angezogene Teil immer der "Gleiche" ist, bei der Aufstellung von Energie-Differenzen also herausfällt. Hat man etwa die Energie als Funktion eines am System kontrollierbaren Parameters (Abstand der Stromschleifen etc.) gegeben, und ist der divergente Anteil von diesem Parameter unabhängig, dann kann man "guten Gewissens" den Differentialquotient nach diesem Parameter, also die verallgemeinerte Kraft ausrechnen indem man die "divergent konstanten Terme" von der Differentiation einfach wegstreicht

⁸Nach Franz Ernst Neumann (1798-1895), der diese Formel bereits 1845 fand, also viele Jahre vor den ersten Arbeiten von Faraday und Maxwell.

und die so entstehende reguläre Funktion nach dem Parameter differenziert. Insofern sind die regularisierten Ausdrücke durchaus nützlich.

4.4.6 Das Feld magnetisch polarisierter Körper am Beispiel des Stabmagneten

Wie im elektrischen Fall kann ein Magnetfeld durch eine Magnetisierung \mathbf{M} des Körpers verursacht werden wobei alle (freien!) Ströme verschwinden, also $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ zu setzen ist; und analog zum elektrischen Fall ist dann das durch \mathbf{M} erzeugte Feld gleich dem, das durch von gebundenen Strömen erzeugt wird.

Wir betrachten also die statischen MG nun *ohne* die Annahme der Homogenität, so dass also

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.155)$$

mit örtlich variablen \mathbf{M} gilt. Aus den MG (2.2) entnehmen wir für den statischen Fall und $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ die sowieso immer gültige Divergenzfreiheit von \mathbf{B} und die Rotationsfreiheit von \mathbf{H} :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.156)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (4.157)$$

Aus der Zweiten folgt die Existenz eines skalaren Potentials ψ für \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi. \quad (4.158)$$

Damit und mit (4.155) ist die erste Gleichung dann äquivalent zu folgender Poisson-Gleichung

$$\Delta\psi = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (4.159)$$

Fordert man wieder $\psi \rightarrow 0$ im Unendlichen, so ist deren Lösung

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (4.160)$$

Ist also \mathbf{M} bekannt, so kann daraus ψ , aus (4.158) \mathbf{H} und schließlich aus (4.155) \mathbf{B} berechnet werden.

Dies wollen wir anhand des *Stabmagneten* vorführen, den wir in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt haben. Darunter verstehen wir eine im Zylindergebiet

$$G = \left\{ \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, -L/2 \leq z \leq L/2 \right\} \quad (4.161)$$

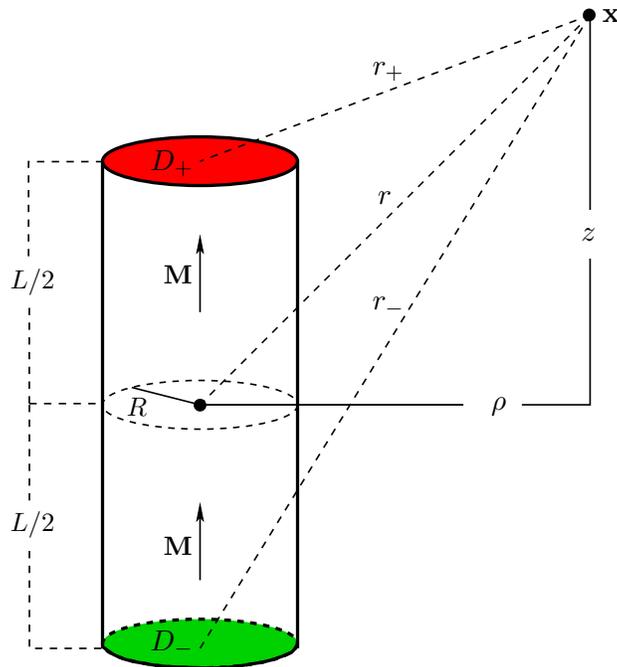


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung eines zylinderförmigen Stabmagneten der Gesamtlänge L und kreisscheibenförmigen Querschnitts vom konstanten Radius R . Der Mittelpunkt des Zylinders falle mit den Koordinatenursprung zusammen, die Zylinderachse mit der z -Achse. Die Magnetisierung innerhalb des Zylinders ist $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$ mit konstantem M , und verschwindet außerhalb. Für die Bestimmung des magnetischen Potentials ψ müssen die inversen Abstände r_{\pm} der Punkte des oberen Deckels D_+ (rot, Nordpol) und unteren Deckels D_- (grün, Südpol) zum Aufpunkt \mathbf{x} integriert werden.

konstante Magnetisierung M in \mathbf{e}_z -Richtung, die außerhalb G identisch verschwindet:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{cases} M\mathbf{e}_z & \text{für } \mathbf{x} \in G, \\ \mathbf{0} & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus G. \end{cases} \quad (4.162)$$

Dies können wir mit Hilfe der Heaviside'schen Stufenfunktion Θ auch so schreiben,:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = M\mathbf{e}_z \Theta(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \Theta(L/2 - z) \Theta(L/2 + z). \quad (4.163)$$

Daraus können wir mit Hilfe von $\Theta' = \delta$ sofort die Divergenz berechnen; denn da \mathbf{M} nur eine z -Komponente besitzt, ist die Divergenz durch die Ableitung dieser

Komponente nach z gegeben:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}) &= -M\Theta(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \left[\delta(L/2 - z) \Theta(L/2 + z) \right. \\ &\quad \left. - \delta(L/2 + z) \Theta(L/2 - z) \right] \quad (4.164) \\ &= -M\Theta(R - \sqrt{x^2 + y^2}) \left[\delta(L/2 - z) - \delta(L/2 + z) \right]\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Gleichheit einfach die Θ -Funktionen weggelassen, weil diese mit δ -Funktionen multipliziert werden an deren Nullargument die Argumente der Θ -Funktionen positiv sind und die Θ -Funktionen somit den Wert Eins annehmen. Eingesetzt in (4.160) erhalten wir

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{M}{4\pi} \left[\int_{D_+} \frac{df'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \int_{D_-} \frac{df'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right]. \quad (4.165)$$

Hier bezeichnen D_+ und D_- den oberen bzw. unteren kreisscheibenförmigen Deckel des Zylinders:

$$D_{\pm} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, z = \pm L/2 \}. \quad (4.166)$$

Das Integral (4.165) ist nun für alle Punkte \mathbf{x} innerhalb und außerhalb des Zylindergebiets auszuwerten. Wie man sieht ist dieses Problem mathematisch äquivalent der Bestimmung des elektrostatischen Potentials zweier mit konstanten Flächenladungsdichten $\sigma_f = \pm M\epsilon_0$ belegten Kreisscheiben D_{\pm} .

Wir nehmen an, dass die Länge L des Zylinders groß im Vergleich zu seinem Radius R ist. Außerdem beschränken wir uns für die Berechnung des Feldes im Außenraum auf Punkte \mathbf{x} , deren Abstand $r = \|\mathbf{x}\|$ vom Mittelpunkt groß ist im Vergleich zur Länge L :

$$R \ll L \ll r. \quad (4.167)$$

In dieser Näherung ist eigentlich aus der elektrostatischen Analogie schon jetzt klar, dass das \mathbf{H} -Feld in führender Ordnung ein Dipolfeld mit Dipolmoment LFM sein wird, wobei $F := \pi R^2$ die Fläche der Deckel D_{\pm} ist. Analytisch kann man anhand einer Taylor-Entwicklung der Abstände $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ nach \mathbf{x}' um $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ argumentieren:

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \frac{1}{r} + (-\mathbf{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \dots \quad (4.168)$$

Sind dann $\mathbf{x}'_+ \in D_+$ und $\mathbf{x}'_- \in D_-$ die unter der zur z -Achse parallelen Projektion entsprechenden Punkte auf D_+ bzw. D_- , so dass $\mathbf{x}'_+ - \mathbf{x}'_- = L\mathbf{e}_z$, dann ist in führender Ordnung

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_+\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_-\|} = -L\mathbf{e}_z \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \quad (4.169)$$

Der hier rechts angeschriebene Term ist aber von \mathbf{x}' unabhängig, so dass die Integration einfach einen Faktor F beiträgt. Also wird aus (4.165)

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}(\mathbf{m} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.170a)$$

mit

$$\mathbf{m} = LFM \mathbf{e}_z. \quad (4.170b)$$

Außerhalb des Zylinders ist also in dieser Näherung (mit $\mathbf{n} := \mathbf{x}/r$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\mu_0 \nabla \psi(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3}. \quad (4.171)$$

\mathbf{B} also ein reines Dipolfeld mit einem magnetischem Dipolmoment \mathbf{m} das durch (4.170b) gegeben ist. Dies ist das magnetische Analogon zu (4.35).

Innerhalb des Zylinders können wir ψ ohne die Annahme (4.167) exakt berechnen, wenn wir uns auf Punkte \mathbf{x} auf der Zylinderachse beschränken, was wir hier tun wollen. Dann ist nämlich

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_{\pm}\| = (z \mp (L/2))^2 + \rho'^2 \quad (4.172)$$

mit $\rho' := \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Die Integration über die Deckel D_{\pm} führen wir in ebenen Polarkoordinaten (ρ', φ') in der $x'y'$ -Ebene durch. Da die der Integranden in (4.165) von φ' unabhängig sind, wie man aus (4.172) sieht, ergibt sich bei der Integration mit dem Maß $df' = \rho' d\rho' d\varphi'$ ein Faktor 2π durch die triviale φ' -Integration und es bleibt

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \frac{M}{2} \int_0^R d\rho' \left[\frac{\rho'}{\sqrt{(z - (L/2))^2 + \rho'^2}} - \frac{\rho'}{\sqrt{(z + (L/2))^2 + \rho'^2}} \right] \\ &= \frac{M}{2} \left[\sqrt{(z - (L/2))^2 + \rho'^2} - \sqrt{(z + (L/2))^2 + \rho'^2} \right] \Big|_{\rho'=0}^{\rho'=R} \\ &= \frac{M}{2} \left[\sqrt{(z - (L/2))^2 + R^2} - \sqrt{(z + (L/2))^2 + R^2} \right. \\ &\quad \left. - |z - (L/2)| + |z + (L/2)| \right] \\ &= \frac{M}{2} \left[\sqrt{(z - (L/2))^2 + R^2} - \sqrt{(z + (L/2))^2 + R^2} + 2z \right]. \end{aligned} \quad (4.173)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $-L/2 \leq z \leq L/2$ benutzt, so dass einmal $|z - (L/2)| = (L/2) - z$, das andere Mal $|z + (L/2)| = z + (L/2)$.

Daraus folgt $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ zu

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{M}{2} \mathbf{e}_z \left[\frac{z + (L/2)}{\sqrt{(z + (L/2))^2 + R^2}} - \frac{z - (L/2)}{\sqrt{(z - (L/2))^2 + R^2}} - 2 \right] \quad (4.174)$$

Dies können wir noch etwas übersichtlicher schreiben wenn wir statt $z \in [-L/2, L/2]$ die dimensionslose Variable

$$\zeta := \frac{z}{L/2} \in [-1, 1] \quad (4.175)$$

und statt R den dimensionslosen Parameter

$$\eta := \frac{R}{L/2} \quad (4.176)$$

eingeführen. Dann ist mit

$$f(\zeta) := \frac{1 + \zeta}{\sqrt{(1 + \zeta)^2 + \eta^2}} + \frac{1 - \zeta}{\sqrt{(1 - \zeta)^2 + \eta^2}} \quad (4.177)$$

$$\mathbf{H}(\zeta) = \frac{M}{2} \mathbf{e}_z (f(\zeta) - 2) \quad (4.178)$$

$$\mathbf{B}(\zeta) = \frac{M\mu_0}{2} \mathbf{e}_z f(\zeta) \quad (4.179)$$

Die Funktion $f(\zeta)$ ist achsensymmetrisch, im ganzen Intervall $\zeta \in [-1, 1]$ positiv mit negativer 2. Ableitung (Rechtskurve) und hat ihr Maximum bei $\zeta = 0$ mit dem Wert $2/\sqrt{1 + \eta^2} < 2$. Ihren minimalen Werte nimmt sie an den Intervallenden $\zeta = \pm 1$ mit $f(\pm 1) = 1/\sqrt{1 + (\eta/2)^2} = 1/\sqrt{1 + (R/L)^2} < 1$.

Für die Felder \mathbf{H} und \mathbf{B} bedeutet dies, dass diese im Inneren des Magneten antiparallel verlaufen, \mathbf{B} parallel zu \mathbf{M} und \mathbf{H} antiparallel dazu. Die Extremwerte ihrer Beträge sind

$$H_{\max} = H(\zeta = \pm 1) = M \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + (R/L)^2}} \right) > \frac{M}{2}, \quad (4.180a)$$

$$H_{\min} = H(\zeta = 0) = M \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/2L)^2}} \right) > 0 \quad (4.180b)$$

und

$$B_{\max} = B(\zeta = 0) = \mu_0 M \frac{1}{\sqrt{1 + (R/L)^2}} < \mu_0 M, \quad (4.181a)$$

$$B_{\min} = B(\zeta = \pm 1) = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (R/2L)^2}} < \frac{\mu_0 M}{2}. \quad (4.181b)$$

Dass \mathbf{H} in der Stabmitte seinen kleinsten Betrag hat, der für $R/L \ll 1$ sogar beliebig klein werden kann, bezeichnet man als *Entmagnetisierung*. Im Gegensatz dazu hat \mathbf{B} in der Stabmitte seinen größten Wert, der für $R/L \ll 1$ dem Wert $\mu_0 M$ beliebig nahe kommt. An den Grenzflächen D_{\pm} sowie am Zylindermantel ist gemäß (3.17b) und (3.18b) die Normalkomponente von \mathbf{B} bzw. die Tangentialkomponente von \mathbf{H} stetig, nicht jedoch umgekehrt. Eine graphische Darstellung der drei Felder \mathbf{B} , \mathbf{H} und \mathbf{M} innerhalb und außerhalb des Magneten findet man in Abbildung 4.3. Abbildung 4.4 zeigt die Außenfelder für verschiedene Verhältnisse von R zu L .

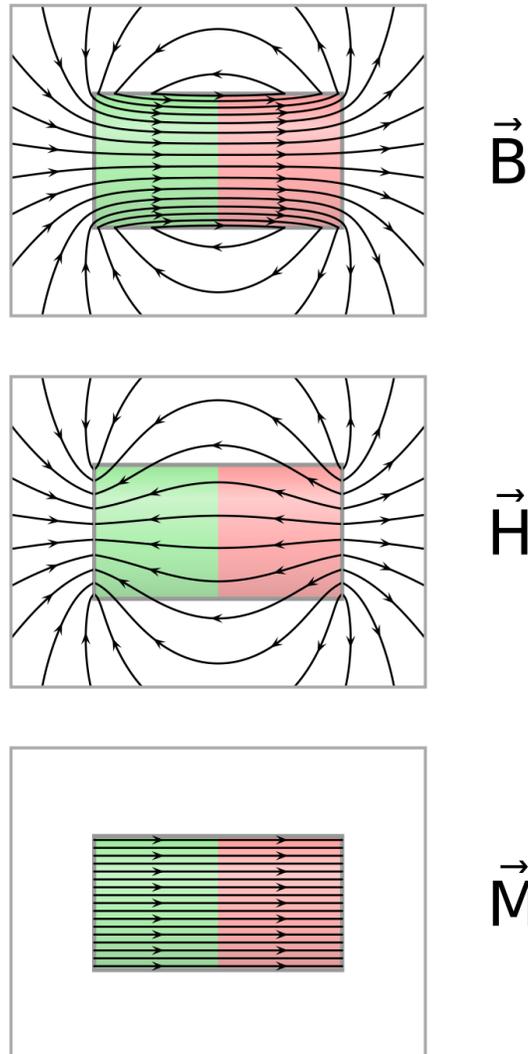


Abbildung 4.3: Die drei Bilder zeigen den Verlauf der Felder \mathbf{B} , \mathbf{H} und \mathbf{M} innerhalb und außerhalb des Magneten. Außerhalb sind \mathbf{B} und \mathbf{H} proportional und \mathbf{M} verschwindet; innerhalb ist \mathbf{B} proportional zur Summe von \mathbf{H} und \mathbf{M} . Die beiden Pole (rot und grün) wirken für das \mathbf{H} -Feld wie magnetische Monopole, d.h. das \mathbf{H} Feld zeigt nach *allen* Richtungen davon weg (beim roten Nordpol) bzw. darauf hin (beim grünen Südpol). Im Gegensatz dazu ist das \mathbf{B} wegen der Stetigkeit seiner Normalkomponente an der Grenzfläche gleich gerichtet. Im Inneren des Magneten sind deshalb \mathbf{B} gegenläufig und mit Ausnahme der Mittellinie auch nicht parallel. [Bild der Wikimedia Commons]

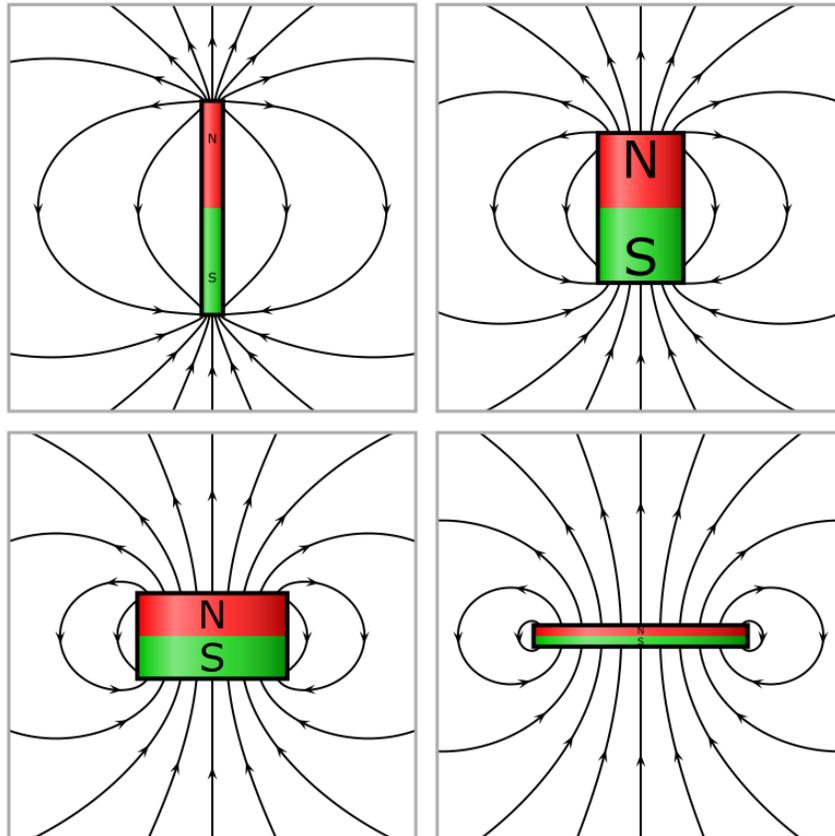


Abbildung 4.4: Außenfelder \mathbf{B} und \mathbf{H} des “Stab”-Magneten bei verschiedenen Verhältnissen von Länge L (im Bild die vertikale Höhe) zu Radius R (im Bild die halbe horizontale Breite). [Bild der Wikimedia Commons]

4.4.7 Die Ampère'sche Äquivalenz von Kreisströmen mit Dipolverteilungen

Ein magnetisches Dipolfeld zum magnetischen Dipolmoment \mathbf{m} kann, wie in (4.171) geschehen als als Gradient eines skalaren Potentials geschrieben werden. Da dieses Feld aber nicht nur rotations- sondern auch divergenzfrei ist, kann es aber ebenso als Rotation eines Vektorpotentials \mathbf{A} geschrieben werden: Mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.182)$$

ist für $r \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\nabla \times (\mathbf{m} \times \nabla)) \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \Delta - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla) \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.183)$$

wobei wir bei der dritten Gleichheit $\Delta(1/r) = 0$ für $r \neq 0$ benutzt haben.

Wenn wir uns nun den Ausdruck (4.128) für das Vektorpotential einer Stromkurve \mathbf{k} in Erinnerung rufen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_K \frac{d\mathbf{k}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{k}\|} \quad (4.184)$$

und auf diesen den Stokes'schen Satz in der Form (8.45) anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_F d\mathbf{f}' \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_F d\mathbf{f}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right), \end{aligned} \quad (4.185)$$

wobei F hier irgendeine Fläche sein kann, deren Rand K ist ($\partial F = K$). Der Vergleich mit (4.182) zeigt, dass das so bestimmte \mathbf{A} gleich ist dem, das die Gesamtheit aller auf F mit einer Oberflächendichte

$$\boldsymbol{\omega}_f = I \mathbf{n}_f \quad (4.186)$$

verteilte Dipole hätten, wobei hier \mathbf{n}_f das Normalenfeld zu F ist. Einer einzelnen Stromschleife kann somit eine flächenhaft verteilte Dipoldichte zugeordnet werden, die das gleiche magnetische Feld erzeugt. Ist die Stromschleife eben, beispielsweise in der $z = 0$ Ebene gelegen, dann ist die magnetische Dipolverteilung in dem durch die Schleife berandeten 2-dimensionalen Gebiet der Ebene einfach konstant $I\mathbf{e}_z$. Das gesamte magnetische Dipolmoment dieser Verteilung beträgt $\mathbf{m} = IA\mathbf{e}_z$, wobei hier A der Flächeninhalt der ebenen Fläche F ist.

Statt einer Stromkurve eine Dipolverteilung zuzuordnen können wir auch umgekehrt jeder allgemeinen magnetischen Dipolverteilung eine Stromverteilung zuordnen, so, dass diese das gleiche Magnetfeld erzeugt wie jene. Dies geschieht in voller Analogie zum elektrischen Fall, den wir bereits in Abschnitt (4.3.3) besprochen haben und den wir nun auf das Magnetfeld übertragen. Hat man also eine magnetische Dipoldichte \mathbf{M} , dann ist das von ihr erzeugte Magnetfeld gegeben durch das Integral über Terme der Form (4.182), wobei man den Sitz des Dipolmoments nun allgemein mit \mathbf{x}' bezeichnet:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_G dv' \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (4.187)$$

Dieser Ausdruck ist das magnetische Analogon zu (4.46) und kann entsprechend (4.47) umgeformt werden, obwohl hier nun das Vektorprodukt statt das Skalarprodukt zwischen \mathbf{M} und ∇ steht. Dazu tauschen wir zunächst wie zuvor ∇ gegen $(-\nabla')$, was wir dürfen, weil es auf eine Funktion der Variablenkombination $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ wirkt. Dann benutzen dann die Identität

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) = -\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) + \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (4.188)$$

und ersetzen damit den Integranden in (4.187). Auf der erste der zwei so entstehenden Integrale wenden wir den Gauß'schen Satz in der speziellen Form (8.42) an und bekommen dadurch endlich die zu (4.47) analoge Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\int_{\partial G} d\mathbf{f}' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} + \int_G dv' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right]. \quad (4.189)$$

Der Vergleich mit (4.12) zeigt nun wieder, dass ein eine magnetische Dipolverteilung in einem Gebiet G das gleiche Vektorpotential – und damit auch das gleiche Magnetfeld – erzeugt wie eine Stromdichte die im Inneren von G und auf dem Rand ∂G gegeben ist durch bzw.

$$\mathbf{J}_b := \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.190)$$

bzw.

$$\mathbf{K}_b := -\mathbf{n} \times \mathbf{M}, \quad (4.191)$$

wobei \mathbf{n} der nach Außen weisende Normalenvektor von ∂G ist. Diese “gebundenen” Stromdichten sind das magnetische Analogon der “gebundenen” Ladungsdichten (4.48) bzw. (4.49).

Zum konkreten Vergleich wollen wir hier auf den Magnetismus übertragen das gleiche Beispiel wie im elektrischen Fall behandeln: Eine Kugel vom Radius R und Mittelpunkt im Ursprung, deren Inneres eine konstante Magnetisierung trägt: durch (vgl. (4.50))

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{M}_0 & \text{für } r \leq R, \\ \mathbf{0} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (4.192)$$

Die Sphäre S_R^2 mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung bildet wieder den Rand ∂G unseres Gebiets. Das in ihrem Inneren enthaltene magnetische Dipolmoment \mathbf{m} ist also gegeben durch

$$\mathbf{m} := \int_G dv \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M}_0. \quad (4.193)$$

Da im Inneren die Dipoldichte \mathbf{M} konstant ist haben wir wieder nur einen Oberflächenterm in der Bestimmung von \mathbf{A} durch (4.189):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}_0 \times \int_{\partial G} \frac{d\mathbf{f}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (4.194)$$

Das Integral ist das gleiche wie im elektrischen Fall:

$$\int_{S_R^2} \frac{d\mathbf{f}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \mathbf{x} \frac{4\pi}{3} \begin{cases} 1 & \text{für } r < R, \\ R^3/r^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.195)$$

so dass

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{3} (\mathbf{M}_0 \times \mathbf{x}) \begin{cases} 1 & \text{für } r < R, \\ R^3/r^3 & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (4.196)$$

Die Rotation davon berechnet man nach der für alle Funktionen $f(r)$ gültigen Regel: $\nabla \times (\mathbf{M}_0 \times \mathbf{x}f(r)) = \mathbf{M}_0(\nabla \cdot (\mathbf{x}f(r))) - (\mathbf{M}_0 \cdot \nabla)(\mathbf{x}f(r))$, die für $f \equiv 1$ das Ergebnis $2\mathbf{M}_0$ und für $f = 1/r^3$ wegen $\nabla \cdot (\mathbf{x}/r^3) = 0$ für $r \neq 0$ das Ergebnis $-(\mathbf{M}_0 \cdot \nabla)(\mathbf{x}/r^3) = (3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_0) - \mathbf{M}_0)/r^3$ liefert.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{cases} 2\mathbf{m}/R^3 & \text{für } r < R, \\ [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}]/r^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.197)$$

Vergleicht man dies mit (4.55) so fällt auf, dass hier im Innern das \mathbf{B} -Feld gleichgerichtet ist und von doppelter Dipolstärke, während in (4.55) das \mathbf{E} entgegengesetzt gerichtet zu \mathbf{p} und einfacher Stärke ist. Der Grund ist, dass das *rechnerische* Analogon zu \mathbf{E} nicht \mathbf{B} sondern \mathbf{H} ist, das im vorliegenden Fall wegen $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B}$ außen und $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{M}_0$ innen gegeben ist durch:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \begin{cases} -\mathbf{m}/R^3 & \text{für } r < R, \\ [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}]/r^3 & \text{für } r > R, \end{cases} \quad (4.198)$$

was jetzt genau (4.55) entspricht, während \mathbf{B} in (4.197) das Analogon zu \mathbf{D} in (4.57) ist.

Die rechnerische Analogie $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ und $\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$, die hier in der Ergebnis-Korrespondenz (4.55) \leftrightarrow (4.198) bzw. (4.57) \leftrightarrow (4.197) zum Ausdruck kommt, soll aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass nach heutiger Auffassung das Paar (\mathbf{E}, \mathbf{B}) und nicht (\mathbf{E}, \mathbf{H}) als fundamentale elektromagnetische Felder aufzufassen ist, während (\mathbf{D}, \mathbf{H}) als Hilfsfelder anzusehen sind, wie wir ja bereits in Abschnitt 2 diskutiert haben. Die Diskussion darüber, wie es zu dieser Auffassung kommt, wollen wir hier nochmals aufgreifen.

Gäbe es magnetische Monopole, so wie es einzelne elektrische Ladungen gibt, dann könnten wir mit deren Hilfe analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.3.2 elementare Dipole konstruieren, die Lösung der Poisson-Gleichung für das magnetische skalare Potential ψ sind. Dessen negativer Gradient ist \mathbf{H} , nicht \mathbf{B} . In diesem Fall wäre es natürlich, \mathbf{H} als das Analogon zu \mathbf{E} aufzufassen. Lange galt dieser Standpunkt als möglich oder sogar wahrscheinlich. Bisher zum heutigen tag fehlt aber jede Evidenz hinsichtlich magnetischer Monopole.

Deshalb kann man auch umgekehrt argumentieren, dass die elementaren Dipole, die als Ursache des Magnetismus gelten, nicht aus Monopolen aufgebaut sind, sondern durch Ströme, sogenannte "Ampère'sche Kreisströme", die im molekularen und atomaren Dimensionen eine von außen sich als Polarisierung manifestierende Magnetisierung erzeugen. Das war der Standpunkt Ampères: Aller Magnetismus beruht letztlich auf Strömen auf kleinen Skalen. Heute ist diese Ansicht "im Großen und Ganzen" richtig, wenn auch nicht wörtlich. Das magnetische Moment des Elektrons ist sicher nicht aus zwei magnetischen Monopolen gemacht, aber es ist auch nicht im wörtlichen Ampèreschen Sinne auf Kreisströme zurückführbar, obwohl das Elektron auch einen Drehimpuls besitzt und man somit eine damit einhergehende Drehbewegung vermuten möchte. Es zeigt sich aber, dass diese Vorstellung im Rahmen der Maxwell-Theorie nicht durchführbar ist.

Unser obiges Beispiel kann in diesem Zusammenhang gedeutet werden: Der Ausdruck für das Vektorpotential (4.194) ist nämlich mathematisch gleich dem für ei-

ne homogen geladene Sphäre vom Radius R und Mittelpunkt am Ursprung, deren Gesamtladung Q beträgt und die mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Innerhalb und außerhalb der Sphäre sei Vakuum. Dann ist die Stromdichte gegeben durch das Produkt aus Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}) = (Q/4\pi R^2)\delta(r - R)$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \times \mathbf{x}$, also wobei

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi R^2}(\omega \times \mathbf{x}) \delta(r - R). \quad (4.199)$$

Eingesetzt in (4.13) folgt (mit $\mathbf{x}' df = R df'$ auf S_R^2)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{4\pi R} \omega \times \int_{S_R^2} \frac{d\mathbf{f}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (4.200)$$

Das ist äquivalent ist zu (4.194) mit einer Magnetisierung von

$$\mathbf{M}_0 = \frac{Q}{4\pi R} \omega, \quad (4.201)$$

bzw. einem gesamten magnetischen Dipolmoment von

$$\mathbf{m} = \frac{QR^2}{3} \omega. \quad (4.202)$$

Diese Analogie zeigt eindrücklich, wie eine Magnetisierung ohne Ströme durch Kreisströme ohne Magnetisierung ersetzt werden kann.

Bemerkung 17. So kommen wir am Ende dieses Abschnitts nochmal auf unsere erste Bemerkung 1 und besonders das am Ende von Abschnitt Gesagte zurück und sagen es nochmals mit etwas anderen Worten. Gemäß dem modernen Standpunkt gibt es auf fundamentalen Niveau die Felder (\mathbf{E}, \mathbf{B}) und die Quellen $(\rho_{\text{tot}}, \mathbf{J}_{\text{tot}})$. Die Felder (\mathbf{P}, \mathbf{M}) entstehen erst dadurch, dass wir Anteile der wirklich vorhandenen Ladungs- und Stromdichten $(\rho_{\text{tot}}, \mathbf{J}_{\text{tot}})$ aufteilen in die *freien*, im Experiment kontrollierten Anteile und die *gebundenen*, im Material erst entstehende Anteile:

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_f + \rho_b, \quad (4.203a)$$

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b. \quad (4.203b)$$

Sodann schreiben wir die MG in einer Form, in der *ausschließlich* die freien Ladungs- und Stromdichten (ρ_f, \mathbf{J}_f) als Quellen sogenannter *effektiver Felder* (\mathbf{D}, \mathbf{H}) auftreten, die aus den fundamentalen Feldern (\mathbf{E}, \mathbf{B}) durch Hinzunahme von Anteilen (\mathbf{P}, \mathbf{M}) gemäß

$$\mathbf{D} := \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.204a)$$

$$\mathbf{H} := \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (4.204b)$$

entstehen und die die gebundenen Anteile der Quellen codieren:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (4.205a)$$

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (4.205b)$$

Kosmetisch verdeckt wird dieser Prozess dann dadurch, dass man die freien Anteile der Quellen dann einfach als *die* Quellen bezeichnet und ohne Index f als (ρ, \mathbf{J}) schreibt. Auch ist, wie bereits am Ende von Abschnitt betont, dabei noch keinerlei mathematischer Input geleistet worden. Der Wert dieses Manövers besteht aber in einer dadurch nahegelegten Lösungsstrategie, die darin besteht, plausible und physikalisch zu begründende Annahmen über (\mathbf{P}, \mathbf{M}) und damit (ρ_b, \mathbf{J}_b) zu machen die eben nicht - oder nicht an dieser Stelle - grundlegend mit Hilfe der Maxwell-Gleichung (im Molekularen oder atomistischen Bereich) zu rechtfertigen sind.

Wie ebenfalls bereits erwähnt wäre es in dieser Interpretation natürlicher, statt μ_0 ihn Inverses als "magnetische Konstante" einzuführen und das Vorzeichen von M zu wechseln; was auch hin und wieder vorgeschlagen wurde, z.B. in [?]. Ebenfalls scheint es unnatürlich, \mathbf{E} und \mathbf{D} bzw. \mathbf{B} und \mathbf{H} verschiedene physikalische Einheiten zuzuweisen, weshalb viele Theoretiker statt der SI-Einheiten die Gauß'schen bevorzugen, in denen die Felder gleiche Einheiten besitzen. \square

4.5 Multipolentwicklung

Die Multipolentwicklung ist ein Näherungsverfahren, durch das man elektrische und magnetische Felder kompakter Ladungs- und Stromverteilungen außerhalb derselben bestimmen kann. Mathematisch handelt es sich um eine Potenzreihenentwicklung nach einem dimensionslosen positiven Parameter, der - grob gesprochen - das Verhältnis der Größe des Körpers zum Abstand des Aufpunktes (an dem man das Feld berechnen möchte) vom Körper angibt. Die Entwicklung wird also umso schneller konvergieren, je weiter man vom Körper (gemessen in Einheiten seiner Ausdehnung) entfernt ist. Diese Idee wollen wir nun präzisieren.

4.5.1 Ausgedehnte Ladungsverteilungen

Dazu betrachten wir ein beschränktes Gebiet G im Raum \mathbb{R}^3 , in dessen Innerem der Träger der Quellen ρ und \mathbf{J} enthalten ist. Wir interessieren uns für das elektrische und magnetische Feld außerhalb dieses Gebiets. Abbildung 4.5 gibt einen Eindruck der geometrischen Verhältnisse. Wichtig ist, dass wir für die Multipolentwicklung einen Punkt c wählen, relativ zu dem die ganze Entwicklung überhaupt

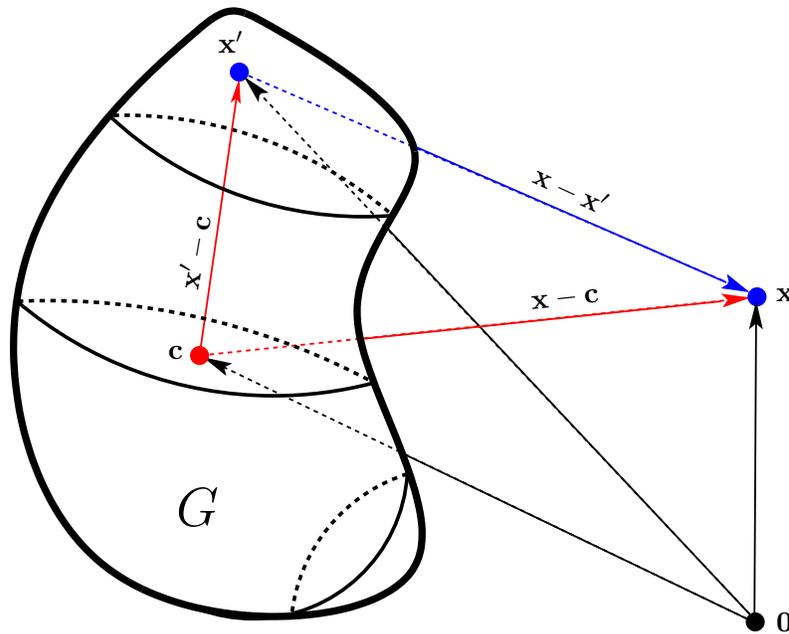


Abbildung 4.5: Illustration der Verhältnisse bei der Multipolentwicklung. Mit dem “kartoffelförmigen” Gebiet ist die 3-dimensionale Region im Raum bezeichnet, in dem die Quellen, also alle Ladungen und Ströme, konzentriert sind. Wir sprechen auch vom *Trägergebiet* von (ρ, \mathbf{J}) . Das Feld dieser Quellen soll außerhalb des Gebiets G berechnet werden, wo Vakuum herrscht. Dabei bezeichnen 0 den Koordinatenursprung, x den “Aufpunkt” außerhalb von G an dem das Feld berechnet werden soll, x' den “Quellpunkt” innerhalb des Gebiets G und c einen frei wählenden Punkt, bezogen auf den die Multipolentwicklung durchgeführt wird und von dessen Wahl die Multipolmomente i.a. auch abhängen (genauer: alle bis auf das erste nicht verschwindende).

erst definiert wird. Dieser Punkt muss so gewählt sein, dass die Abstände zwischen ihm und dem innerhalb G gelegenen Aufpunkt x' möglichst klein sind gegen alle die Abstände zwischen \mathbf{c} und dem außerhalb G gelegenen Aufpunkt \mathbf{x} , an dem die Felder bestimmt werden sollen. Dazu ist es natürlich naheliegend, den Punkt \mathbf{c} in das Innere von G zu verlegen, und zwar möglichst "zentral", so dass die Abstände $\|\mathbf{x}' - \mathbf{c}\|$ möglichst klein sind. Wir betonen, dass die Wahl von \mathbf{c} zur Definition der Multipolentwicklung gehört und logisch nichts mit der völlig unerheblichen Wahl des Koordinatenursprungs $\mathbf{0}$ zu tun hat.⁹

Wir definieren nun

$$\mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{c}, \quad r := \|\mathbf{r}\|, \quad \mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (4.206a)$$

$$\mathbf{r}' := \mathbf{x}' - \mathbf{c}, \quad r' := \|\mathbf{r}'\|, \quad \mathbf{n}' := \frac{\mathbf{r}'}{r'}. \quad (4.206b)$$

Die im Integrand der Lösungen (4.12) und (4.13) der Poisson-Gleichung auftretende Kombination $1/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ wird dann

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + q^2 - 2q(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')}}}, \quad (4.207)$$

mit

$$q := r'/r. \quad (4.208)$$

Sieht man vorübergehend $t := (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$ als einen Parameter an, dann kann man für jedes t die Funktion

$$q \rightarrow f_t(q) := \frac{1}{\sqrt{1 + q^2 - 2qt}} \quad (4.209)$$

nach q um den Punkt $q = 0$ Taylor entwickeln und erhält eine Potenzreihenentwicklung mit von t abhängigen Koeffizienten $P_n(t)$. Diese sind nun ihrerseits Polynome in t und heißen *Legendre-Polynome*¹⁰

$$f_t(q) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) q^n. \quad (4.210)$$

⁹Das wird in vielen Lehrbüchern leider nicht sauber auseinandergehalten indem dort \mathbf{c} mit dem Ursprung des Koordinatensystems identifiziert wird (oft nur implizit). Das ist aber irreführend, weil es die Wahl des Entwicklungspunktes \mathbf{c} ist von der die Multipolentwicklung und die Bestimmung der Multipole selbst abhängt, nicht die Wahl eines physikalisch bedeutungslosen Koordinatenursprungs.

¹⁰Nach Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Die ersten fünf Legendre Polynome lauten

$$P_0(t) = 1, \quad (4.211a)$$

$$P_1(t) = t, \quad (4.211b)$$

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}, \quad (4.211c)$$

$$P_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2}, \quad (4.211d)$$

$$P_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}. \quad (4.211e)$$

Setzt man die Entwicklung (4.210) in (4.207) ein schreibt wieder r'/r für q so folgt

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'). \quad (4.212)$$

Damit erhält man beispielsweise für das skalare Potential ϕ

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_G dv' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{M_{\ell}(\mathbf{n})}{r^{\ell+1}}, \quad (4.213a)$$

wo

$$M_{\ell}(\mathbf{n}) := \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') r'^{\ell} P_{\ell}(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}). \quad (4.213b)$$

Wir nennen $M_{\ell}(\mathbf{n})$ die \mathbf{n} -Komponente des ℓ -ten Multipolmoments der Verteilung ρ bezüglich \mathbf{c} . Die allgemeine Sprechweise ist so, dass das nullte das *Monopolmoment*, das erste das *Dipolmoment*, das zweite das *Quadrupolmoment*, das dritte das *Oktupolmoment* und allgemein das ℓ -te das 2^{ℓ} -Moment ist, wobei die höheren selten explizit genannt werden.

Wichtig an der Multipolentwicklung (4.213) ist, dass Feldbeiträge umso schneller mit dem Abstand zur Quelle abfallen, je höher die Ordnung des Multipolmoments ist von dem der Beitrag herrührt. Monopolterme fallen wie $1/r$, Dipolterme wie $1/r^2$, Quadrupolterme wie $1/r^3$ und Oktupolterme wie $1/r^4$ ab.

Die Multipolmomente können – und werden häufig – durch eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ ausgedrückt. Der Zusammenhang ergibt sich unmittelbar aus (4.213b) und dem sogenannten *Additionstheorem* für Kugelflächenfunktionen (siehe Übung):

$$P_{\ell}(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}') Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (4.214)$$

Damit wird aus (4.213b):

$$M_\ell(\mathbf{n}) := \sum_{m=-\ell}^{\ell} M_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \quad (4.215a)$$

wo

$$M_{\ell m} := \frac{4\pi}{2\ell + 1} \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') r'^\ell Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}'). \quad (4.215b)$$

4.5.2 Spezialfall: Dipolentwicklung des Vektorpotentials

Um auch einmal die Dipolentwicklung eines vektorwertigen Integranden zu betrachten, wenden wir uns dem Vektorpotential \mathbf{A} zu, dessen Darstellung (4.13) durch die Stromdichte \mathbf{J} hier nochmal wiederholt sei (wir setzen $\mu = \mu_0$):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (4.216)$$

wobei

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.217)$$

Wie werden die Divergenzfreiheit im Folgenden benötigen, das sie uns erst in den Stand setzt, vermittels der aus ihr abgeleiteten der Laue'schen Identitäten (siehe Abschnitt 8.4.4), die passenden Umformungen zu rechtfertigen.

Die zu (4.213) analoge Entwicklung für \mathbf{A} ist nun

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G dv' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}_\ell(\mathbf{n})}{r^{\ell+1}}, \quad (4.218a)$$

wo

$$\mathbf{M}_\ell(\mathbf{n}) := \int_G dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') r'^\ell P_\ell(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}). \quad (4.218b)$$

Man beachte, dass jedes \mathbf{M}_ℓ nun selbst vektorwertig ist.

Für $\ell = 0$ erhalten wir

$$\mathbf{M}_0 = \int_G dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') = \mathbf{0}. \quad (4.219)$$

Letzteres wegen der ersten Laue-Identität (8.50). Der Monopolterm einer zu einer divergenzfreien Vektorquelle ist also stets Null.

Für $\ell = 1$ erhalten wir

$$\mathbf{M}_1 = \int_G dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') r' (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}) \quad (4.220)$$

Ziehen wir \mathbf{n} vor das Integral und schreiben wider $\mathbf{x}' = r'\mathbf{n}'$, so ist die a -te Komponente dieses Ausdrucks gleich

$$\begin{aligned} (M_1)_a &= n_b \int_G dv' J_a(\mathbf{x}') x'_b \\ &= \frac{1}{2} n_b \int_G dv' (J_a(\mathbf{x}') x'_b - J_b(\mathbf{x}') x'_a) \\ &= \left[\frac{1}{2} \mathbf{n} \times \int_G dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{x}' \right]_a. \end{aligned} \quad (4.221)$$

Dabei haben wir in der zweiten Gleichheit die zweite Laue-Identität (8.52) benutzt um den Integranden in (4.221) zu antisymmetrisieren (gemäß (8.52) verschwindet ja der symmetrische Anteil). Das Resultat können wir somit als doppeltes Vektorprodukt schreiben.

Als Resultat erhalten wir das Vektorpotential \mathbf{A} in der Dipolnäherung (das ist hier wegen der Abwesenheit des Monopolterms die führende Ordnung) zu

$$\mathbf{A}_{\text{dipol}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{n}}{r^2} \times \int_G dv' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \mathbf{x}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.222)$$

mit

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_G dv' \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (4.223)$$

Der Vergleich mit (4.182) zeigt uns, dass dieses \mathbf{m} tatsächlich das magnetische Dipolmoment ist, das wir nun allgemein durch ein Integral über die Stromdichte ausdrücken können.

4.5.3 Multipolmomente als symmetrisch-spurfreie Tensoren

Wenn wir oben von “der \mathbf{n} -Komponente” des Multipolmoments gesprochen haben so war damit nicht gemeint, dass Multipolmomente Vektoren seien; das ist nur im Fall des Dipolmoments so. Sie sind eigentlich *Tensoren*, genauer gesagt symmetrisch-spurfreie Tensoren. Was damit gemeint ist, kann man anhand des Ausdrucks (4.213b) sehen, wenn man sich dessen Abhängigkeit von \mathbf{n} vergegenwärtigt, in unserem Fall für die ersten vier der fünf Polynome (4.211). In diesen repräsentiert der Parameter t das Skalarprodukt $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$ was wir in Komponentenschreibweise als $n_a n'_a$ (Summenkonvention!) schreiben.

- Das Monopolmoment $M_0(\mathbf{n})$ ist von \mathbf{n} unabhängig und einfach durch die Gesamtladung gegeben:

$$M_0(\mathbf{n}) = \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') = Q. \quad (4.224)$$

- Das Dipolmoment ist

$$M_1(\mathbf{n}) = \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') = \mathbf{n}_a D_a. \quad (4.225a)$$

wo

$$D_a := \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') r'_a. \quad (4.225b)$$

Dies ist eine *Linearform* in \mathbf{n} , also eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} M_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} &\mapsto M_1(\mathbf{v}) =: v_a D_a. \end{aligned} \quad (4.225c)$$

- Das Quadrupolmoment ist

$$M_2(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') r'^2 (3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2 - 1) = n_a n_b Q_{ab}, \quad (4.226a)$$

wo

$$Q_{ab} := \frac{1}{2} \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') (3r'_a r'_b - r'^2 \delta_{ab}). \quad (4.226b)$$

Diese definiert eine symmetrische *Bilinearform*, also eine Abbildung

$$\begin{aligned} M_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) &\mapsto M_2(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) =: v_a^{(1)} v_b^{(2)} Q_{ab}, \end{aligned} \quad (4.226c)$$

die in jedem der beiden Argumente $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ linear ist und ihren Wert bei Austausch der Argumente nicht ändert: $M_2(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}) = M_2(\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(1)})$. Auf Koeffizientenniveau heißt das $Q_{ab} = Q_{ba}$. Außerdem ist Q_{ab} spurlos, also $Q_{aa} = \delta_{ab} Q_{ab} = 0$, wie man an (4.226b) sofort sieht.

- Das Oktupolmoment ist

$$M_3(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') r'^3 (5(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^3 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')) = n_a n_b n_c O_{abc}, \quad (4.227a)$$

wo

$$O_{abc} := \frac{1}{2} \int_G dv' \rho(\mathbf{x}') \left(5 r'_a r'_b r'_c - r'^2 [r'_a \delta_{bc} + r'_b \delta_{ca} + r'_c \delta_{ab}] \right). \quad (4.227b)$$

Diese definiert eine symmetrische *Trilinearform*, also eine Abbildung

$$\begin{aligned} M_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}) &\mapsto M_3(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}) =: v_a^{(1)} v_b^{(2)} v_c^{(3)} O_{abc}, \end{aligned} \quad (4.227c)$$

die in jedem der drei Argumente $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)})$ linear ist und ihren Wert bei Austausch zweier beliebiger Argumente nicht ändert: $M_3(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}) = M_3(\mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(3)})M_3(\mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(1)}) = \dots$. Auf Koeffizientenniveau heißt das $O_{abc} = Q_{bac} = O_{aca} = \dots$.

- Dies können wir systematisch weiterführen. Das allgemeine Multipolmoment M_k definiert dann eine k -fach multilineare symmetrische Abbildung

$$M_k : \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{k \text{ Faktoren}} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}) \mapsto M_k(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}) \quad (4.228a)$$

$$=: v_{a_1}^{(1)} v_{a_2}^{(2)} \dots v_{a_k}^{(k)} (M_k)_{a_1 a_2 \dots a_k},$$

die in jedem der k Argumente $\mathbf{v}^{(i)}$ linear ist und deren Wert unter Austausch (Transposition) zweier beliebiger Argumente gleich bleibt.

Allgemein bezeichnet man k -fach lineare – also *multilineare* – Abbildungen eines Vektorraums V (hier \mathbb{R}^3) in seinen Grundkörper (meist \mathbb{R} oder \mathbb{C} ; hier \mathbb{R}) als einen *kovarianten Tensor k -ter Stufe* über V . Ist der Tensor symmetrisch, wie im Fall der Multipolentwicklung für alle M_k mit $n \geq 2$, dann ist er durch seine Werte auf der “Diagonalen” vollständig festgelegt, also durch die Werte $M_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v})$ wo alle k Einträge gleich sind und \mathbf{v} alle Elemente des Vektorraums durchläuft. Zum Beispiel ist

$$M_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{4} \left(M_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) - M_2(\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \right) \quad (4.229)$$

Tatsächlich reicht es wegen der Multilinearität sogar aus, die Diagonalkomponenten $M_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v})$ nur für normierte \mathbf{v} zu kennen, also \mathbf{v} nur über die Einheits-2-Sphäre variieren zu lassen. Deshalb definieren unsere Multipolmomente, in denen ja tatsächlich nur die “Diagonalkomponenten“ $M_k(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n})$ vorkommen, in der Tat Tensoren k -ter Stufe.

Neben der Symmetrie haben unsere Tensoren M_k noch eine weitere wichtige Eigenschaft: Sie sind vollständig spurfrei. Das bedeutet folgendes: Sei $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eine beliebige Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 , dann

$$\sum_{a=1}^3 M_k(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_a, \mathbf{v}^{(3)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}) = 0. \quad (4.230)$$

für alle weiteren Einträge $(\mathbf{v}^{(3)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)})$. In Komponenten bedeutet dies (Summenkonvention):

$$M_{aaa_3 \dots a_k} = \delta_{ab} M_{ab a_3 \dots a_k} = 0. \quad (4.231)$$

Wegen der Symmetrie ist es gleichgültig, über welche zwei der Indizes wir in (4.231) summieren, bzw. welche zwei Einträge in M_k wir wie in (4.230) mit e_a befüllen und dann summieren, stets wird die Summe Null sein.

Tensoren über einem Vektorraum bilden selbst einen Vektorraum, denn man kann sie addieren und mit Elementen des Grundkörpers multiplizieren. Ist der Vektorraum V n -dimensional, dann ist der Raum der allgemeinen Tensoren k -ter Stufe n^k -dimensional. Der Raum der symmetrischen Tensoren bildet darin einen Unterraum. Dessen Dimension entspricht der Anzahl der unabhängigen Komponenten $(M_k)_{a_1 \dots a_k}$. Jeder dieser Indizes kann n Werte annehmen (bei uns ist $n = 3$, wir lassen die Dimension von V aber zunächst offen um zu sehen, wie sie in das Endergebnis eingeht). Die Anzahl der unabhängigen Komponenten ist also gleich der Anzahl der Möglichkeiten, k ununterscheidbare Objekte auf n Schubladen zu verteilen, ist also gleich $\binom{k+n-1}{k}$.¹¹ In diesem Raum der symmetrischen Tensoren bilden diejenigen, die spurfrei einen weiteren Unterraum. Um dessen Dimension anzugeben müssen wir die Anzahl der unabhängigen Spurbedingungen angeben. Durch Spurbildung eines symmetrischen Tensors k -ter Stufe entsteht ein symmetrischer Tensor $(k-2)$ -ter Stufe. Die Spur über die ersten beiden Indizes ist also eine lineare Abbildung $L : S_k V \rightarrow S_{k-2} V$ vom VR aller symmetrischer Tensoren $S_k V$ der Stufe k in den VR aller symmetrischer Tensoren $S_{k-2} V$ der Stufe $(k-2)$. Diese Abbildung genügt wie jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen der Dimensionsformel $\dim(S_k V) = \dim(\text{Bild}(L)) + \dim(\text{Kern}(L))$. Aber $\text{Kern}(L)$ ist gerade unser Vektorraum der symmetrisch-spurlosen Tensoren. Man kann zeigen, dass L surjektiv ist, also $\text{Bild}(L) = S_{k-2} V$. Also ist die gesuchte Dimension des Vektorraums aller symmetrisch-spurlosen Tensoren der Stufe k über einem Vektorraum V den Dimension n gleich

$$\binom{k+n-1}{k} - \binom{k+n-3}{k-2} = 2k+1 \quad \text{für } n=3. \quad (4.232)$$

Das ist also auch die Anzahl der unabhängigen Multipolmomente der Stufe k .

¹¹Stellt man die n Schubladen durch $(n-1)$ vertikale Trennstriche dar und die Objekte durch Punkte, dann ist jede Verteilung der Punkte auf die Schubladen durch eine lineare Anordnung der Striche und Punkte gegeben. Beispielweise entsprechen so $\dots|..| \dots$ drei Objekten in der ersten, zwei in der mittleren und vier in der rechten Schublade. Die Anzahl solcher Anordnungen bei ununterscheidbaren Punkten ist $(k+n-1)!/[k!(n-1)!] = \binom{k+n-1}{k}$. Die Division durch $k!$ berücksichtigt die Ununterscheidbarkeit der Punkte (Objekte) und die Division durch $(n-1)!$ die Ununterscheidbarkeit der Striche, die ja die Schubladen bereits durch ihre horizontale Anordnung von links nach rechts eindeutig charakterisieren (erste Schublade links vom ersten Strich, zweite rechts vom ersten Strich, ..., $(n-1)$ Schublade links vom letzten $((n-1))$ Strich, n -te Schublade rechts davon.

4.5.4 Kurzer Exkurs über das gyromagnetische Verhältnis

An dieser Stelle wollen wir eine kurze Betrachtung anschließen, die den Begriff des *gyromagnetischen Verhältnisses* oder *gyromagnetischen Faktors* betrifft. Unter Letzterem versteht man eine dimensionslose Größe, die üblicherweise mit g bezeichnet wird, die jedem System zukommt, dem die vier Größen *magnetisches Moment* (\mathbf{m}), *elektrische Ladung* (Q), *Drehimpuls* (\mathbf{J}) und *Masse* (M) zugeordnet werden können. Dann gilt (Achtung: hier bezeichnet \mathbf{J} den Drehimpulsvektor, nicht die Stromdichte):

$$g = 2 \cdot \frac{\text{magnetisches Moment} / \text{Ladung}}{\text{Drehimpuls} / \text{Masse}} = 2 \cdot \frac{M}{|Q|} \cdot \frac{\|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{J}\|} \quad (4.233)$$

Haben wir es beispielsweise mit einer Verteilung von Materie mit der Massendichte ρ_M und der elektrischen Ladungsdichte ρ_Q zu tun, in der die Materie rein konvektiv mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ strömt, dann sind die Stromdichten für Masse und elektrische Ladung gegeben durch

$$\mathbf{J}_M(\mathbf{x}) = \rho_M(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (4.234a)$$

$$\mathbf{J}_Q(\mathbf{x}) = \rho_Q(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (4.234b)$$

Aus diesen ergeben sich magnetisches Moment nach (4.223) und der Drehimpuls bezogen auf $\mathbf{x} = 0$ durch Integration der Drehimpulsdichte $\mathbf{x} \times \rho_M(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ zu

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_G dV \mathbf{x} \times \mathbf{J}_Q(\mathbf{x}), \quad (4.235a)$$

$$\mathbf{J} = \int_G dV \mathbf{x} \times \mathbf{J}_M(\mathbf{x}). \quad (4.235b)$$

Wir nehmen nun an, dass die Verteilungen für Masse und Ladung proportional sind, dass also gilt

$$\rho_M \propto \rho_Q. \quad (4.236)$$

so dass wegen

$$M = \int_G dV \rho_M(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad Q = \int_G dV \rho_Q(\mathbf{x}), \quad (4.237)$$

auch gilt

$$\rho_Q = \frac{Q}{M} \rho_M \quad \text{und} \quad \mathbf{J}_Q = \frac{Q}{M} \mathbf{J}_M. \quad (4.238)$$

Dann ist auch

$$\mathbf{m} = \frac{Q}{2M} \mathbf{J} \quad (4.239)$$

oder

$$g = 1. \quad (4.240)$$

Dies zeigt, dass Ladungsverteilungen, die zur Massenverteilung proportional sind, stets zu $g = 1$ führen. Viele Systeme in der Physik besitzen ein davon abweichenden Wert. So hat das Elektron gemäß der Dirac-Gleichung einen Wert $g_e = 2$, der durch sogenannte Stahlungskorrekturen noch etwas verschoben und durch die QED mit einer Präzision von etwa 10^{-9} vorausgesagt wird. Der Wert der Abweichung von $g_e = 2$ wird dann konsistent mit dem Experiment angegeben in

$$a := \frac{g_e - 2}{2} = 0,001\,159\,652\,180\,73(28). \quad (4.241)$$

Das Proton als aus Quarks zusammengesetztes Teilchen hat einen Wert von $g_P = 5.585694713$. Interessanterweise hätten nach der Allgemeinen Relativitätstheorie geladene rotierende Schwarze Löcher einen Wert von exakt $g_{\text{BH}} = 2$.

Kapitel 5

Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls

Wenn sich eine Verteilung von Ladungen unter Einfluss eines elektromagnetischen Feldes bewegt, wird sich deren Energie und Impuls verändern. Wir fragen, in welcher Form die Erhaltungssätze gelten und was die Ausdrücke für die Dichten und Stromdichten von Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes sind.

5.1 Energieerhaltung, Energiedichte und Energiestromdichte

Um die Ausdrücke für Dichten und Stromdichten der Energie des elektromagnetischen Feldes zu finden, müssen wir nach Erhaltungssätzen suchen, in denen u.a. der bekannte Ausdruck für die mechanische Arbeit steht, die von den Feldern am System der Ladungen geleistet wird. Die anderen Terme werden dann je nach ihrer Form als Energiedichte und Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes interpretiert.

Die Kraftdichte, die auf eine Ladungsverteilung wirkt, ist gegeben durch den Lorentz'schen Ausdruck (2.5). Multipliziert man diese mit der Geschwindigkeit der geladenen Materie, so erhält man die pro Zeit- und Volumeneinheit auf die Materie übertragene Energie, d.h. die zeitliche Zunahme der Materieenergie pro Volumen. Nun ist die Geschwindigkeit gegeben durch \mathbf{J}/ρ , also die an den Ladungen pro Zeiteinheit und pro Volumen verrichtete Arbeit gerade durch den letzten Term $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$

gegeben. Man beachte, dass das magnetische Feld keine Arbeit an den Ladungen verrichtet, weil die von ihm ausgeübte Kraft auf die Ladungen immer senkrecht zu deren Bewegungsrichtungen steht. Die Strategie ist nun, den Term $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ mit Hilfe der MG so umzuformen, dass daraus eine Erhaltungsgleichung der folgenden Struktur entsteht:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\dot{W} - \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (5.1)$$

diese Gleichung kann dann wie folgt interpretiert werden: Die an den Ladungen pro Zeit- und Volumeneinheit verrichteten Arbeit muss gleich sein der Summe aus der negativen zeitliche Zuwachsrate der elektromagnetischen Energiedichte und der negativen zeitlichen Rate der aus dem Einheitsvolumen durch die Oberfläche herausströmenden elektromagnetischen Energie.

Man beachte, dass man diesen Satz ohne das Wort “negativen” auch so aussprechen kann: Die an den Ladungen pro Zeit- und Volumeneinheit verrichteten Arbeit muss gleich sein der Summe aus der zeitlichen Rate der Abnahme der elektromagnetischen Energiedichte und der zeitlichen Rate der in das Einheitsvolumen durch die Oberfläche hineinströmenden elektromagnetischen Energie. In dieser Formulierung wird die Interpretation als Erhaltungssatz der Energie besonders klar.

Mit Hilfe der MG machen wir nun folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}) \\ &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} \\ &= -\partial_t \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right] - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Hier haben wir am ersten Gleichheitszeichen die zweite inhomogene MG (2.2b) benutzt um \mathbf{J} zu ersetzen, am zweiten Gleichheitszeichen den Term $\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}$ addiert und gleichzeitig subtrahiert und am dritten Gleichheitszeichen im letzten der eben addierten Terme $\dot{\mathbf{B}}$ gemäß der zweiten homogenen MG (2.2a) durch $-\nabla \times \mathbf{E}$ ersetzt. Im vierten und letzten Gleichheitszeichen haben wir die ersten beiden Terme zusammengefasst gemäß der Identität:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (5.3)$$

die für alle Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{H} gilt, wie man leicht nachrechnet (Übung). Außerdem haben wir die beiden Terme $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}$ als zeitliche Ableitung einer Funktion $\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ zusammengefasst. Dieser Schritt ist nicht trivial, denn er handelt sich dabei um keine mathematische Identität, sondern um eine Umformung, die an das Vorliegen bestimmter Bedingungen geknüpft ist, auf die wir gleich noch näher

eingehen. Zunächst ergeben sich aber aus dem Vergleich der letzten Zeile von (5.2) mit (5.1) die Ausdrücke für die Energiedichte und die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes:

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (5.4b)$$

Bezogen auf die obige Ableitung stellen wir zunächst allgemein fest, dass wir – scheinbar – keinerlei Annahmen über die Konstitutivrelationen gemacht haben, die das Paar (\mathbf{E}, \mathbf{H}) mit dem Paar (\mathbf{D}, \mathbf{B}) der Flussdichten verbindet. Wir sagen “scheinbar”, weil die obige Ableitung in der Tat doch eine diesbezügliche Annahme macht, die, wenngleich nicht sehr stark, doch genannt werden muss! Die gemachten Annahmen ist so, dass folgende Relationen davon impliziert sein mussten:

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}), \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} \partial_t (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (5.5b)$$

Um zu sehen, wann dies tatsächlich gilt, nehmen wir an an, dass die Beziehungen zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} sowie \mathbf{B} und \mathbf{H} linear ist und nicht von der Zeit, aber möglicherweise vom Ort abhängt. Außerdem nehmen wir an, dass die linearen Abbildungen $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{D}(\mathbf{E})$ und $\mathbf{H} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert ist bezüglich des in den Vektorräumen der Feldwerte (also \mathbb{R}^3) definierten euklidischen Skalarproduktes. In Komponenten bezüglich einer orthonormierten Basis muss also gelten

$$D_a(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_{ab}(\mathbf{x}) E_b(t, \mathbf{x}), \quad (5.6a)$$

$$B_a(t, \mathbf{x}) = \mu_{ab}(\mathbf{x}) E_b(t, \mathbf{x}). \quad (5.6b)$$

mit

$$\varepsilon_{ab}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ba}(\mathbf{x}), \quad (5.7a)$$

$$\mu_{ab}(\mathbf{x}) = \mu_{ba}(\mathbf{x}). \quad (5.7b)$$

Unter diesen Voraussetzungen, die weit allgemeiner sind als die eines homogenen und isotropen Mediums (in dem ε_{ab} und μ_{ab} proportional zu δ_{ab} und unabhängig von \mathbf{x} sind), gilt also der sogenannte *Poynting'sche Satz* in der Form (5.1), oder

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \dot{W} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (5.8)$$

in der W das Skalarfeld der elektromagnetischen Energiedichte und \mathbf{S} das Vektorfeld der elektromagnetischen Energiestromdichte gemäß (5.4) ist. Im homogen-isotropen Medien (einschließlich Vakuum), wo $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ mit konstanten $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ und $\mu = \mu_0\mu_r$ gilt, ist also insbesondere

$$W = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 + \mu^{-1} \|\mathbf{B}\|^2 \right), \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{S} = \mu^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (5.9b)$$

5.2 Impulserhaltung, Impulsdichte und Impulsstromdichte

Hier gehen wir genau analog zur energieerhaltung vor, nur müssen wir berücksichtigen, dass der Impuls eine vektorielle Größe ist, also drei Komponenten besitzt. Für jede dieser Komponenten erwarten wir also eine Erhaltungsgleichung der Form (5.1). Wieder ist uns die zeitliche Änderungsrate der Impulsdichte der Ladungen durch das Lorentz'sche Kraftgesetz (2.5) direkt gegeben. Für jede der drei Komponenten \mathbf{G}_a , $a = 1, 2, 3$ der Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes erwarten wir also eine zu (5.1) analoge Gleichung der Form

$$f_a = -\dot{G}_a - \nabla \cdot \mathbf{T}_a. \quad (5.10)$$

Dabei ist \mathbf{T}_a die Stromdichte des Impulses in die durch a bezeichnete Richtung. Eine alternative Weise, dies zu schreiben, ist

$$f_a = -\dot{G}_a - \nabla_b T_{ab}. \quad (5.11)$$

Die Linke Seite, also f_a , ist gegeben durch die a -te Komponente der Lorentz-Kraftdichte (2.5). In dieser ersetzen wir wie zuvor die Quellterme ρ und \mathbf{J} gemäß den inhomogenen MG. Um die Rechnung an dieser Stelle möglichst einfach zu halten, beschränken wir uns auf den Fall homogener und isotroper Medien, also

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon \delta_{ab}, \quad (5.12a)$$

$$\mu_{ab} = \mu \delta_{ab}, \quad (5.12b)$$

mit konstanten ε und μ . Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
&= (\nabla \cdot \mathbf{D}) \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}) \times \mathbf{B} \\
&= \varepsilon \left[\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B} - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right] \\
&= \varepsilon \left[\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right] \\
&\quad - c^{-2} \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
&= \varepsilon \left[(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{E}\|^2 \right] \\
&\quad + \mu^{-1} \left[(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{B}\|^2 \right] \\
&\quad - c^{-2} \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\
&= -\partial_b \left[\varepsilon (-E_a E_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} \|\mathbf{E}\|^2) + \mu^{-1} (-B_a B_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} \|\mathbf{B}\|^2) \right] \mathbf{e}_a \\
&\quad - c^{-2} \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Dabei haben wir in den Umformungen (5.13) im 2. Gleichheitszeichen ρ und \mathbf{J} mit Hilfe der inhomogenen MG (2.2b) durch die Felder ersetzt, im 3. Gleichheitszeichen \mathbf{D} durch $\varepsilon \mathbf{E}$ und \mathbf{H} durch \mathbf{B}/μ ersetzt und $\varepsilon \mu = c^{-2}$ benutzt, im 4. Gleichheitszeichen den Term $c^2 \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B})$ addiert, der wegen der ersten Gleichung (2.2b) verschwindet, und außerdem $\dot{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}$ ersetzt durch $\partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \dot{\mathbf{B}} = \partial_t (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$. Schließlich haben wir im 5. Gleichheitszeichen folgende Umformung vorgenommen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= (\varepsilon_{abc} E_b \varepsilon_{cde} \nabla_d E_e) \mathbf{e}_a \\
&= (\delta_{ad} \delta_{be} - \delta_{ae} \delta_{bd}) E_b \nabla_d E_e \mathbf{e}_a \\
&= \left(\frac{1}{2} \nabla_a (E_b E_b) - E_b \nabla_b E_a \right) \mathbf{e}_a \\
&= \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{E}\|^2 - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

und identisch mit $\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$.

Wieder durch Vergleich mit (5.11) liest man das Vektorfeld der Impulsdichte \mathbf{G} und das Vektorfeld der Stromdichte der a -ten Impulskomponente ab:

$$\mathbf{G} = c^{-2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}/c^2, \tag{5.15a}$$

$$\mathbf{T}_a = \left(-\varepsilon E_a E_b - \mu^{-1} B_a B_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} (\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 + \mu^{-1} \|\mathbf{B}\|^2) \right) \mathbf{e}_b. \tag{5.15b}$$

Man beachte, dass der diagonale, zu δ_{ab} proportionale Anteil gerade die Energiedichte (5.4a) ist.

Wir können die Impulsstromdichten aller Impulskomponenten in Matrixform auflisten. Die ab -Komponente ist dann gegeben durch

$$T_{ab} := \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{e}_b = -\varepsilon E_a E_b - \mu^{-1} B_a B_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} (\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 + \mu^{-1} \|\mathbf{B}\|^2). \quad (5.16)$$

Dies sind die (kartesischen) Komponenten eines Tensors, der die Impulsstromdichte repräsentiert. Man sieht sofort, dass dieser im vorliegenden Fall isotroper Medien symmetrisch ist: $T_{ab} = T_{ba}$. Die zwei Indizes sind leicht verständlich: Ein Index gibt die Komponente des Impulses an, dessen Stromdichte man betrachtet, der andere den Vektorcharakter seiner Strömungsrichtung. Die Komponenten $-T_{ab}$ sind gerade gleich Komponenten des sogenannten *Maxwell'schen Spannungstensors*.

Im statischen Fall, in dem alle Zeitableitungen verschwinden, also auch $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$ ist, kann somit gemäß (5.10) jede Komponente a der Kraftdichte als Divergenz eines Vektorfeldes ($-\mathbf{T}_a$) geschrieben werden:

$$f_a = -\nabla \cdot \mathbf{T}_a \quad (\text{statischer Fall}) \quad (5.17)$$

Haben wir nun eine Ladungs- und Stromverteilung, die in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ konzentriert ist, d.h. die Träger der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte \mathbf{J} sind in G enthalten, dann ist die a -te Komponente F_a der Gesamtkraft $\mathbf{F} = F_a \mathbf{e}_a$ auf dieses System gegeben durch

$$F_a = \int_G dv f_a = - \int_G dv \nabla \cdot \mathbf{T}_a = - \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}_a. \quad (5.18)$$

Dabei haben wir den Gauß'schen Satz (8.36) benutzt. Das Interessante daran ist, dass sich die gesamte, auf *alle* im Volumen G befindlichen Ladungen und Ströme ausgeübte Kraft als Integral nur über die Oberfläche ∂G von G schreiben lässt. Das interpretiert man üblicherweise als Ausdruck der Gültigkeit des Prinzips von "Actio = Reactio", gemäß dem sich die im Inneren wirkenden Kräfte aller Ladungs- und Strombestandteile paarweise gegeneinander aufheben, bis eben auf die an der Oberfläche, deren Summe dann die Gesamtkraft ausmacht. Hat man es beispielsweise nur mit einem elektrischen Feld zu tun, so wird aus (5.18) mit (5.17) und $d\mathbf{f} = df \mathbf{n}$, wo \mathbf{n} jetzt die nach außen weisende Normale auf der Randfläche ∂G ist:

$$\mathbf{F} = \varepsilon \int_{\partial G} df \left(\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \mathbf{n} \|\mathbf{E}\|^2 \right). \quad (5.19)$$

5.3 Drehimpulserhaltung, Drehimpulsdichte und Drehimpulsstromdichte

Im Gegensatz zum linearen (translatorischen) Impuls ist der Drehimpuls eine Größe, die von der Wahl eines Bezugspunktes \mathbf{c} abhängt. Das ist ja schon in der Mechanik so, wo der momentane Bahndrehimpuls *bezogen auf* \mathbf{c} eines Punktteilchens, das sich am Ort \mathbf{x} befindet und dort den Impuls \mathbf{p} besitzt, gegeben ist durch

$$\mathbf{J}_{\mathbf{c}} = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{p}. \quad (5.20)$$

Meist wird diese Formel ohne das \mathbf{c} geschrieben und der Drehimpuls somit auf den Koordinatenursprung bezogen. Wie schon im Zusammenhang mit den Multipolmomenten diskutiert, wo in ähnlicher Weise eine Abhängigkeit vom Bezugspunkt vorlag, wollen wir aber diese Identifikation nicht automatisch durchführen, da die Wahl eines Koordinatenursprungs *logisch völlig unabhängig* ist von der Wahl eines Bezugspunktes für den Drehimpuls. Erst nach der Wahl eines Bezugspunktes ist der physikalische Begriff ‘‘Drehimpuls’’ überhaupt erst definiert und kann dann – und erst dann! – in jedem beliebigen Koordinatensystem repräsentiert werden.

Genauso wie der Drehimpuls ist auch das Drehmoment abhängig vom Bezugspunkt. Hat man wie wir eine auf die im Raum verteilten Ladungen wirkende Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ am Ort \mathbf{x} (Lorentzkraft), so korrespondiert dieser nach Wahl von \mathbf{c} eine Drehmomentdichte am Ort \mathbf{x} von

$$\mathbf{d}_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.21)$$

Ebenso korrespondiert einer im Raum lokal verteilten Impulsdichte \mathbf{G} des elektromagnetischen Feldes eine lokale Drehimpulsdichte:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{G}(\mathbf{x}). \quad (5.22)$$

Im Folgenden schreiben wir wie üblich

$$\mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{c}, \quad r_a := x_a - c_a \quad (5.23)$$

und unterlassen den expliziten Hinweis auf \mathbf{c} , indem wir die von \mathbf{c} abhängigen Größen nicht wie oben noch immer noch eigens mit einem Index ‘‘ \mathbf{c} ’’ versehen.

Für jede Komponente des Drehimpulses suchen wir nun eine Erhaltungsgleichung, analog denen in (5.10) für jede Komponente des Impulses. Eine solche Gleichung müsste also wie folgt aussehen:

$$d_a := \varepsilon_{abc} r_b f_c = -\dot{D}_a - \nabla \cdot \mathbf{U}_a. \quad (5.24)$$

In dieser hätte dann D_a die Interpretation der Dichte für die a -te Komponente des Drehimpulses und \mathbf{U}_a wäre das Vektorfeld der zugehörigen Stromdichte.

Tasächlich folgt nun ohne weitere größere Rechnung eine Gleichung der Form (5.24) aus der entsprechenden Gleichung (5.11) für für den linearen Impuls. Das ist nicht selbstverständlich und im vorliegenden Fall eine Folge der bereits bemerkten Symmetrie, $T_{ab} = T_{ba}$, des Maxwell'schen Spannungstensors (5.16). Das rechnet man ab besten in Komponenten nach. Definiert man wie in (5.22) (ohne Index c)

$$D_a := \varepsilon_{abc} r_b G_c, \quad (5.25)$$

und entsprechend für die Stromdichte

$$\mathbf{U}_a := \varepsilon_{abc} r_b \mathbf{T}_c, \quad (5.26)$$

mit \mathbf{G} und \mathbf{T}_a wie in (5.15), dann ist

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_a = \varepsilon_{abc} (\nabla r_b) \cdot \mathbf{T}_c + \varepsilon_{abc} r_b \nabla \cdot \mathbf{T}_c \quad (5.27)$$

Mit $\mathbf{T}_c = T_{cd} \mathbf{e}_d$ und $(\nabla r_b) \cdot \mathbf{e}_d = \nabla_d (x_b - c_b) = \delta_{db}$ ist der erste term gleich

$$\varepsilon_{abc} (\nabla r_b) \cdot \mathbf{T}_c = \varepsilon_{abc} T_{cd} \delta_{db} = \varepsilon_{abc} T_{cb} = 0. \quad (5.28)$$

Die Summe über b und c verschwindet, weil ε_{abc} unter Austausch der Indizes antisymmetrisch, T_{db} hingegen symmetrisch ist.

Damit ist gezeigt, dass (5.24) aus (5.10) folgt idem man die Kombinationen (5.25) und (5.26) bildet.

Die Maxwell-Theorie führt also auch auf einen lokalen Erhaltungssatz für Drehimpulse (Plural denn es gibt für jeden Bezugspunkt \mathbf{c} einen). Deren Dichte und Stromdichte sind

$$\mathbf{D} = c^{-2} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{r} \times \mathbf{S} / c^2, \quad (5.29a)$$

$$\mathbf{U}_a = \varepsilon_{abc} r_b \left(-\varepsilon E_c E_d - \mu^{-1} B_c B_d + \frac{1}{2} \delta_{cd} (\varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 + \mu^{-1} \|\mathbf{B}\|^2) \right) \mathbf{e}_d. \quad (5.29b)$$

Völlig analog zum Linear-Impuls gilt nun auch hier, dass in statischen Situationen das auf eine im Gebiet G konzentrierte Ladungs- und Stromverteilung ausgeübte gesamte Drehmoment als Oberflächenintegral geschrieben werden kann

$$D_a = \int_G dv d_a = - \int_G dv \nabla \cdot \mathbf{U}_a = - \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{U}_a. \quad (5.30)$$

Im rein elektrischen Fall wird daraus analog zu (5.19):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \int_{\partial G} d\mathbf{f} \left((\mathbf{r} \times \mathbf{E})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \|\mathbf{E}\|^2 \right). \quad (5.31)$$

Kapitel 6

Allgemeine Integration der MG im Vakuum und homogen-isotropen Medien

6.1 Die Methode der Potentiale

Wir wenden uns wieder den MG in homogenen Medien zu, für die sie die Form (3.3) annehmen. Wir verwenden die sogenannte *Methode der Potentiale*, deren Vorteil darin besteht, dass sie es gestattet, die eine Hälfte der der MG – nämlich die homogenen MG – zu eliminieren, soll heißen, überflüssig zu machen. Mathematische Grundlage dieser Methode ist das Poincaré'sche Lemma, das wir oben auf S. 18, als Lemma 4 besprochen haben.

Wir fangen mit der ersten Gleichung der homogenen MG (3.3a) an: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Nach dem Poincaré'schen Lemma existiert (zumindest lokal) immer ein Vektorfeld \mathbf{A} , so dass

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (6.1)$$

Trägt man dies in die zweite Gleichung (3.3a) der homogenen MG ein, so werden diese äquivalent zu

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = 0 \quad (6.2)$$

Nun wenden wir erneut das Poincaré'sche Lemma auf an indem wir auf die Existenz einer skalaren Funktion ϕ schließen, so dass das rotationsfreie Vektorfeld $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}$ gleich ist dem negativen Gradienten von ϕ . Das negative Vorzeichen ist hier

konventionell gewählt. Also hat man $\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla\phi$, oder

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \dot{\mathbf{A}}. \quad (6.3)$$

Mit diesen beiden Ansätzen (6.1) und (6.1) sind nun die homogenen MG identisch erfüllt und können von nun ab “vergessen” werden. Das schöne daran ist, dass diese Ansätze *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* angenommen werden dürfen, dass also jede Lösung der MG durch diese Ansätze erfasst wird! Gerade das sichert ja das Poincaré’sche Lemma, auf das wir deshalb hier nochmals besonders hinweisen. Man nennt \mathbf{A} das *Vektorpotential* und ϕ das *Skalarpotential*.

Der Plan ist nun, mit diesen Ansätzen in die inhomogenen MG zu gehen und diese als Gleichungen für die beiden Potentiale \mathbf{A} und ϕ aufzufassen. Hat man diese dann bestimmt, folgen die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} gemäß (6.1) bzw. durch Differentiation. Bevor wir das tun, ist es aber wichtig zu verstehen, dass die Potentiale nicht eindeutig bestimmt sind. Hat man nämlich bei gegebenem \mathbf{B} ein \mathbf{A} gefunden das (6.1) erfüllt (was ja lokal immer möglich ist), dann erhalten wir eine andere Lösung \mathbf{A}' durch Addition eines Gradientenfeldes:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' := \mathbf{A} + \nabla\psi. \quad (6.4a)$$

Da die Rotation eines Gradientenfeldes stets verschwindet erfüllen dann sowohl \mathbf{A} als auch \mathbf{A}' die Gleichung (6.1). Außerdem erhält man auf diese Weise nicht nur *manche* sondern in der Tat *alle* Lösungen zu (6.1), denn die Differenz zweier beliebiger Lösungen \mathbf{A} und \mathbf{A}' zu (6.1) mit gleichem \mathbf{B} ist ja rotationsfrei, $\nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$, muss sich also wieder nach dem Poincaré’schen Lemma als Gradientenfeld schreiben lassen, so dass (6.4a) in der Tat für je zwei Lösungen gilt. Ändert man das Vektorpotential \mathbf{A} gemäß (6.4a) ab so muss man auch das Skalarpotential ϕ ändern damit \mathbf{E} ungeändert bleibt. Aus (6.3) sieht man sofort, dass dies nach der Regel

$$\phi \mapsto \phi' := \phi - \dot{\psi} \quad (6.4b)$$

geschehen muss. Mit den beiden Gleichungen (6.4) ist die Willkür in der Festlegung der Potentiale zu festen elektromagnetischen Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} vollständig benannt. Man nennt die Transformationen (6.4) die einen Satz von Potentialen in einen anderen Satz mit gleichen \mathbf{E} und \mathbf{B} transformiert *Eichtransformationen*.

Bemerkung 18. Eichtransformationen definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Potentiale (ϕ, \mathbf{A}) . Dabei heißen zwei Elemente (ϕ, \mathbf{A}) und (ϕ', \mathbf{A}') dieser Menge äquivalent genau dann, wenn ein ψ existiert, so dass $\phi' - \phi = -\dot{\psi}$ und $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla\psi$. Wir erinnern daran, dass die drei Bedingungen für eine Äquivalenzrelation die Reflexivität, die Symmetrie und die Transitivität sind. Die Reflexivität

besagt, dass jedes (ϕ, \mathbf{A}) zu sich selbst äquivalent ist, was mit der Wahl $\psi = 0$ klar ist. Die Symmetrie sagt, dass aus Äquivalenz $(\phi, \mathbf{A}) \sim (\phi', \mathbf{A}')$ die umgekehrte $(\phi', \mathbf{A}') \sim (\phi, \mathbf{A})$ folgt, was mit der Ersetzung von ψ durch $-\psi$ ebenfalls klar ist. Die dritte Bedingung ist die Transitivität, die fordert, dass aus den Äquivalenzen $(\phi, \mathbf{A}) \sim (\phi', \mathbf{A}')$ und $(\phi', \mathbf{A}') \sim (\phi'', \mathbf{A}'')$ die Äquivalenz $(\phi, \mathbf{A}) \sim (\phi'', \mathbf{A}'')$ folgt, was mit $\psi'' := \psi + \psi'$ ebenfalls sofort folgt, falls ψ die erste und ψ' die zweite vermittelt. Ferner erinnern wir daran, dass eine Äquivalenzrelation auf einer Menge gleichbedeutend ist mit einer *Partition* dieser Menge, also einer Zerlegung der Menge in die Vereinigung paarweise disjunkter Untermengen. Diese Untermengen entsprechen gerade den gemäß der gegebenen Relation untereinander äquivalenten Elementen und heißen Äquivalenzklassen. Auf unser Beispiel übertragen sind Punkte innerhalb einer Äquivalenzklasse alle diejenigen Paare von Potentialen, die paarweise zueinander gemäß (6.4) Eich-Äquivalent sind. Jedes Paar (ϕ, \mathbf{A}) dieser Äquivalenzklasse repräsentiert den gleichen physikalischen Zustand. Das bedeutet, dass keine physikalische Observable zwischen verschiedenen Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse unterscheiden kann. Man sagt, die Potentiale repräsentieren die physikalischen Zustände in *redundanter* Weise. Das bedeutet, dass jedes Paar (ϕ, \mathbf{A}) eindeutig einen physikalischen Zustand definiert, aber nicht umgekehrt. In nochmals anderen Worten: Die Abbildung von der Menge der Potentiale (ϕ, \mathbf{A}) in die Menge der physikalischen Zustände – also die Menge der Paare (\mathbf{E}, \mathbf{B}) die die MG erfüllen – ist surjektiv aber nicht injektiv.

Diese Freiheit in der Wahl der Potentiale kann man ausnutzen, um weitere, von den MG nicht implizierte aber für die analytische Behandlung bequeme Bedingungen an die Potentiale zu stellen. Solche Bedingungen nennt man “Eichungen”, “Eich-Bedingungen”, oder, wenn dadurch alle Freiheiten in der Wahl der Potentiale tatsächlich beseitigt werden (was man beweisen muss!) auch “Eich-Fixierungen”. Eine wirklich vollständige Eich-Fixierung wählt aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten aus. Oft wird in der Praxis diese Eindeutigkeit nicht erreicht und es werden zwar echte Untermengen der Äquivalenzklassen ausgewählt, aber diese nicht einpunktig.

Zum Beispiel kann man fordern, dass \mathbf{A} divergenzfrei sein soll. Das nennt man die Coulomb-Eichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Coulomb-Eichung}). \quad (6.5)$$

Dass diese stets erreichbar ist folgt so: Angenommen \mathbf{A} erfüllt diese Bedingung nicht, es ist also $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$. Dann wollen wir einen anderen Repräsentanten $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ der gleichen Äquivalenzklasse wählen der nun $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ erfüllt. Das führt auf die Poisson-Gleichung $\Delta\psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}$ die wir bei gegebener rechten Seite lösen

können sofern diese im Unendlichen schneller als r^{-2} abfällt. \mathbf{A} im unendlichen nicht. Diese Lösung ist sogar eindeutig falls wir noch fordern, dass auch ψ im Unendlichen gegen Null gehen muss. In diesem Fall handelt es sich also wirklich um eine “Eich-Fixierung”

Eine andere, ebenfalls viel benutzte Bedingung ist die Lorenz-Eichung¹:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-2} \dot{\phi} = 0 \quad (\text{Lorenz-Eichung}). \quad (6.6)$$

Bemerkung 19. Statt von Eichtransformationen spricht man in der Physik auch oft von Eichsymmetrien, was aber aus oben genannten Gründen missverständlich sein kann, denn der physikalische Zustand, wird durch eine Eichtransformation ja nicht geändert, nur seine mathematisch-analytische Repräsentation. Wie schon betont gibt keine physikalische Observable (beobachtbare Größe), die eichäquivalente (also durch Eichtransformationen verbundene) Sätze von Potentialen zu unterscheiden gestattet; sie sind physikalisch *ununterscheidbar!*. Also ist eine Eichtransformation keine physikalisch definierbare Operation, denn eine solche muss immer irgend einen physikalischen Aspekt verändern. Symmetrien sind in der Physik aber immer physikalisch definierbare (und im Prinzip durch Observable nachweisbare) Operationen, durch die ein gerade in der Diskussion relevanter Aspekt invariant gelassen wird, aber eben nicht alle! Das Konstatieren einer Symmetrie, bei der ausnahmslos alle Aspekte gleich bleiben, wäre sinnlos, weil man dann die “Operation” nicht von der Identität unterscheiden könnte. \square

Wir fahren nun mit dem allgemeinen Strategie fort und setzen (6.1) und (6.1) in die inhomogenen MG (3.3b) ein. Zunächst ergibt (6.1) in der ersten Gleichung von (3.3b) mit (1.27a)

$$\Delta \phi + \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = -\varepsilon^{-1} \rho. \quad (6.7a)$$

Einsetzen von (6.1) und (6.1) in die zweite inhomogene MG (3.3b) ergibt mit (1.27d):

$$\square \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-2} \dot{\phi}). \quad (6.7b)$$

Dabei haben wir wieder den Wellenoperator (3.7) und die Definition (3.8) von c benutzt.

Bisher haben wir noch keine Eichbedingungen an die Potentiale gestellt. Wir diskutieren sowohl die Coulomb- als auch die Lorenz-Eichung.

¹Benannt nach dem dänischen Physiker Ludvig Lorenz (1829-1891), der verschieden ist von dem Niederländer Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), nach dem die Lorentz-Kraft und die Lorentz-Transformationen benannt sind.

6.2 Integration in Coulomb-Eichung

Fordern wir (6.5) dann vereinfacht sich (6.7) zu

$$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon, \quad (6.8a)$$

$$\square\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} - \nabla\dot{\phi}/c^2 =: \mu\mathbf{J}_\perp \quad (6.8b)$$

Dabei haben wir zur Abkürzung gesetzt (beachte $1/c^2 = \mu\varepsilon$)

$$\mathbf{J}_\perp := \mathbf{J} - \varepsilon\nabla\dot{\phi}. \quad (6.8c)$$

Damit sind die Gleichungen für die Potentiale soweit entkoppelt, dass man sie bei bekannten Quellen durch sukzessive Integrationen lösen kann. Zunächst wird (6.8a) gelöst durch

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dv' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (6.9a)$$

Hat man damit ϕ bestimmt kann man aus \mathbf{J} den “transversalen” Strom gemäß (6.8c) bestimmen. Sodann kann man aus (6.8b) das Vektorpotential \mathbf{A} bestimmen, etwa durch die retardierte Green-Funktion:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \frac{\mathbf{J}_\perp\left(t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{c}, \mathbf{x}'\right)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (6.9b)$$

Das letzte Integral hat eine sehr einfache interpretation: Es ist das Integral der Funktion \mathbf{J}_\perp über den Rückwärtslichtkegel am Aufpunkt (t, \mathbf{x}) . Es ist aber nicht die einzige Lösung: auch avancierte Potentiale sind möglich, oder eine Linearkombination von retardierten und avancierten. Wir werden das ausführlicher weiter unten behandeln.

Man beachte, dass \mathbf{J}_\perp divergenzfrei ist (deshalb die Bezeichnung mit \perp). Das folgt sofort aus (6.8c), denn wegen (6.8a) ist ja $\Delta\dot{\phi} = -\dot{\rho}/\varepsilon$ und somit $\nabla\cdot\mathbf{J}_\perp = \nabla\cdot\mathbf{J} + \dot{\rho}$, was wegen der lokalen Ladungserhaltung (3.1) verschwindet.

Bemerkung 20. Man beachte auch, dass wegen $\dot{\rho} = -\nabla\cdot\mathbf{J}$ die Definition (6.8c) unter Benutzung von (6.9a) auch so geschrieben werden kann:

$$\mathbf{J}_\perp(t, \mathbf{x}) := \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \int dv' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (6.10)$$

Das macht klar, dass \mathbf{J}_\perp eine *nichtlokale Funktion* von \mathbf{J} ist. Dabei ist folgende Sprechweise üblich: Gegeben zwei Funktionen F und F' mit gleichem Definitionsbereich. Man sagt F' ist *ultralokales* Funktional von F , wenn für jedes x der Wert

$F'(x)$ durch den Wert $F(x)$ (an der gleichen Stelle) bestimmt ist. Man spricht von *lokalen* Funktional, wenn der Wert $F'(x)$ durch die Werte von F und *endlich* vieler Ableitungen von F , wieder an der gleichen Stelle x bestimmt ist. Ist die Funktion F' aus F berechenbar aber nicht in diesem Sinne lokal, so heißt sie nichtlokal. Ist F' lokales Funktional von F so gilt offensichtlich nach dieser Definition Folgendes: Verschwindet F in einem offenen Gebiet G des Definitionsbereichs dann ist F' in G konstant (klar, denn die Werte von F und allen Ableitungen sind ja Null). Im Umkehrschluss folgt: Ist F' in einem Gebiet G nicht konstant in dem F aber identisch verschwindet, dann kann F' kein lokales Funktional von F sein. genau das trifft aber für die Beziehung (6.10) zwischen \mathbf{J} und \mathbf{J}_\perp zu. Hat insbesondere kompakten Träger, so wird dies nicht für \mathbf{J}_\perp gelten. In diesem Sinne “trägrervergrößernd” zu sein ist eine charakteristische Eigenschaft nichtlokaler Funktionale.

6.3 Integration in Lorenz-Eichung

Jetzt fordern wir (6.6). Damit verschwindet der zweite Term der linken Seite von (6.7a) nicht mehr wie bei der Coulomb-Eichung sondern wird zu $-c^{-2}\ddot{\phi}$, wie man durch Zeitableitung von (6.6) sieht. Beide Terme der linken Seite kombinieren zusammen zu $-\square\phi$, so dass (6.7a) äquivalent ist zu

$$\square\phi = \rho/\varepsilon. \quad (6.11a)$$

Ganz einfach wird es bei (6.7b), wo der zweite Term der rechten Seite der Gradient der Lorenz-Eichbedingung (6.6) ist und deshalb verschwindet. Man erhält also ganz analog zum Skalarpotential die Gleichung

$$\square\mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (6.11b)$$

In diesem Fall kann man beide Gleichungen durch z.B. retardierte Green-Funktionen integrieren:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dv' \frac{\rho\left(t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}{c}, \mathbf{x}'\right)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (6.12a)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}{c}, \mathbf{x}'\right)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (6.12b)$$

Man beachte, dass diese Gleichung die Lorenz-Eichbedingung (6.6) eine Folge der Ladungserhaltung (3.1) erscheinen läßt, die wir natürlich als von den Quellen erfüllt annehmen.

6.4 Allgemeines über retardierte und avancierte Potentiale

Wir wollen zunächst explizit nachweisen, dass die oben angeführten retardierten, aber auch die avancierten Potentiale Lösungen der Wellengleichung sind. Dazu gehen wir nochmals allgemein von der Wellengleichung für eine Funktion F aus deren Quelle eine weitere Funktion mit f sei:

$$\square F = f. \quad (6.13)$$

Wir behaupten (und haben oben im Falle des Minuszeichens bereits benutzt), dass die folgenden beiden Funktionen Lösungen dieser Gleichung sind:

$$F_{\mp}(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \frac{f(t_{\mp}, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (6.14a)$$

wobei

$$t_{\mp} = t_{\mp}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') := t \mp \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{c} \quad (6.14b)$$

Das rechnen wir explizit vor. Dazu müssen wir den Integranden der rechten Seite zweimal nach t und zweimal nach \mathbf{x} differenzieren. Wichtig dabei ist, dass der Integrand von \mathbf{x} nicht nur durch den Nenner $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ von \mathbf{x} abhängt, sondern auch durch das retardierte bzw. avancierte Zeitargument $t_{\mp}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Wir führen folgende abkürzende Schreibweisen ein:

$$\mathbf{r} := \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \quad \mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.15)$$

Dann gelten die folgenden Relationen:

$$\nabla r = \mathbf{n}, \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{n}}{r^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{2}{r}. \quad (6.16)$$

Insbesondere gilt:

$$\nabla t_{\mp} = \mp \mathbf{n}/c \quad (6.17)$$

Schreiben wir jetzt einfach f für $f(t_{\mp}, \mathbf{x}')$, dann ist

$$\nabla f = \mp \dot{f} \mathbf{n}/c, \quad (6.18)$$

wobei \dot{f} die partielle Ableitung von f nach dem ersten Argument bezeichnet, wieder ausgewertet bei $t_{\mp}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$, Anwenden einer weiteren Ableitung liefert

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla \cdot \nabla f = \mp \left(\nabla \dot{f} \cdot \mathbf{n}/c + (\dot{f}/c) \nabla \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= \ddot{f}/c^2 \mp 2\dot{f}/(cr). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Also

$$\begin{aligned}\Delta(f/r) &= \Delta f/r + 2\nabla f \cdot \nabla(1/r) + f\Delta(1/r) \\ &= \ddot{f}/(rc^2) \mp 2\dot{f}/(cr^2) \mp 2\dot{f}(\mathbf{n}/c) \cdot (-\mathbf{n}/r^2) + f\Delta(1/r) \\ &= \ddot{f}/(rc^2) + f\Delta(1/r)\end{aligned}\quad (6.20)$$

oder

$$\square(f/r) := \ddot{f}/(rc^2) - \Delta(f/r) = -f\Delta(1/r) = 4\pi f \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (6.21)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt (8.64) benutzt.

Damit können wir nun (6.14) direkt bestätigen. Dazu wenden wir den Wellenoperator \square auf beide Seiten an und vertauschen ihn auf der rechten Seite mit der Integration, so erhalten wir, indem wir die Argumente in f im zweiten Schritt wieder explizit anschreiben

$$\begin{aligned}\square F_{\mp}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} dv' \square \left(\frac{f}{r} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dv' f \left(t \mp \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{c}, \mathbf{x}' \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= f(t, \mathbf{x}).\end{aligned}\quad (6.22)$$

Damit ist der Beweis erbracht, dass sowohl die retardierten Funktionen F_- als auch die avancierten Funktionen F_+ die Gleichung (6.13) für vorgegebene rechte Seite f erfüllen.

Es ist klar, dass mit den Lösungen F_- und F_+ auch jede Linearkombination F_a der Form

$$F_a := (1 - a)F_- + aF_+ = F_- + a(F_+ - F_-), \quad a \in \mathbb{R} \quad (6.23)$$

die Gleichung (6.13) mit gleichbleibender rechter Seite f erfüllen. In dieser einparametrischen Schar entspricht $a = 0$ der retardierten und $a = 1$ der avancierten Lösung. Wie in der zweiten Gleichheit von (6.23) angedeutet kann man das auch so ausdrücken, dass man zur einer festen Lösung von (6.13) – hier der retardierten F_- – ein Vielfaches einer Lösung der *homogenen* Gleichung addiert. Man beachte, dass die homogene Gleichung $\square F = 0$ ja in der Tat von $F_+ - F_-$ gelöst wird.

Viele Lehrbücher argumentieren, nur die retardierte Lösung sein “physikalisch”² weil nur sie im Einklang mit dem “Kausalitätsprinzip” sei. Damit ist gemeint, dass

²Als allgemeine Regel gilt, dass man Aussagen, etwas sei aus diesem oder jenem Grund “unphysikalisch”, grundsätzlich skeptisch begegnen sollte. Sehr häufig erweisen sich solche Argumente bei genauerer Prüfung als nicht stichhaltig.

das Feld F zum Zeitpunkt t ja nur von den Quellen zu früheren – also retardierten –, nicht aber späteren – also avancierten – Zeitpunkten abhängen kann. Dieses Argument verwechselt aber Determinismus und Kausalität. Das elektromagnetische Feld in der Gegenwart kann sehr wohl durch den Zustand der Quellen zu einem späteren Zeitpunkt bestimmt und berechenbar sein, etwa durch einen Absorptionsvorgang, der in der Zukunft angenommen wird. Es ist durchaus sinnvoll, zu fragen, wie ein gegenwärtiges Feld beschaffen sein muss um in der Zukunft ein bestimmtes Antennensignal zu erzeugen. Damit ist ja nicht gesagt, dass dieser Vorgang in der Zukunft das Feld in der Gegenwart irgendwie ursächlich (kausal) erzeugt hätte!

Allgemein gilt ja, dass jede Lösung F der linear-inhomogenen Differentialgleichung (6.13) dargestellt werden kann als Summe einer fest gewählten partikulären Lösung und einer Lösung der homogenen Gleichung. Wählt man als partikuläre Lösung die retardierte, so schreibt man

$$F = F_- + F_{\text{in}}; \quad (6.24)$$

wählt man hingegen die avancierte, so schreibt man

$$F = F_+ + F_{\text{out}}. \quad (6.25)$$

Dabei stehen “in” und “out” für die einlaufenden (englisch: “ingoing”) und auslaufenden (englisch: “outgoing”) Felder zu Zeiten $t \rightarrow -\infty$ bzw. $t \rightarrow +\infty$. Die Wahl der retardierten Lösung ist also dann die richtige, wenn man weiss bzw. annimmt, dass die einlaufenden Felder verschwinden, also dass $F_{\text{in}} = 0$. Alle vorhandenen Felder werden dann erst “im Laufe der Zeit”, also in Richtung zunehmender t , durch die Quellen (bewegte Ladungen) erzeugt. Diese Annahme trifft man bei der Diskussion von Prozessen der Abstrahlung (Emission), deren Diskussion daher natürlicherweise retardierte Felder benutzt. Bei Absorptionsprozessen wäre es umgekehrt. Grundsätzlich gilt aber weiterhin, dass jede Lösung F sowohl mit Hilfe des retardierten F_- also auch des avancierten F_+ berechnet werden, vorausgesetzt man kennt die freien Felder F_{in} bzw. F_{out} . Hier liegt der eigentliche Kern der Frage, welche der beiden Lösungen F_{\mp} dem Problem angemessen sind. Die zeitliche Asymmetrie, die dadurch zustande kommt, dass man eine entweder F_- oder F_+ wählt hat also nichts mit den MG zu tun – diese sind ja wie anfangs gezeigt invariant unter Zeitumkehr – sondern damit, an welchem der beiden Enden $t \rightarrow \mp\infty$ der Zeitachse wir eine Kenntnis der Felder Voraussetzen, also etwa $F_{\text{in}} = 0$, was eine Bedingung für F bei $t \rightarrow -\infty$ entspricht.

Kapitel 7

Felder bewegter Punktladungen

7.1 Die Liénard-Wiechert Potentiale

Wir schließen an das Ende von Kapitel 6 an und benutzen die Ausdrücke (6.12) für Skalar- und Vektorpotential in der Lorenzgleichung zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes einer Punktladung, die sich entlang einer Bahn

$$t \mapsto \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad (7.1)$$

im Raum bewegt. Die Punktladung denken wir uns im Vakuum, so dass $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$. Außerdem interessieren wir uns ausschließlich für die elektromagnetischen Felder, die von dieser Ladung in Laufe ihrer Geschichte erzeugt werden. Es sollen also keine einlaufenden Felder F_{in} existieren, so dass wir die Lösungen in *retardierter* Form schreiben. Für die retardierte Zeit schreiben wir von jetzt an t_r statt wie vorher t_- .

Diese Bahn des Teilchens sei eine weitgehend beliebige, lediglich eingeschränkt durch die Bedingungen der mindestens zweimal stetigen Differenzierbarkeit und zusätzlich durch die Bedingung, dass ihr Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{z}}$ zu jeder Zeit einen Betrag unterhalb der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum besitzt (die wir hier mit c bezeichnen):

$$\|\dot{\mathbf{z}}\| < c. \quad (7.2)$$

Im Folgenden bedienen wir uns auch der üblichen Schreibweise,

$$\boldsymbol{\beta}(t) := \mathbf{z}(t)/c, \quad \beta := \|\boldsymbol{\beta}\|. \quad (7.3)$$

Es gilt also $\beta(t) < 1$ für alle t .

Die Ladungs- und Stromverteilung einer punktförmigen Ladung e auf der Bahn (7.1) sind gegeben durch

$$\rho(t', \mathbf{x}') = q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}(t')), \quad (7.4a)$$

$$\mathbf{J}(t', \mathbf{x}') = q \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}(t')) \dot{\mathbf{z}}(t'). \quad (7.4b)$$

Dies setzen wir in die Ausdrücke (6.12a) und (6.12b) für die Potentiale ein, die wir nochmals in einer etwas kompakteren Form anschreiben:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int dv' \frac{\rho(t_r, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (7.5a)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int dv' \frac{\mathbf{J}(t_r, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (7.5b)$$

wobei

$$t_r := t_r(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}{c} \quad (7.5c)$$

die sogenannte „retardierte Zeit“ bezeichnet. Man beachte, dass diese Gleichung gerade besagt, dass das Ereignis (t_r, \mathbf{x}') auf dem Rückwärtslichtkegel des Aufpunktes (t, \mathbf{x}) liegt. Hält man den Aufpunkt (t, \mathbf{x}) fest so wird t_r eine Funktion des Integrationspunktes \mathbf{x}' . Das ist für das Folgende sehr wichtig!

Setzen wir jetzt die Ladungs- und Stromverteilungen (7.4) für das Punktteilchen ein, so erhalten wir

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{eq}{4\pi\epsilon} \int dv' \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}(t_r))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (7.6a)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu q}{4\pi} \int dv' \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}(t_r)) \mathbf{z}(t_r)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (7.6b)$$

Die Integration über \mathbf{x}' kann nun ausgeführt werden, wobei man aber die oben bereits gemachte Bemerkung berücksichtigen muss, dass das Argument der $\delta^{(3)}$ -Funktion nicht nur in der direkt gezeigten Weise von \mathbf{x}' abhängt, sondern auch noch über das Argument t_r von \mathbf{z} ; also in einer - scheinbar - kaum kontrollierten Weise (wir lassen ja die Funktion $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ offen). Trotzdem wird uns die direkte Integration gelingen, wenn wir uns einer allgemeinen Formel für δ -Distributionen erinnern, die wir uns jetzt in Erinnerung rufen.

Im \mathbb{R}^n betrachten wir das Integral

$$\int \delta^{(3)}(\mathbf{y}(\mathbf{x}')) f(\mathbf{x}') dv' \quad (7.7)$$

mit Testfunktion f . Hier ist $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{x}')$ eine differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit nicht entarteten Nullstellen ist. Letzteres bedeutet, dass die $(n \times n)$ Jacobi-Matrix $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}'$ an den Nullstellen den Höchstang n hat, insbesondere also, dass an den Nullstellen ihre Determinante nicht verschwindet. Dann dürfen wir in einer Umgebung der Nullstellen \mathbf{y} statt \mathbf{x}' als Koordinaten verwenden und erhalten nach den Standardregeln für den Wechsel von Integrationsvariablen (wir schreiben jetzt $d^3 x'$ statt dv' um an die übliche Schreibweise $\partial \mathbf{x}' / \partial \mathbf{y}$ für die Jacobi-Matrix anzuknüpfen)

$$\begin{aligned} \int \delta^{(3)}(\mathbf{y}(\mathbf{x}')) f(\mathbf{x}') d^3 x' &= \int \delta^{(3)}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x}'(\mathbf{y})) \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{y}} \right) \right| d^3 y \\ &= \int \delta^{(3)}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x}'(\mathbf{y})) \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \right) \right|^{-1} d^3 y \quad (7.8) \\ &= \sum_a \frac{f(\mathbf{x}_a)}{\left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \right)_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}_a} \right|}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnen \mathbf{x}_a die Nullstellen der Funktion $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{x}')$.

Übertragen auf unseren Fall ist (für $n = 3$)

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}') = \mathbf{x}' - \mathbf{z}(t_r(\mathbf{x}')) \quad (7.9)$$

mit der Funktion $t_r(\mathbf{x}')$ die aus (7.5c) entsteht wenn man (t, \mathbf{x}) fest wählt. Also sind die Komponenten der Jacobi-Matrix gegeben durch

$$\frac{\partial y_a}{\partial x'^b} = \delta_{ab} - \dot{z}_a(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial x'^b}. \quad (7.10)$$

Gemäß (7.5c) ist aber

$$\frac{\partial t_r}{\partial x'^b} = \frac{1}{c} \frac{x_b - x'_b}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} = n_b / c \quad (7.11)$$

Dabei haben wir für den Einheitsvektor vom Quell- zum Aufpunkt die Abkürzung gesetzt

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (7.12)$$

Diese Bezeichnung werden wir im Folgenden beibehalten. Damit ergibt (7.10)

$$\frac{\partial y_a}{\partial x'^b} = \delta_{ab} - \beta_a(t_r) n_b, \quad (7.13)$$

wobei wir auch die Bezeichnungsweise (7.3) verwendet haben. Letztlich folgt¹

$$\det \left| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \right| = 1 - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \mathbf{n}. \quad (7.14)$$

Dies müssen wir gemäß (7.8) auswerten an den Nullstellen der Funktion $\mathbf{y}(\mathbf{x}')$, also dort, wo \mathbf{x}' gemäß (7.9) der impliziten Gleichung $\mathbf{x}' = \mathbf{z}(t_r(\mathbf{x}'))$ genügt. Dies Gleichung hat eine eindeutige Lösung für \mathbf{x}' , denn diese Gleichung verlangt ja, dass bei gegebenem Aufpunkt (t, \mathbf{x}) der Quellpunkt (t_r, \mathbf{x}') auf dessen Rückwärtslichtkegel liegt. Für die Teilchenbahn $t \rightarrow \mathbf{z}(t)$ gibt es aber höchstens eine Zeit t_r zu der (7.9) für festes (t, \mathbf{x}) erfüllt ist, also $c(t - t_r) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\|$ gilt. Denn gäbe es eine zweite Lösung $c(t - t'_r) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t'_r)\|$, dann hätte man durch Abziehen der zweiten von der ersten Gleichung $c(t'_r - t_r) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t'_r)\| \leq \|\mathbf{z}(t'_r) - \mathbf{z}(t_r)\|$ (letzteres nach der Dreiecksungleichung). Diese Ungleichung besagt, dass sich das Teilchen zwischen den Zeitpunkten t'_r und t_r mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von mindestens der Lichtgeschwindigkeit bewegt haben muss, was der Ausgangsannahme (7.2) widerspricht. Also gibt es höchstens eine Lösung. Diese existiert auch tatsächlich, wenn die Teilchenbahn so ist, dass sie den Rückwärtslichtkegel an (t, \mathbf{x}) schneidet, wenn also das Teilchen von (t, \mathbf{x}) aus zu irgend einem Raum-Zeit-Punkt seiner “gesehen” werden kann. Man kann zeigen, dass das nur dann nicht der Fall ist, wenn das Teilchen für alle vergangenen Zeiten eine endliche untere Schranke an seine Beschleunigung besitzt, also immer mit einem endlichen Mindestbetrag beschleunigt gewesen wäre, was wir hier explizit ausschließen wollen.² Dann können wir als Endergebnis dieser Diskussion feststellen, dass es zu gegebenem (t, \mathbf{x}) *genau* ein retardierte Zeit t_r gibt, für die (7.5c) für $\mathbf{x}' = \mathbf{z}(t_r)$ gilt, wir also eine Lösung t_r der Gleichung

$$t_r = t - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\|}{c} \quad (7.15)$$

für jedes feste (t, \mathbf{x}) haben. Wenn wir nun diese Gleichung für jedes Paar (t, \mathbf{x}) nach t_r lösen, erhalten wir t_r als Funktion von t und \mathbf{x} . Im Folgenden wird also unter t_r immer diese Funktion $t_r(t, \mathbf{x})$ zu verstehen sein. Dieses t_r tritt auf als

¹Die Determinante einer Matrix mit Komponenten $\delta_b^a - A_B^a$ ist immer gegeben durch $1 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, wie man z.B. durch Drehung der Basis sieht, so dass einer der Basisvektoren, etwa \mathbf{e}_1 , in Richtung eines der Vektoren, etwa \mathbf{A} , zeigt. Dann ist nur A^1 von Null verschieden und die Determinante offensichtlich gleich dem Produkt der Diagonalelemente, also $1 - A^1 B_1 = 1 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Die Determinante ist aber invariant unter unimodularen Basistransformationen, insbesondere unter Drehungen.

²Eine in der Vergangenheit unbeschleunigte Bewegung verläuft (in der Vergangenheit) auf einer Geraden, deren Geschwindigkeit kleiner ist als die des Lichts, wird also immer nach einer endlichen Zeit vom Rückwärtslichtkegel geschnitten. Beschleunigte Bewegungen verlaufen zwar auch immer mit Unterlichtgeschwindigkeit, können sich aber in der Vergangenheit den Lichtkegel asymptotisch annähern ohne diesen jemals zu schneiden. Dazu ist allerdings eine - in der Vergangenheit - immerwährende Beschleunigung notwendig.

Argument in $\mathbf{z}(t_r)$ und $\dot{\mathbf{z}}(t_r)$, sowie im Einheitsvektor (7.16) vom Quell- zum Aufpunkt, der dadurch zu einer Funktion von (t, \mathbf{x}) wird:

$$\mathbf{n}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{z}(t_r)} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r(t, \mathbf{x}))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r(t, \mathbf{x}))\|} \quad (7.16)$$

Damit haben wir nun endlich alles zusammen, um die Integrale (7.6) auszuführen. Wir verwenden (7.8) mit (7.14) in und berücksichtigen die obige Diskussion, wonach t_r , wo immer es als Argument auftritt, als Funktion von (t, \mathbf{x}) verstanden wird. Es folgt

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\|} \cdot \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x})} \quad (7.17a)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{qc\boldsymbol{\beta}(t_r)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\|} \cdot \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x})} \quad (7.17b)$$

$$= \boldsymbol{\beta}(t_r)(1/c) \phi(t, \mathbf{x}). \quad (7.17c)$$

wobei wir ab jetzt stets $\boldsymbol{\beta}$ statt $\dot{\mathbf{z}}/c$ schreiben und im letzten Gleichheitszeichen noch $\mu c = 1/(c\epsilon)$ verwendet haben. Dies sind die berühmten Liénard-Wiechert-Potentiale.³

Für das Folgende ist es bequemer, die Schreibweise dieser Formeln etwas zu vereinfachen in dem wir die beiden Ausdrücke in den Nennern zusammenfassen. Dazu kürzen wir ab

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r), \quad R(t, \mathbf{x}) := \|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\|, \quad (7.18)$$

so dass das Produkt der Nenner geschrieben werden kann als

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\| (1 - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x})) = R(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t, \mathbf{x}). \quad (7.19)$$

Dann vereinfacht sich (7.17) zu

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}, \quad (7.20a)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu c}{4\pi} \cdot \frac{q\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}, \quad (7.20b)$$

wo wir jetzt die Argumente nicht mehr mit angeschrieben haben um die wirklich einfache Bauart der Ausdrücke möglichst klar zur Geltung zu bringen. Natürlich muss man sich der Abhängigkeit aller vorkommenden Größen von (t, \mathbf{x}) immer bewusst sein, insbesondere wenn diese Abhängigkeit implizit durch eine Abhängigkeit von t_r erfolgt.

³Benannt nach dem Franzosen Alfred-Marie Liénard (1869-1958) und Emil Johann Wiechert (1861-1928).

7.2 Felder zu den Liénard-Wiechert Potentialen

Zur Berechnung des elektrischen und magnetischen Feldes aus den Potentialen durch (6.1) bzw. (6.3) benutzen wir nun die einfach strukturierten Ausdrücke (7.20). Dazu müssen wir Ableitungen nach t und \mathbf{x} bilden, was insbesondere dort zunächst nicht offensichtlich ist, wo die betreffenden Größen über t_r von diesen Variablen abhängen. Insbesondere müssen wir also wissen, die wir die Ableitungen von t_r nach t und \mathbf{x} wieder durch die kinematischen Größen der Bahn ausdrücken können *ohne* die Bahn explizit zu kennen – wir wollen unser Problem ja allgemein lösen!

Wir beginnen mit Gleichung (7.15) und differenzieren diese nach t . Wir schreiben $\partial t_r / \partial t = \dot{t}_r$ und erhalten (auch hier unterdrücken wir das explizite Anschreiben der Argumente). anzuschreiben):

$$\dot{t}_r = 1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \dot{t}_r, \quad (7.21)$$

was aufgelöst nach \dot{t}_r

$$\dot{t}_r = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (7.22)$$

ergibt.

Als nächstes differenzieren wir (7.15) nach \mathbf{x} , nehmen also den Gradienten. Wir rechnen zunächst in Komponenten (ein Strich an z bezeichnet die Ableitung nach dem Argument; hier t_r):

$$\begin{aligned} \nabla_a t_r &= -\frac{1}{c} \frac{(x_b - z_b)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|} \nabla_a (x_b - z_b) = -\frac{1}{c} \frac{(x_b - z_b)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|} (\delta_{ab} - z'_b \nabla_a t_r) \\ &= -n_a / c + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \nabla_a t_r. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Wieder können wir dies nach $\partial_a t_r$ auflösen und das Ergebnis in Vektornotation als ∇t_r schreiben:

$$\nabla t_r = -\frac{\mathbf{n}/c}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (7.24)$$

Die Ableitungen von R nach t und \mathbf{x} erhält man am besten mit Hilfe der Identität (7.15) die mit der Notation (7.18) nun lautet

$$R = c(t - t_r). \quad (7.25)$$

Partielle Ableitung nach t liefert unter Benutzung von (7.15)

$$\dot{R} = c(1 - \dot{t}_r) = -c \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (7.26)$$

Und genauso kann der Gradient von R mit Hilfe von (7.25) geschrieben werden:

$$\nabla R = -c \nabla t_r = \frac{\mathbf{n}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (7.27)$$

Schließlich müssen wir noch die partiellen Zeit- und Ortsableitungen der einzelnen Vektorkomponenten \mathbf{R} und $\boldsymbol{\beta}$ ausrechnen. Für \mathbf{R} sind diese gegeben durch

$$\dot{\mathbf{R}} = -\partial_t \mathbf{z}(t_r) = -c \boldsymbol{\beta} \dot{t}_r = -\frac{c \boldsymbol{\beta}}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (7.28)$$

und

$$\nabla_a R_b = \nabla_a (x_b - z_b(t_r)) = \delta_{ab} - c \beta_b \nabla_a t_r = \delta_{ab} + \frac{n_a \beta_b}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}. \quad (7.29)$$

Für $\boldsymbol{\beta}$ erhalten wir (hier bezeichnet ein Strich an $\boldsymbol{\beta}$ wieder die Ableitung nach dem Argument; hier t_r)

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}' \dot{t}_r = \frac{\boldsymbol{\beta}'}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad (7.30)$$

und

$$\nabla_a \beta_b = \beta'_b \nabla_a t_r = -\frac{n_a \beta'_b}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \quad (7.31)$$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{\beta}'$ die Ableitung von $\boldsymbol{\beta}$ nach dem Argument t_r , also die Beschleunigung des Teilchens zum retardierten dividiert durch c .

Damit haben wir alles zusammen um die Ableitungen der Ausdrücke (7.20) bilden zu können. Differentiation und Einsetzen der obigen Ausdrücke gibt

$$\nabla \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \{ (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} - (1 - \beta^2 + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}'/c) \mathbf{R} \} \quad (7.32a)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \{ (R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}) (-\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' R/c) + (1 - \beta^2 + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{R}/c) R \boldsymbol{\beta} \} \quad (7.32b)$$

Aus ihrer negativen Summe erhalten wir das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \{ -(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})(R/c) \boldsymbol{\beta}' + (1 - \beta^2 + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{R}/c) (\mathbf{R} - R \boldsymbol{\beta}) \} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \{ -\mathbf{R} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta}'/c + (1 - \beta^2 + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{R}/c) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \{ (1 - \beta^2) (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}'/c] \}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Die beiden Terme des letzten Ausdrucks entsprechen einer Zerlegung nach Beschleunigungsunabhängigen und -abhängigen Teil, die gleichzeitig auch eine Zerlegung nach dem Abfallverhalten für $R \rightarrow \infty$ ist: Der beschleunigungsunabhängige Anteil hat ein R^{-2} Verhalten während der beschleunigungsabhängige Anteil langsamer, nämlich mit R^{-1} abfällt. Wir werden darauf genauer im Zusammenhang mit einer analogen Zerlegung des Magnetfeldes eingehen.

Die Berechnung des Magnetfeldes ist analog der des elektrischen und kann zum Teil sogar wegen der Beziehung (7.17c) auf diese zurückgeführt werden. Wegen (7.17c) gilt ja

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (\boldsymbol{\beta}\phi/c) \\ &= \nabla\phi \times \boldsymbol{\beta}/c + (\phi/c)\nabla \times \boldsymbol{\beta} \\ &= \nabla\phi \times \boldsymbol{\beta}/c - (\phi/c^2)\frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}'}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}},\end{aligned}\tag{7.34}$$

wobei wir (7.31) im letzten Schritt benutzt haben. Setzen wir darin den Ausdruck (7.20a) für ϕ und (7.32a) für $\nabla\phi$ ein, so folgt für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left[- (1 - \beta^2 + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}'/c) \mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta}/c \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \cdot \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}'}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \left\{ - (1 - \beta^2 + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}'/c) \mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta}/c \right. \\ &\quad \left. - [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})] \mathbf{R} \times \boldsymbol{\beta}'/c^2 \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{R}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times \left\{ - (1 - \beta^2 + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}'/c) \boldsymbol{\beta} \right. \\ &\quad \left. - [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})] \boldsymbol{\beta}'/c \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{R}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times \left\{ (1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + (R \cdot \boldsymbol{\beta}'/c)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \right. \\ &\quad \left. - [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})] \boldsymbol{\beta}'/c \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{R}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \mathbf{n} \times \left\{ (1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times (\boldsymbol{\beta}'/c)] \right\}\end{aligned}\tag{7.35}$$

Dabei haben wir im ersten Gleichheitszeichen sofort benutzt, dass wegen des Vektorproduktes mit $\boldsymbol{\beta}$ der zu $\boldsymbol{\beta}$ proportionale Teil von $\nabla\phi$ herausfällt. Genauso haben

wir im 4. Gleichheitszeichen benutzt, dass wegen des globalen Vektorproduktes mit \mathbf{n} das freie β in der geschweiften Klammer durch $-(\mathbf{n} - \beta)$ ersetzt werden kann. Ziel dieser Umformung ist, dass nun der in der geschweiften Klammer stehende Term identisch ist zu dem in der geschweiften Klammer von (7.38), woraus durch Vergleich sofort die wichtige Beziehung folgt:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (7.36)$$

Damit ist klar, dass das magnetische Feld genauso wie das elektrische in zwei unterschiedlich schnell abfallende Teile zerfällt, wobei das der langsam abfallende Teil proportional zur Beschleunigung ist. Außerdem folgt sofort aus (7.36)

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (7.37)$$

7.3 Erster Spezialfall: Momentan ruhende Ladung und Abstrahlungsleistung bei Beschleunigung

Wir betrachten den Spezialfall, in dem die Ladung zum retardierten Zeitpunkt t_r ruht, oder doch zumindest eine gegen die Lichtgeschwindigkeit vernachlässigbare Geschwindigkeit. Dann setzen wir $\beta = 0$ und erhalten aus (7.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left\{ \mathbf{n} + R \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta'/c) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left\{ \mathbf{n} - (R/c) [\beta' - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \beta')] \right\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Der zweite in eckigen Klammern stehende Ausdruck ist gerade die zu \mathbf{n} orthogonale Komponente der Beschleunigung, so dass die zwei Terme in der geschweiften Klammer orthogonal sind.

Für den Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0$ ergibt (7.36) allgemein

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\mathbf{n} \|\mathbf{E}\|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right). \quad (7.39)$$

Im speziellen Fall der langsam bewegten Ladung ist der Strahlungsanteil – also der langsam abfallende Anteil von (7.38) – einfach

$$\mathbf{E}_{rad} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{\beta' - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \beta')}{R} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{\beta'_{\perp}}{R}, \quad (7.40)$$

wo β'_{\perp} die zu \mathbf{n} senkrechte Komponente von β' bezeichnet. Man beachte, dass der Vektor \mathbf{E} in der von \mathbf{n} und β' aufgespannten Ebene und senkrecht zu \mathbf{n} , die

in Richtung \mathbf{n} abgestrahlte Welle also parallel zur Beschleunigung des Teilchens (zum retardierten Zeitpunkt) polarisiert ist. Nur der Anteil \mathbf{E}_{rad} trägt zur Abstrahlung bei denn alle anderen Terme fallen schneller ab als R^{-2} . Sein Poynting-Anteil ist nur durch den 1. Term in (7.39) gegeben da \mathbf{E}_{rad} orthogonal zu \mathbf{n} ist. Also

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \|\beta'_{\perp}\|^2 \mathbf{n}. \quad (7.41)$$

Ist θ der Winkel zwischen β' (Beschleunigung/ c) und \mathbf{n} (Verbindung vom Quell- zum Aufpunkt) so ist

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \left(\frac{1}{R} \right)^2 \|\beta'\|^2 \sin^2 \theta \mathbf{n}. \quad (7.42)$$

Die Abstrahlung pro Raumwinkel ist also transversal zur Beschleunigungsrichtung am größten und verschwindet parallel und entgegengesetzt-parallel zur Beschleunigungsrichtung vollständig.

Integration über eine Sphäre vom Radius R ergibt einen von R unabhängigen Betrag der Abstrahlungsleistung, weil wir uns von vornherein nur auf die $1/R$ Terme beschränkt haben, was natürlich nur im Limes $R \rightarrow \infty$ korrekt ist. Das Ergebnis dieser Integration ist, mit ($z := \cos \theta$)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 dz (1 - z^2) = \frac{4}{3}, \quad (7.43)$$

gegeben durch

$$P = \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 \|\beta'\|^2 2\pi \frac{4}{3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{q^2}{c^3} \cdot \|c\beta'\|^2. \quad (7.44)$$

Dies ist die sogenannte *Larmor Formel*. Man beachte, dass $\mathbf{a} := c\beta'$ gerade die Beschleunigung des Teilchens angibt.

7.4 Zweiter Spezialfall: Gleichförmig bewegte Ladung

Zuletzt betrachten wir noch den umgekehrten Spezialfall verschwindender Beschleunigung. In diesem Fall bewegt sich das Teilchen aus einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} \equiv c\beta$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{v}t. \quad (7.45)$$

mit konstantem \mathbf{v} . In diesem Fall können wir die Funktion $t_r(t, \mathbf{x})$ explizit bestimmen. Ihre Bestimmungsgleichung (7.15) ist

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\| = c(t - t_r). \quad (7.46)$$

Quadrieren liefert eine quadratische Gleichung für t_r , deren retardierte Lösung gegeben ist durch

$$t_r(t, \mathbf{x}) = \frac{(c^2 t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) - \sqrt{(c^2 t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})^2 - (c^2 - v^2)(c^2 t^2 - r^2)}}{c^2 - v^2}. \quad (7.47)$$

Hier sind $r := \|\mathbf{x}\|$ und $v := \|\mathbf{v}\|$. Die andere Lösung hätte ein Pluszeichen vor der Wurzel gehabt. Im Spezialfall $v = 0$ ist unsere Lösung aber $t = t - r/c$, also klar die retardierte Zeit, während die Lösung mit dem Pluszeichen zu $t + r/c$, also der avancierten Zeit geführt hätte.

Im Falle verschwindender Beschleunigung zeigt das elektrische Feld (7.38) in Richtung $R(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})$. Das führt zu einem seltsamen Effekt:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)) - c(t - t_r)\boldsymbol{\beta} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{v}t_r) - ct\boldsymbol{\beta} + t_r\mathbf{v} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Das heißt, $R(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})$ zeigt in die Richtung des Verbindungsvektors von der mit dem Beobachtungszeitpunkt *gleichzeitigen* Position des Teilchens zum Beobachtungsort, also nicht parallel der Richtung in der man das Teilchen "sieht" (das ist entlang der Verbindungslinie zur retardierten Position). Das suggeriert, dass sich das Coulombfeld instantan, also akausal, ausbreitet, obwohl die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} doch kausalen Gleichungen genügen. Das hat oft zu Verwirrungen und falschen Aussagen geführt.

Der in den Potentialen und Feldstärken auftretende Term $R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ kann nun explizit als Funktion von (t, \mathbf{x}) berechnet werden. Mit

$$R = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_r)\| = c(t - t_r) \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}t_r}{c(t - t_r)} \quad (7.49)$$

hat man

$$\begin{aligned}
 R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) &= c(t - t_r) \left[1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}t_r}{c(t - t_r)} \right] \\
 &= c(t - t_r) - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} + \beta^2 ct_r \\
 &= \frac{1}{c} \left(c^2 t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - (c^2 - v^2)t_r \right) \\
 &= \frac{1}{c} \sqrt{(c^2 t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})^2 - (c^2 - v^2)(c^2 t^2 - r^2)} \\
 &= \sqrt{(ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2 t^2 - r^2)},
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

wobei im letzten Schritt t_r gemäß (7.47) eliminiert wurde.

Daraus ergibt sich zunächst die Potentiale:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{\sqrt{(ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2 t^2 - r^2)}}, \tag{7.51a}$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu c}{4\pi} \cdot \frac{q\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{(ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2 t^2 - r^2)}}, \tag{7.51b}$$

Für das elektrische Feld erhalten wir aus (7.38)

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{[(ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2 t^2 - r^2)]^{3/2}} \tag{7.52}$$

Hier sieht man wieder, dass die Richtung des Feldes proportional zu $(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ ist, also der Verbindungslinie von Aufpunkt und der momentanen (zur Zeit t) Position des Teilchens, und nicht der retardierten Position $\mathbf{v}t_r$, das Feld also nicht entlang der ‘‘Sichtlinie’’ $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{v}t_r$ zeigt.

Für das Magnetfeld ergibt sich dann wegen

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}t_r}{c(t - t_r)} \times (\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x} \tag{7.53}$$

einfach

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{(1 - \beta^2) \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x}}{[(ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2 t^2 - r^2)]^{3/2}} \tag{7.54}$$

Diesen Formeln kann man noch eine andere Form geben durch Einführen des ‘‘momentanen Abstandsvektors’’

$$\mathbf{R}_* := \mathbf{x} - \mathbf{v}t \tag{7.55}$$

Mit diesem können wir den komplizierten Wurzel­ausdruck in den Nennern in eine erstaunlich einfache und geometrisch gut zu interpretierende Form umschreiben. Dazu ersetzen wir in dem Ausdruck unter der Wurzel \mathbf{x} durch $\mathbf{R}_* + \mathbf{v}t$ und nennen θ den Winkel zwischen \mathbf{R}_* und \mathbf{v} , so dass $\mathbf{R}_* \cdot \mathbf{v} = Rv \cos \theta$. Dann können wir den fraglichen Ausdruck nur durch R_* und θ ausdrücken. Das geht wie folgt: einerseits ist

$$\begin{aligned}
 & (ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2t^2 - r^2) \\
 &= (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2) - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}t) + (\mathbf{v}t)^2 \\
 &= (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + r^2(1 - \beta^2) - 2\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{R}_*) + (\mathbf{x} - \mathbf{R}_*)^2 \\
 &= (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - r^2\beta^2 + R_*^2,
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

wobei wir beim 2. Gleichheitszeichen in den zwei letzten Termen jeweils $\mathbf{v}t$ gemäß (7.55) durch $\mathbf{x} - \mathbf{R}_*$ ersetzt haben. Auf der anderen Seite ist, wieder unter elimination von \mathbf{x} gemäß (7.55),

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - r^2\beta^2 \\
 &= ((\mathbf{R}_* + \mathbf{v}t) \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (\mathbf{R}_* + \mathbf{v}t)^2\beta^2 \\
 &= (R_*\beta \cos \theta + \beta^2 ct)^2 - (R_*^2 + 2R_*vt \cos \theta + v^2t^2)\beta^2 \\
 &= R_*^2\beta^2(\cos^2 \theta - 1) = -R_*^2\beta^2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$(ct - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(c^2t^2 - r^2) = R_*^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta). \tag{7.58}$$

Damit erhält man die alternativen Darstellungen

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left\{ \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \right\} \cdot \frac{\mathbf{R}_*}{R_*^3}, \tag{7.59a}$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \left\{ \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \right\} \cdot \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}_*}{R_*^3} \tag{7.59b}$$

$$= \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}). \tag{7.59c}$$

Dabei durften wir das Vektorprodukt $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{x}$, das die Richtung des Magnetfeldes anzeigt, ersetzen durch $\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}_*$, denn $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Man beachte den Einfluss des Terms in geschweiften Klammern, der eine von β abhängige Anisotropie erzeugt, die zwar noch rotationssymmetrisch ist um die Beschleunigungsrichtung (die hier als Polsachse für den Winkel θ dient), aber die

Feldstärken in einer Umgebung um die Pole $\theta = 0, \pi$ abschwächt und in einer Umgebungen um den Äquator verstärkt. Für $\beta \rightarrow 1$ geht die Feldstärke überall gegen Null außer in der Äquatorialebene, wo sie divergiert.

Natürlich hätten wir die Ersetzung (7.58) auch in den Ausdrücken für die Potentiale (7.51) eintragen können, was aber hier unterbleiben soll.

In der speziell-relativistischen Formulierung der Elektrodynamik kann man sich das Feld einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Punktladung viel einfacher durch Lorentztransformation des Coulomb-Feldes einer ruhenden Ladung verschaffen. Die Ausdrücke (7.59) mit $\mathbf{R}_* = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$ erscheinen dann direkt als Ergebnis dieser Transformation ohne Zwischenschritte über die retardierte Zeit, die bei dieser Transformation keine Rolle spielt. Dieses Verfahren funktioniert aber nur bei gleichförmiger Translationsbewegung der Ladung.

Kapitel 8

Mathematischer Anhang

8.1 Sprechweisen betreffend Funktionen und ihr Verhalten in der Nähe singulärer Punkte und im Unendlichen

Da wir es in der Feldtheorie mit Funktionen von Raum und Zeit zu tun haben, an die bestimmte Bedingungen gestellt werden müssen, wollen wir an dieser Stelle einige praktische Sprechweisen verabreden.

Definition 21. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen; eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von der Klasse C^k , oder einfach: ist C^k (sprich: “c k”) wenn sie k mal stetig differenzierbar ist. $k = \infty$ (sprich: “c unendlich”) ist erlaubt und bedeutet, dass *alle* Ableitungen der Funktion existieren. In diesem Fall nennt man die Funktion auch *glatt*. Stärker noch als *glatt* ist *analytisch* (durch Potenzreihen darstellbar). Das Zeichen für solche Funktionen ist C^ω (sprich: “c omega”). Eine vektorwertige Funktion $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist C^k /glatt/analytisch wenn jede Komponentenfunktion C^k /glatt/analytisch ist. \square .

In der Elektrodynamik sind häufig Integralen über Raumgebiete des \mathbb{R}^3 , oder niederdimensionale Objekte im \mathbb{R}^3 , also Flächen bzw. Kurven zu bilden. \mathbb{R}^3 Damit die Integrale existieren dürfen die Funktionen im Endlichen nicht zu schnell divergieren und müssen im Unendlichen hinreichend schnell abfallen. Wann aber ist eine Divergenz “zu” und ein Abfall “hinreichend” schnell? Um das im Einzelfall einfach mitzuteilen ist folgende Sprechweise nützlich:

Definition 22. Sei g eine nicht-negative reellwertige Funktion. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *in einer Umgebung von $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ durch ein Vielfaches von g*

beschränkt falls es positive reelle Zahlen R und K gibt, so dass

$$|f(\mathbf{x})| \leq K g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < R. \quad (8.1)$$

Dabei müssen die Funktionen f, g nur in einer beliebig kleinen Umgebung um \mathbf{y} definiert sein und ihr Definitionsbereich muss \mathbf{y} nicht selbst enthalten. Analog heißt f im Unendlichen durch ein Vielfaches von g beschränkt falls es wieder positive reelle Zahlen R und K gibt, so dass

$$|f(\mathbf{x})| \leq K g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > R, \quad (8.2)$$

für irgend einen Punkt \mathbf{y} . Die Wahl dieses Punktes spielt keine Rolle denn mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man sofort, dass wenn diese Bedingung für (R, K, \mathbf{y}) erfüllt ist dies auch für (R', K, \mathbf{y}') gilt, sofern nur $R' > R + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|$. In beiden Fällen, (8.1) und (8.2) sagt man auch $f \in \mathcal{O}(g)$ ("Big-O-Notation").¹ \square

Definition 23. Wir betrachten eine Situation wie in der vorherigen Definition. Es sei $r := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ und $n > 0$. Wir sagen f divergiert langsamer als r^{-n} in einer Umgebung von \mathbf{y} falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$|f(\mathbf{x})| \leq \frac{K}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n-\varepsilon}} \quad \forall \mathbf{x} : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < R \quad (8.3)$$

Wir sagen f konvergiert schneller gegen Null als r^{-n} im Unendlichen (in einer Umgebung von Unendlich), falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$|f(\mathbf{x})| \leq \frac{K}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n+\varepsilon}} \quad \forall \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > R \quad (8.4)$$

In beiden Fällen können wir dies auch so ausdrücken: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f \in \mathcal{O}(r^{-(n+\varepsilon)})$. \square

Soll etwa eine bei \mathbf{y} divergierende Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung um \mathbf{y} integrierbar sein, so ist hinreichend, dass f langsamer divergiert als r^{-3} . Das sieht man sofort durch Einführen sphärischer Polarkoordinaten (r, θ, φ) mit \mathbf{y} als Zentrum. Im Integrationsmaß tritt dann neben den Winkeln der Faktor $r^2 dr$ auf. Die r -Integration von $r^{-(3-\varepsilon)} r^2 = r^{-1+\varepsilon}$ ist dann proportional zu r^ε , was für $r \rightarrow 0$ gerade noch konvergiert. Genauso verhält es sich bei Integralen im Unendlichen. Hinreichende Bedingung für das konvergieren der r -Integration für $r \rightarrow \infty$ ist, dass f im unendlichen schneller gegen Null konvergiert als r^{-3} ; denn die r -Integration von $r^{-(3+\varepsilon)} r^2 = r^{-1-\varepsilon}$ ist dann proportional zu $r^{-\varepsilon}$, was für $r \rightarrow \infty$ gerade noch konvergiert.

¹Diese Notation geht auf den Mathematiker Edmund Landau (1877-1938) zurück. Man bezeichnet $\mathcal{O}(g)$ auch als eines der "Landau Symbole".

8.2 Kurven

Unter einer *Kurve* im \mathbb{R}^3 verstehen wir eine mindestens stückweise stetig-differenzierbare Abbildung

$$\mathbf{k} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \lambda \mapsto \mathbf{k}(\lambda) \quad (8.5)$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (zusammenhängende Teilmenge) ist. Hier bezeichnet $\lambda \in I$ den Kurvenparameter dessen Werte über das Intervall I laufen. Mit dem Wort “Kurve” ist also stets die ganze Abbildung bezeichnet, nicht nur ihr Bild:

$$\text{Bild}(\mathbf{k}) := \{\mathbf{k}(\lambda) : \lambda \in I\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (8.6)$$

Ist $\rho : I' \rightarrow I$ eine Bijektion der Intervalle I' und I , die in beiden Richtungen stetig differenzierbar ist, dann kann man statt \mathbf{k} auch $\mathbf{k}_* := \mathbf{k} \circ \rho : I' \rightarrow \mathbb{R}^3$ betrachten. Diese “Kurve” ist von der ersten verschieden, hat aber das gleiche Bild. Man spricht von einer “Reparametrisierung” der Kurve. Die Geschwindigkeit mit der die Kurve durchlaufen wird ist gegeben durch

$$\mathbf{k}' := \frac{d\mathbf{k}}{d\lambda} \quad (8.7)$$

und von der Parametrisierung abhängig:

$$\mathbf{k}'_* = (\mathbf{k}' \circ \rho)\rho', \quad (8.8)$$

wo ρ' die Ableitung von ρ bezeichnet. Genauer gesagt ist an einem festen Bildpunkt der Betrag, nicht aber die Richtung von der Parametrisierung abhängig:

$$\|\mathbf{k}'_*(\lambda')\| = \|\mathbf{k}'(\lambda)\| \rho'(\lambda'). \quad (8.9)$$

Die Länge der Kurve zwischen zwei fest gewählten Bildpunkten $\mathbf{x}_1 = \mathbf{k}(\lambda_1) = \mathbf{k}_*(\lambda'_1)$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{k}(\lambda_2) = \mathbf{k}_*(\lambda'_2)$ ist

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \|\mathbf{k}'(\lambda)\| = \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} d\lambda' \|\mathbf{k}'_*(\lambda')\|, \quad (8.10)$$

also von der Parametrisierung unabhängig.

Ein Parameter s , für den der Betrag der Geschwindigkeit an jedem Punkt der Kurve gleich Eins ist, nennt man “Bogenlänge”. Aus (8.10) folgt sofort, dass dann $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = s_2 - s_1$ falls $\mathbf{x}_1 = \mathbf{k}(s_1)$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{k}(s_2)$.

Unter dem Integral eines Vektorfeldes \mathbf{V} entlang der Kurve \mathbf{z} zwischen den Kurvenpunkten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 versteht man das Integral

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left(\mathbf{k}'(\lambda) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}(\lambda)) \right). \quad (8.11)$$

Dies ist ebenfalls von der Parametrisierung unabhängig, also durch das Bild der Kurve bestimmt. Man kann dem Integral deshalb eine vom verwendeten Parameter unabhängige Form geben, indem man setzt

$$d\mathbf{k} := \mathbf{k}'(\lambda)d\lambda \quad (8.12)$$

und schreibt

$$\int_K \mathbf{V} \cdot d\mathbf{k}. \quad (8.13)$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^3$ für das Paar bestehend aus $\text{Bild}(\mathbf{k})$ und einer Orientierung (Durchlaufungssinn) der Kurve steht. Für konkrete Ausrechnungen dieses Kurvenintegrals muss man die Kurve aber parametrisieren, so dass ein Integral der Form (8.11) resultiert.

8.3 Flächen

Unter einer *Fläche* im \mathbb{R}^3 verstehen wir eine mindestens stückweise stetig-differenzierbare Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (p_1, p_2) \mapsto \mathbf{f}(p_1, p_2) \quad (8.14)$$

wobei U eine zusammenhängende offene Menge in \mathbb{R}^2 ist die durch die beiden Parameter p_1 und p_2 parametrisiert sei. Einige Beispiele werden wir unten diskutieren.

Mit dem Wort “Fläche” bezeichnen wir wieder die Abbildung, nicht nur ihr Bild:

$$\text{Bild}(\mathbf{f}) := \{\mathbf{f}(p_1, p_2) : (p_1, p_2) \in U\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (8.15)$$

Ist $\rho : U' \rightarrow U$ eine Bijektion der Mengen U' und U , die in beiden Richtungen stetig differenzierbar ist, dann kann man statt \mathbf{f} auch $\mathbf{f}_* := \mathbf{f} \circ \rho : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ betrachten. Diese “Fläche” ist von der ersten verschieden, hat aber das gleiche Bild. Man spricht dann von einer Reparametrisierung der Fläche.

Hält man den Parameter p_2 konstant dann ist die Abbildung $p_1 \mapsto \mathbf{f}(p_1, p_2)$ eine Kurve im obigen Sinne, deren Geschwindigkeitsvektor durch die Partielle Ableitung der Fläche nach p_1 gegeben ist. Dasselbe gilt, wenn wir p_1 festhalten und die

Kurve $p_2 \mapsto \mathbf{f}(p_1, p_2)$ betrachten. Auf diese Weise bekommen wir Tangentenvektorfelder auf dem Bild von \mathbf{f} die tangential an die Linien konstanten p_1 bzw. p_2 liegen:

$$\mathbf{f}_1 := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_1}, \quad (8.16a)$$

$$\mathbf{f}_2 := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial p_2}. \quad (8.16b)$$

Von der Abbildung \mathbf{f} fordern wir nun, dass für alle $(p_1, p_2) \in U$ diese beiden Vektoren linear unabhängig sind. In diesem Fall nennen wir die Abbildung \mathbf{f} *nicht entartet*. In diesem Fall verschwindet auch das Vektorprodukt der beiden Vektoren nicht und wir können die *Normale* zur Fläche definieren:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2\|}. \quad (8.17)$$

An jedem Punkt $\mathbf{f}(p_1, p_2)$ des Bildes der Fläche im \mathbb{R}^3 ist dann eine Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{n}\}$ des \mathbb{R}^3 definiert, die allerdings nicht orthonormiert ist, da die zwei $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ im allgemeinen weder normiert noch orthogonal sind. Den 2-dimensionalen Unterraum $\text{Span}\{\mathbf{f}_1(p_1, p_2), \mathbf{f}_2(p_1, p_2)\}$, der dem Bildpunkt $\mathbf{f}(p_1, p_2)$ zugeordnet ist, bezeichnet man als *Tangentialraum* der Fläche am Punkt $\mathbf{f}(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^3$. Damit dieser eindeutig einem Bildpunkt zugeordnet werden kann, setzen wir weiter voraus, dass die Abbildung \mathbf{f} injektiv ist, d.h. das Bild der Fläche keine Selbstüberschneidungen besitzt.

Die Fläche bekommt eine *Orientierung* dadurch, dass wir die Basen $\{\mathbf{f}_1(p_1, p_2), \mathbf{f}_2(p_1, p_2) : (p_1, p_2) \in U\}$ als *geordnete* Paare schreiben. Die Normalen (8.17) sind dann proportional zum Vektorprodukt des ersten mit dem zweiten Basisvektorfeldes - und nicht umgekehrt. Die so definierte Normale verleiht dem Bild der Fläche eine Orientierung die man oft mit dem Wort "außen" kennzeichnet.

Geometrisch ist klar, dass der Inhalt dA der Fläche, die von den Bildern der Punkte im Parametergebiet $[p_1, p_1 + dp_1] \times [p_2, p_2 + dp_2] \subset U$ gebildet werden, gegeben ist durch den Betrag des Vektors $\mathbf{f}_1(p_1, p_2) \times \mathbf{f}_2(p_1, p_2) dp_1 dp_2$; d.h.

$$dA(p_1, p_2) = \|\mathbf{f}_1(p_1, p_2) \times \mathbf{f}_2(p_1, p_2)\| dp_1 dp_2. \quad (8.18)$$

Der gesamte Inhalt der durch U parametrisierten Fläche ist dann

$$A(U) = \int_U \|\mathbf{f}_1(p_1, p_2) \times \mathbf{f}_2(p_1, p_2)\| dp_1 dp_2. \quad (8.19)$$

Der Fluss $d\Phi$ des Vektorfeldes \mathbf{V} durch das orientierte Flächenelement, das durch die Bildpunkte von $[p_1, p_1 + dp_1] \times [p_2, p_2 + dp_2] \subset U$ aufgespannt wird, ist gegeben durch das Produkt der Beträge von \mathbf{V} und dA und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels zwischen der Flächennormale und der Richtung von \mathbf{V} ; also durch $d\Phi = dA \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{V}$. Für den Fluss des Vektorfeldes \mathbf{V} durch die orientierte Fläche F , die gegeben ist durch das Bild von \mathbf{f} und die gewählte Orientierung, ist dann

$$\Phi(\mathbf{V}, U) = \int_U (\mathbf{f}_1(p_1, p_2) \times \mathbf{f}_2(p_1, p_2)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{f}(p_1, p_2)) dp_1 dp_2, \quad (8.20)$$

wofür wir unter Weglassung der Argumente (p_1, p_2) auch schreiben

$$\Phi(\mathbf{V}, U) = \int_U (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot (\mathbf{V} \circ \mathbf{f}) dp_1 dp_2. \quad (8.21)$$

Weder der Flächeninhalt (8.19) noch der Fluss (8.20) hängen von der Parametrisierung der Fläche ab, sondern nur von dem Bild der Abbildung \mathbf{f} und - im zweiten Fall - auch von der Orientierung der Fläche. Ist nämlich wie oben $\rho : U' \rightarrow U$, $(p'_1, p'_2) \mapsto \rho(p'_1, p'_2) = (p_1(p'_1, p'_2), p_2(p'_1, p'_2))$, eine in beiden Richtungen stetig differenzierbare Bijektion und $\mathbf{f}_* = \mathbf{f} \circ \rho$ die reparametrisierte Fläche, dann gilt nach der Kettenregel

$$\mathbf{f}_{*1} = \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial p'_1} = (\mathbf{f}_1 \circ \rho) \frac{\partial p_1}{\partial p'_1} + (\mathbf{f}_2 \circ \rho) \frac{\partial p_2}{\partial p'_1}, \quad (8.22a)$$

$$\mathbf{f}_{*2} = \frac{\partial \mathbf{f}_*}{\partial p'_2} = (\mathbf{f}_1 \circ \rho) \frac{\partial p_1}{\partial p'_2} + (\mathbf{f}_2 \circ \rho) \frac{\partial p_2}{\partial p'_2}, \quad (8.22b)$$

also

$$\mathbf{f}_{*1} \times \mathbf{f}_{*2} = [(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \circ \rho] \det(J_\rho), \quad (8.22c)$$

wobei $J_\rho : U' \rightarrow \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Jacobi-Matrix der Reparametrisierungsabbildung ρ ist:

$$J_\rho(p'_1, p'_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial p'_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p'_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial p'_1} & \frac{\partial p_2}{\partial p'_2} \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Das Flussintegral (8.20) in der Parametrisierung U' ist dann

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{V}, U') &= \int_{U'} (\mathbf{f}_{*1}(p'_1, p'_2) \times \mathbf{f}_{*2}(p'_1, p'_2)) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{f}_*(p'_1, p'_2)) dp'_1 dp'_2 \\ &= \int_{U'} [(\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot (\mathbf{V} \circ \mathbf{f})] \circ \rho \det(J_\rho) dp'_1 dp'_2 \\ &= \int_U (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) \cdot (\mathbf{V} \circ \mathbf{f}) dp_1 dp_2 \end{aligned} \quad (8.24)$$

also gleich $\Phi(\mathbf{V}, U)$ gemäß (8.21). Dabei haben wir die allgemeine Substitutionsformel für mehrdimensionale Integrale benutzt, die in unserem Fall die Form annimmt:

$$\int_{U'} (H \circ \rho) |\det(J_\rho)| dp'_1 dp'_2 = \int_U H dp_1 dp_2, \quad (8.25)$$

wobei $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige integrierbare Funktion ist. Man beachte, dass die Determinante der Jacobi-Matrix in (8.24) ohne Betragstriche eingeht, so dass es zu einem Vorzeichenunterschied zwischen $\Phi(\mathbf{V}, U)$ und $\Phi(\mathbf{V}, U')$ geführt hätte, wenn die Reparametrisierung die Orientierung nicht erhalten hätte, was ja genau für $\det(J_\rho) < 0$ der Fall ist. Bezeichnet man das Bild von \mathbf{f} versehen mit einer Orientierung mit F , dann können wir den Fluss von \mathbf{V} durch F in einer von der Parametrisierung unabhängigen Weise so schreiben:

$$\Phi(\mathbf{V}, F) = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \quad (8.26a)$$

Hier steht $d\mathbf{f}$ im Falle einer konkreten Parametrisierung stellvertretend für

$$d\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) dp_1 dp_2 = \mathbf{n} dA; \quad (8.26b)$$

wobei wir für die 2. Gleichheit (8.17) und (8.18) verwendet haben.

8.3.1 1. Beispiel: 2-Sphäre

Unser erstes Beispiel ist die Flächen einer 2-Sphäre von Radius R mit Mittelpunkt am Ursprung. Als Parameter (p_1, p_2) wählen wir sphärische Polarkoordinaten $p_1 = \theta \in (0, \pi)$ und $p_2 = \varphi \in [0, 2\pi)$ und erhalten

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Dann ist

$$\mathbf{f}_1(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\theta, \varphi) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

und

$$\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R \sin \theta \mathbf{f}(\theta, \varphi) = R^2 \sin \theta \mathbf{n}. \quad (8.29)$$

8.3.2 2. Beispiel: Zylinder

Als zweites Beispiel betrachten wir einen Zylindermantel der Länge L und Radius R des Querschnittskreises. Die Symmetrieachse sei die z -Achse und der Mittelpunkt im Ursprung. Als Parameter wählen wir $p_1 = \varphi \in [0, 2\pi)$ den Drehwinkel um die z -Achse und $p_2 = z \in (-L/2, l/2)$. Dann

$$\mathbf{f}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}. \quad (8.30)$$

Also

$$\mathbf{f}_1(\varphi, z) = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.31)$$

so dass

$$\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R \mathbf{n}. \quad (8.32)$$

8.3.3 3. Beispiel: Torus

Als drittes Beispiel betrachten wir die Torusfläche. Diese stellen wir uns vor als die Fläche eines mit seinem Mittelkreis in der Ebene $z = 0$ liegenden Fahrradschlauchs. Der Radius des Mittelkreises sei R , der des Schlauches r . Der Schlauch darf nicht dicker sein als das Rad, so dass $r < R$. Wir parametrisieren den Schlauch durch den Winkel $p_1 = \varphi \in [0, 2\pi)$, der den Mittelkreis parametrisiert, und den Winkel $p_2 = \theta \in [0, 2\pi)$ des Kreises mit Radius r senkrecht dazu. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\varphi, \theta) &= R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r \sin \theta \mathbf{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Also ist

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} -(R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

so dass,

$$\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} r(R + r \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi \\ r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \varphi \\ r(R + r \cos \theta) \sin \theta \end{pmatrix} = r(R + r \cos \theta) \mathbf{n}. \quad (8.35)$$

8.4 Integralsätze

8.4.1 Gauß'scher Satz

Sei \mathbf{V} ein Vektorfeld in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem, orientierten Rand ∂G . Auf ∂G sei das Feld der nach "außen" weisenden Normalen \mathbf{n} und das durch das Lebesgue-Maß $dv = d^3x$ auf \mathbb{R}^3 induzierte Flächenmaß $d\mathbf{f}$. dann gilt:

$$\int_G dv (\nabla \cdot \mathbf{V}) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}. \quad (8.36)$$

Diesen Satz werden wir vielfach anwenden. Zwei Spezialfälle davon sind für uns ebenfalls interessant. Im ersten setzen wir $\mathbf{V} = S \mathbf{K}$, wo S ein skalares Feld bezeichnet und \mathbf{K} ein konstantes Vektorfeld, dessen Komponenten sämtlich verschwindende Ableitungen besitzen: $\nabla_a K_b = 0$, für alle $a, b \in \{1, 2, 3\}$. sind. Dann wird aus (8.36) wegen $\nabla(S\mathbf{K}) = \mathbf{K} \cdot \nabla S$

$$\mathbf{K} \cdot \int_G dv \nabla S = \mathbf{K} \cdot \int_{\partial G} d\mathbf{f} S. \quad (8.37)$$

Dabei durfte wir \mathbf{K} wegen seiner Konstanz vor das Integral ziehen. Da (8.37) für alle konstanten \mathbf{K} gilt, folgt

$$\int_G dv \nabla S = \int_{\partial G} d\mathbf{f} S. \quad (8.38)$$

Dabei sind die Integrale Komponentenweise zu bilden.

Der zweite Spezialfall entsteht wieder mit konstantem \mathbf{K} wenn man nun setzt $\mathbf{V} = \mathbf{U} \times \mathbf{K}$. Dann ist der Integrand der linken Seite von (8.36)

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{K}) = \mathbf{K} \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) - \mathbf{U} \cdot (\nabla \times \mathbf{K}) \quad (8.39)$$

und der rechten Seite gleich

$$d\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = d\mathbf{f} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{K}) = \mathbf{K} \cdot (d\mathbf{f} \times \mathbf{U}), \quad (8.40)$$

Also ist (8.36) in diesem Fall äquivalent zu

$$\mathbf{K} \cdot \int_G dv (\nabla \times \mathbf{U}) = \mathbf{K} \cdot \int_{\partial G} d\mathbf{f} \times \mathbf{U}. \quad (8.41)$$

Wieder durften wir \mathbf{K} wegen seiner Konstanz vor das Integral ziehen und wieder gilt diese Beziehung für alle \mathbf{K} . Also folgt

$$\int_G dv (\nabla \times \mathbf{U}) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \times \mathbf{U}. \quad (8.42)$$

Wieder sind die Integrale komponentenweise zu bilden.

8.4.2 Stokes'scher Satz

Sei wieder \mathbf{V} ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F \subset G$ ein orientiertes, mindestens stückweise stetig differenzierbares Flächenstück mit Rand $\partial F = \gamma$, dann

$$\int_F d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \int_{\gamma} d\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}. \quad (8.43)$$

Man beachte, dass die rechte Seite nur von der Randkurve γ und den Werten \mathbf{V} auf dieser abhängt. Je zwei Flächen F und F' mit der gleichen Randkurve γ ergeben also für das Integral auf der linken Seite das gleiche Resultat.

Auch hier können wir wieder den Spezialfall $\mathbf{V} = S \mathbf{K}$ betrachten, wo \mathbf{K} konstant und S eine beliebige skalare Funktion ist. Dann ist der Integrand der linken Seite gleich $d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = (d\mathbf{f} \times \nabla) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{K} \cdot (d\mathbf{f} \times \nabla S)$ und der der rechten Seite $\mathbf{K} \cdot d\mathbf{k} S$. Also ist in diesem Fall (8.43) äquivalent zu

$$\mathbf{K} \cdot \int_F d\mathbf{f} \times \nabla S = \mathbf{K} \cdot \int_{\gamma} d\mathbf{k} S. \quad (8.44)$$

Und wieder, weil das für alle $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$ gilt, können wir schließen²

$$\int_F d\mathbf{f} \times \nabla S = \int_{\gamma} d\mathbf{k} S. \quad (8.45)$$

²Achtung: Die entsprechende Formel in [?, S. 95] hat einen Vorzeichenfehler.

8.4.3 Die Green'schen Identitäten

Beide Green'schen Identitäten sind Spezialfälle des Gauß'schen Satzes und aus diesem leicht abzuleiten.

Setzt man im Gauß'schen Satz (8.36) $\mathbf{V} = S\nabla T$, wobei S und T Skalarfelder sind, so folgt sofort die sogenannte *erste Green'sche Identität*:

$$\int_G dv(S\Delta T + \nabla S \cdot \nabla T) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (S\nabla T). \quad (8.46)$$

Zieht man von dieser Gleichung diejenige ab, die man durch Vertauschen von S und T erhält, so bekommt man die sogenannte *zweite Green'sche Identität*:

$$\int_G dv(S\Delta T - T\Delta S) = \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (S\nabla T - T\nabla S). \quad (8.47)$$

8.4.4 Die Laue'schen Identitäten

Auch die Laue'schen Identitäten³ sind eine direkte Folge des Gauß'schen Satzes. Zu ihrer Ableitung betrachten wir ein divergenzfreies Vektorfeld \mathbf{V} dessen Träger wir zunächst als Kompakt und im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ enthalten annehmen wollen. Sei dann $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine einmal stetig differenzierbare aber sonst beliebige Funktion. Dann folgt aus $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ und (8.36)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G dv S (\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ &= \int_G dv \nabla \cdot (S\mathbf{V}) - \int_G dv \mathbf{V} \cdot \nabla S \\ &= \int_{\partial G} d\mathbf{f} \cdot (S\mathbf{V}) - \int_G dv \mathbf{V} \cdot \nabla S \\ &= - \int_G dv \mathbf{V} \cdot \nabla S. \end{aligned} \quad (8.48)$$

In Worten: Das Integral des Skalarproduktes von \mathbf{V} mit dem Gradienten einer beliebigen (glatten) Funktion verschwindet.

³Nach Max von Laue (1879-1960). Diese Namensgebung ist nicht standard. Ich wähle sie, weil Max von Laue in seinen Arbeiten Identitäten dieser Art wiederholt abgeleitet und benutzt hat.

Es ist klar, dass die obige Ableitung auch dann noch gültig bleibt, wenn $G = \mathbb{R}^3$ und \mathbf{V} keinen kompakten Träger hat, solange das Oberflächenintegral in der Ableitung (8.48) verschwindet. Das ist der Fall, wenn das Produkt $S\mathbf{V}$ im Unendlichen schneller als r^{-2} abfällt.

Als erste Anwendung betrachten die den Fall $S(\mathbf{x}) = x_a$. Die Funktion S ist also so, dass sie dem Punkt \mathbf{x} den reellen Wert seiner a -ten kartesischen Koordinate zuordnet. Dann ist $\mathbf{V} \cdot \nabla S = V_c \nabla_c x_a = V_c \delta_{ca} = V_a$; also

$$\int_G dv V_a = 0. \quad (8.49)$$

Oder, weil a beliebig ist,

$$\int_G dv \mathbf{V} = \mathbf{0}. \quad (8.50)$$

Als nächstes betrachten wir den Fall $S(\mathbf{x}) = x_a x_b$; dem Punkt \mathbf{x} wird also das Produkt seines a -ten mit seinem b -ten (reellen) Koordinatenwerten zugeordnet. Dann ist $\mathbf{V} \cdot \nabla S = V_c \nabla_c (x_a x_b) = V_c (\delta_{ca} x_b + \delta_{cb} x_a) = V_a x_b + V_b x_a$ und (8.48) impliziert

$$\int_G dv (V_a x_b + V_b x_a) = 0. \quad (8.51)$$

Dies sind 6 unabhängige Gleichungen, für jede der symmetrischen Indexpaarungen (a, b) eine.

Diese Systematik können wir nun weiter treiben mit dem Ergebnis

$$\int_G dv V_{(a_0 x_{a_1} \cdots x_{a_n})} = 0, \quad (8.52)$$

was $\binom{n+3}{n+1}$ unabhängige Gleichungen, eine für jede der symmetrischen Kombinationen der Indizes $a_0 \cdots a_n$, deren Werte aus der drei-elementigen Menge $\{1, 2, 3\}$ genommen werden. Identitäten dieser Art werden in der Elektrodynamik z.B. bei der Multipolentwicklung des Vektorpotentials wichtig, wobei dann die elektrische Stromdichte \mathbf{J} an Stelle des divergenzfreien Vektorfeldes \mathbf{V} tritt.

8.4.5 Helmholtz'scher Satz

Sei $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld das auf einem offenen Gebiet G in \mathbb{R}^3 erklärt ist. Wir nehmen an, das Gebiet hat einen glatten orientierten Rand ∂G mit Normalenfeld \mathbf{n} . Die partiellen Ableitungen der drei Komponentenfunktion $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ besitzen zusammen die neun Komponenten $\nabla_a V_b$, die man zu

einer 3×3 – Matrix anordnen kann, wie wir bereits in (1.20) gesehen haben. Wie jede Matrix kann man diese in ihren Spuranteil (eine Komponente), ihren antisymmetrischen Anteil (3 Komponenten) und ihren symmetrisch-spurfreien Anteil (5 Komponenten) zerlegen:

$$\begin{aligned}\nabla_a V_b &= \frac{1}{3} \delta_{ab} \nabla \cdot \mathbf{V} && \text{(Spur)} \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla_a V_b - \nabla_b V_a) && \text{(antisymmetrisch)} \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla_a V_b + \nabla_b V_a) - \frac{1}{3} \delta_{ab} \nabla \cdot \mathbf{V} && \text{(symmetrisch-spurfrei)}.\end{aligned}\quad (8.53)$$

Die Spur entspricht der Divergenz, der antisymmetrische Anteil der Rotation des Vektorfeldes \mathbf{V} . Beide Ableitungskombinationen kommen in den Maxwell'schen Gleichungen vor. Für den symmetrisch-spurfreien Anteil hatten wir bisher keinen Namen vergeben, hatten es auch nicht nötig, denn er kommt ja in den Maxwell'schen Gleichungen gar nicht vor. Er heißt *Scherung* des Vektorfeldes \mathbf{V} .

Der Helmholtz'sche Satz regelt nun, inwieweit ein Vektorfeld durch Angabe seiner Divergenz und seiner Rotation bestimmt ist. Diese vereinigen ja zusammen nur 4 der insgesamt 9 Ableitungskomponenten, so dass man vielleicht vermute könnte, dass dadurch \mathbf{V} weitgehend unbestimmt bleibt. Das ist jedoch nicht der Fall, wie wir nun zeigen:

Satz 24 (Helmholtz). Sei $V : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld mit Divergenz $D := \nabla \cdot \mathbf{V}$, Rotation $\mathbf{R} := \nabla \times \mathbf{V}$ und Randwerten $\mathbf{V}_G := \mathbf{V}|_G$. Dann gilt:

$$\mathbf{V} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (8.54a)$$

mit

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_G dv' \frac{D(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{V}_G(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (8.54b)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_G dv' \frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{d\mathbf{f}' \times \mathbf{V}_G(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}. \quad (8.54c)$$

Ist \mathbf{V} in ganz \mathbb{R}^3 definiert und fällt im räumlich Unendlichen schneller ab als $1/r$ mit Ableitungen die schneller abfallen als $1/r^2$, dann gelten diese Formeln ohne Randintegrale mit $G = \mathbb{R}^3$. \square

Zum Beweis starten wir mit der Beziehung

$$\Delta \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (8.55)$$

die wir weiter unten in Abschnitt 8.5.3 beweisen werden, und schreiben

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \int_G dv' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{V}(\mathbf{x}') \quad (8.56a)$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \int_G dv' \Delta \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.56b)$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \int_G dv' (\nabla \nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.56c)$$

$$= -\nabla \left[\frac{1}{4\pi} \int_G dv' \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \right] \\ + \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi} \int_G dv' \nabla \times \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \right] \quad (8.56d)$$

$$=: -\nabla \Phi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (8.56e)$$

Dabei ist haben wir im Schritt von (8.56b) nach (8.56c) die Identität $\Delta \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ verwendet. Die im letzten Schritt definierten Felder Φ und \mathbf{A} können wir dann wie folgt weiter umformen:

$$4\pi\Phi(\mathbf{x}) := \int_G dv' \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.57a)$$

$$= \int_G dv' \mathbf{V}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.57b)$$

$$= - \int_G dv' \mathbf{V}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.57c)$$

$$= \int_G dv' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \int_G dv' \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.57d)$$

$$= \int_G dv' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \int_{\partial G} \frac{d\mathbf{f}' \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (8.57e)$$

und

$$4\pi\mathbf{A}(\mathbf{x}) := \int_G dv' \nabla \times \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.58a)$$

$$= - \int_G dv' \mathbf{V}(\mathbf{x}') \times \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.58b)$$

$$= \int_G dv' \mathbf{V}(\mathbf{x}') \times \nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.58c)$$

$$= \int_G dv' \frac{\nabla' \times \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \int_G dv' \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right) \quad (8.58d)$$

$$= \int_G dv' \frac{\nabla' \times \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} - \int_{\partial G} \frac{d\mathbf{f}' \times \mathbf{V}(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (8.58e)$$

Zusammengenommen ergibt (8.56e) mit (8.57e) und (8.58e) gerade (8.54). Dabei haben wir in den Schritten von (8.57b) nach (8.57c) und (8.58b) nach (8.57c) nur ausgenutzt, dass für Funktionen, die nur von der Differenz $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ der Variablen \mathbf{x} und \mathbf{x}' abhängen die Ableitung ∇_a nach der a -ten Komponente von \mathbf{x} gleich dem Negativen der Ableitung ∇'_a nach der a -ten Komponente von \mathbf{x}' ist. Im Übergang von (8.57d) nach (8.57e) haben wir den Gauß'schen Satz in der Form (8.36) und im Übergang von (8.58d) nach (8.58e) in der Form (8.40) benutzt.

8.5 Distributionen

8.5.1 Allgemeines Konzept

Wir betrachten die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R} und bezeichnen diese mit $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Diese Menge bildet offensichtlich einen reellen Vektorraum. Die Summe $(f + g)$ zweier Elemente ist definiert durch $(f + g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ und die skalare Multiplikation cf , wobei $c \in \mathbb{R}$, durch $(cf)(\mathbf{x}) := cf(\mathbf{x})$. Der Nullvektor ist die konstante Funktion mit dem Wert Null. Die Vektorraumstruktur der Menge aller Funktionen wird somit durch die Vektorraumstruktur der Zielmenge (hier \mathbb{R}^3) zurückgeführt. Der Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ist natürlich nicht mehr von endlicher Dimension.

Wie in jedem Vektorraum V kann man den dazu dualen Vektorraum V^* betrachten. Dieser ist definiert als die Menge aller linearen Abbildungen des Vektorraums in den Grundkörper, den wir hier als \mathbb{R} annehmen. Hat V endliche Dimensionen n dann hat V^* ebenfalls die Dimension n . Ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V so ist eine Basis von V^* etwa gegeben durch $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$, wobei die linearen Abbildungen $\theta^a : V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert sind durch $\theta^a(e_b) = \delta_b^a$. Das heißt: θ^a bildet den

Basisvektor e_a auf die Zahl 1 ab und alle anderen auf 0. Man nennt $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ *duale Basis*. Um die Basiseigenschaft zu sehen beachte man, dass jede lineare Abbildung zwischen Vektorräumen durch ihre Werte auf einer Basis vollständig festgelegt ist. Damit ist klar, dass jedes $L \in V^*$ geschrieben werden kann als $L = L(e_a)\theta^a$, denn beide Seiten stimmen auf der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ überein. Also ist $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ ein Erzeugendensystem. Dieses ist auch linear unabhängig, denn ist $c_a\theta^a = 0$ so sieht man durch Anwendung auf ein beliebiges e_b sofort, dass $c_b = 0$. Damit ist die Basiseigenschaft gezeigt.

In Vektorräumen unendlicher Dimension ist der Begriff des Dualraums ebenfalls definiert, wird allerdings dadurch verkompliziert, dass man zwischen dem *algebraischen Dualraum* aller linearen Abbildungen in den Grundkörper und dem *topologischen Dualraum* aller *stetigen* Abbildungen in den Grundkörper unterscheiden muss. In endlichen Dimensionen stimmen diese überein, denn alle linearen Funktionale sind automatisch stetig. In unendlichen vielen Dimensionen ist das nicht der Fall und man muss unterscheiden, wobei so gut wie immer nur die *stetigen* Funktionale Anwendung finden (es gibt allerdings auch Ausnahmen). Um zu wissen, welche Funktionen stetig sind, muss man den Vektorraum mit einer Topologie versehen. Während endlichdimensionale Vektorräume eine natürliche Topologie besitzen, die man in Anwendungen meist nicht diskutiert weil sie als “offensichtlich” angenommen wird, ist dies bei unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht der Fall. Hier muss man explizit angeben, welche Topologie man wählt. Erst danach ist der topologische Dualraum überhaupt erst definiert.

Das Wort “Distribution” bezeichnet in der Physik meistens ein Element eines topologischen Dualraumes zu einem geeignet gewählten Funktionenraum, den man auch den Raum der *Testfunktionen* nennt. Letzterer besteht meist aus einer Menge “netter” Funktionen, z.B. allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen die jeweils nur innerhalb eines (von der Funktion abhängigen) kompakten Gebiets von Null verschiedene Werte annehmen. Man spricht dann von *glatten Funktionen mit kompakten Träger* und bezeichnet ihn mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Der Raum der Distributionen über diesem Testfunktionenraum ist dann der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen in den Grundkörper.

Allgemein gilt die Faustregel: Je kleiner (eingeschränkter) der Raum der Testfunktionen, desto größer der zugehörige Raum der Distributionen. Betrachtet man als Testfunktionen $C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ so ist diese in der Menge der Distributionen selbst enthalten, denn jedes $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ definiert eine lineare stetige Abbildung $T_g : C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_g : C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto T_g(f) := \int_{\mathbb{R}^3} dv f g. \quad (8.59)$$

Auch die Ableitung $\mathbf{v} \cdot \nabla g$ der Funktion g in Richtung \mathbf{v} definiert dann eine Distribution $T_{(\mathbf{v}, \nabla)g}$ so wie in (8.59), wobei wegen des kompakten Trägers die Ableitung im Integranden auf die andere Funktion abgewälzt werden kann:

$$T_{\mathbf{v}, \nabla} g : C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto T_{\mathbf{v}, \nabla} g(f) := - \int_{\mathbb{R}^3} dv (\mathbf{v} \cdot \nabla f) g. \quad (8.60)$$

Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen.

8.5.2 Dirac Distribution (“Funktion”)

Es gibt aber auch Distributionen anderer Art, zum Beispiel die Evaluation an einem bestimmten Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$:

$$\text{Ev}_{\mathbf{y}} : C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \text{Ev}_{\mathbf{y}}(f) := f(\mathbf{y}), \quad (8.61)$$

oder die Evaluation der Ableitung an einer bestimmten Stelle \mathbf{y} in einer bestimmten Richtung \mathbf{v} :

$$\text{Ev}'_{(\mathbf{y}, \mathbf{v})} : C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \text{Ev}'_{(\mathbf{y}, \mathbf{v})}(f) := (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{y}). \quad (8.62)$$

In Analogie zum Verhältnis zwischen (8.59) und (8.60) nennt man $-\text{Ev}'_{(\mathbf{y}, \mathbf{v})}$ die Ableitung von $\text{Ev}_{\mathbf{y}}$ in Richtung \mathbf{v} . Allgemein kann man so Ableitungen von Distributionen definieren und Distributionen auch als Lösungen von (linearen!) Differentialgleichungen zulassen. Viele Lösungen zu linearen (partiellen) Differentialgleichungen der Physik müssen im distributiven Sinne verstanden werden.

Die Evaluations-Distribution (8.61) ist in der Physik unter *Dirac’scher δ -Funktion* bekannt. Genauer gesagt, weil wir es hier mit \mathbb{R}^3 zu tun haben mit *dreidimensionaler Dirac’scher δ -Funktion*. Man schreibt dann dafür auch $\delta_{\mathbf{y}}^{(3)}$. Das Wort “Funktion” ist hier so zu verstehen, dass man von der Fiktion einer Funktion $\delta_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ausgeht, so dass (8.59) und (8.61) zugleich gelten; also für alle Testfunktionen f

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv \delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \quad (8.63)$$

Eine solche “Funktion” müsste überall verschwinden außer bei $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, dort aber so stark unendlich werden, dass das Integral gerade den Wert der Testfunktion an der Stelle \mathbf{y} herausprojiziert. Insbesondere müsste das Integral über $\delta_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ gleich Eins sein. Es ist klar, dass dies keine “Funktion” im üblichen Sinne sein kann. Man spricht deshalb oft von “verallgemeinerten Funktionen”.

Trotzdem hat sich in der Physik die Sprechweise eingebürgert, Distributionen als “Funktionen” zu bezeichnen und ihre Auswertung auf Testfunktionen so zu schreiben, als gälte immer (8.59). gerechtfertigt kann diese Sprechweise durch die Bemerkung, dass Distributionen als Limes einer Folge von Testfunktionen dargestellt werden können, so dass für jedes Element der Folge (8.59) gilt. So kann z.B. die Dirac-Distribution $\delta_{\mathbf{y}}$ als Folge von Funktionen verstanden werden, die immer enger um den Wert $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzentriert sind und dabei so im Wert steigen, dass ihr Integral den Wert Eins besitzt. Der Grenzwert dieser Folge existiert allerdings nicht als gewöhnliche Funktion, sondern nur als Distribution (der Raum der glatten Funktionen ist nicht vollständig, wie man sich leicht überlegt).

8.5.3 Der Laplace-Operator angewandt auf $1/r$

Der Vorteil der auf (8.59) fußenden Darstellung ist, dass man sich schnell anhand der Standardregeln für die partielle Integration klar macht, wie Ableitungen von Distributionen zu behandeln sind. Dies wollen wir anhand eines für die Elektrodynamik sehr wichtigen Beispiels detailliert erläutern indem wir folgendes Ergebnis beweisen:

Satz 25. Es gilt folgende Gleichheit von Distributionen

$$\Delta \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = -4\pi \delta_{\mathbf{y}}^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (8.64)$$

Dabei ist $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ der auf die Variable \mathbf{x} wirkende Laplace-Operator. \square .

Zum Beweis müssen wir uns klarmachen, dass (8.64) die Gleichheit zweier Distributionen ausdrückt. Diese Gleichheit wird also durch den Nachweis gezeigt, dass beide Seiten – aufgefasst als Distributionen! – die gleiche Wirkung auf Testfunktionen haben. Sei also $T \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ eine Testfunktion. Die rechte Seite angewandt auf T ist einfach die reelle Zahl $-4\pi T(\mathbf{y})$. Die linke Seite berechnen wir durch Multiplikation mit $T(\mathbf{x})$ und Integration über ganz \mathbb{R}^3 . Dieses Integral zerlegen wir in die Summe des Integrals über einen Ball $B_\varepsilon^3(\mathbf{y})$ vom Radius ε um den Punkt \mathbf{y} und das Komplement $\mathbb{R}^3 - B_\varepsilon^3(\mathbf{y})$. Die Funktion $\mathbf{x} \mapsto 1/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ist in diesem Komplement glatt und der Laplace-Operator angewandt auf sie verschwindet. Das rechnet man leicht nach wenn man $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ verwendet, dann $\nabla \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = -(\mathbf{x} - \mathbf{y})/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ und letztlich die Divergenzfreiheit des Vektorfeldes $V(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ benutzt (was man einfach nachrechnet). Also ist das Integral über \mathbb{R}^3 gleich dem über $B_\varepsilon^3(\mathbf{y})$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wir schreiben nun dieses Integral an, verwenden $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ und integrieren zweimal partiell um

die zwei Ableitungen auf T abzuwälzen, wobei wir jeweils ein Oberflächenintegral bekommen. Im ersten Schritt ist

$$\int_{B_\varepsilon^3(\mathbf{y})} T(\mathbf{x}) \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) = \int_{B_\varepsilon^3(\mathbf{y})} \nabla \cdot \left[T(\mathbf{x}) \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right] - \int_{B_\varepsilon^3(\mathbf{y})} \nabla T \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right). \quad (8.65)$$

Auf das erste Integral wenden wir den Gauß'schen Satz (8.36) an und erhalten

$$- \int_{S_\varepsilon^2(\mathbf{y})} d\mathbf{f} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} T(\mathbf{x}), \quad (8.66)$$

wobei $S_\varepsilon^2(\mathbf{y}) = \partial B_\varepsilon^3(\mathbf{y})$ die 2-Sphäre vom Radius ε um den Mittelpunkt \mathbf{y} ist. Wählen wir sphärische Polarkoordinaten um \mathbf{y} dann ist $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = r$, $(\mathbf{x} - \mathbf{y})/r = \mathbf{n}$ und $d\mathbf{f} = \mathbf{n} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Dann kürzen sich r^2 aus $d\mathbf{f}$ und r^{-2} vom Nenner des Integranden und es bleibt nur die Integration der Funktion T über die Polarwinkel einer Sphäre von beliebig kleinen Radius ε

$$- \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta T(r = \varepsilon, \theta, \varphi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi T(\mathbf{y}) \quad (8.67)$$

Der nächste und letzte Schritt besteht darin, zu zeigen, dass das zweite Integral der rechten Seite von (8.65) für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Erneute partielle Integration und Umwandlung des dabei entstehenden Divergenzintegrals in ein Oberflächenintegral unter Benutzung des Gauß'schen Satzes liefert

$$- \int_{S_\varepsilon^2(\mathbf{y})} \frac{d\mathbf{f} \cdot \nabla T}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} + \int_{B_\varepsilon^3(\mathbf{y})} dv \frac{\Delta T(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (8.68)$$

Wieder unter Einführung von sphärischen Polarkoordinaten um \mathbf{y} ist dies gleich

$$- \varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \mathbf{n} \cdot \nabla T(\varepsilon, \theta, \varphi) + \int_0^\varepsilon dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \Delta T(r, \theta, \varphi) \quad (8.69)$$

wovon der erste Term im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ linear der zweite quadratisch verschwindet. Damit ist (8.64) als Gleichheit der Distributionen gezeigt.

8.6 Fourier'sche Reihen und Integrale

8.6.1 Reihen

Wir betrachten periodische Funktionen auf der reellen Achse mit dem Periodizitätsintervall 2π . Dabei wird es sich als rechentechnisch bequem erweisen wenn wir die Funktionen als komplexwertig annehmen, auch wenn wir letztlich an reellwertigen Funktionen interessiert sind. Wir haben also

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8.70)$$

Wegen der Periodizität können wir die Funktion auf das Intervall $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ einschränken. Wir betrachten also von nun an statt (8.70) die folgende Menge von Funktionen

$$f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{C}, \quad \text{mit} \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad (8.71)$$

wobei wir an diese, je nach Anwendung, auch gewisse Differenzierbarkeitsbedingungen stellen wollen. Wenn wir dann sagen, die Funktion sei k mal stetig differenzierbar, dann meinen wir damit nicht nur, dass die Funktion diese Bedingung im offenen Intervall $(-\pi, \pi)$ erfüllt, sondern auch, dass die rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen bei $x = -\pi$ bzw. $x = \pi$ bis zur k -ten Ordnung existieren und übereinstimmen. Die Menge dieser Funktionen nennen wir dann $C^k(S^1)$, weil sie als Funktionen auf dem Kreis $S^1 = [-\pi, \pi] / \sim$ interpretiert werden kann, wobei das Symbol \sim hier dafür steht, dass im Intervall $[-\pi, \pi]$ die beiden Enden identifiziert werden.

Bemerkung 26. Die Beschränkung auf periodische Funktionen der Periode 2π und deren Darstellung als im Intervall $[-\pi, \pi]$ erfolgt ohne Beschränkung der Allgemeinheit; denn haben wir eine Funktion F der Periode L , die uns als Funktion im Intervall $[a, a + L]$ mit $F(a) = F(a + L)$ gegeben ist, dann entsteht daraus eine Funktion der Periode 2π , die im Intervall $[-\pi, \pi]$ dargestellt wird, durch Komposition von F mit der linear-inhomogenen Abbildung $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die $-\pi$ auf a und π auf $a + L$.⁴

$$f := F \circ h \quad (8.72a)$$

mit

$$h(x) = \frac{L}{2\pi} x + \frac{L}{2} + a. \quad (8.72b)$$

Explizit also

$$f(x) = F \left(\frac{L}{2\pi} x + \frac{L}{2} + a \right). \quad (8.73)$$

⁴Anders ausgedrückt: $y = h(x)$ ist die Gerade durch die beiden Punkte $(-\pi, a)$ und $(\pi, a + L)$. Also $y = mx + b$ mit $m = L/(2\pi)$ und $m = L/2 + a$.

Umgekehrt wird aus einer Funktion f mit Periodizität 2π im Intervall $[-\pi, \pi]$ eine Funktion F mit Periodizität L im Intervall $[a, a + L]$ durch die Umkehrung von (8.72a), also $F = f \circ h^{-1}$, oder wieder explizit

$$F(x) = f\left(\frac{2\pi}{L}(x - a) - \pi\right). \quad (8.74)$$

Aus diesem Grund beschränken wir uns auf die oben gegebene Darstellung von Funktionen der Periode 2π im Intervall $[-\pi, \pi]$ \square

Auf der Menge unserer Funktionen bildet einen unendlich-dimensionalen komplexen Vektorraum. Auf diesem führen wir ein Hermite'sches Skalarprodukt ein:

$$(f_1, f_2) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{f}_1(x) f_2(x), \quad (8.75)$$

wobei ein Überstrich die komplexe Konjugation bedeutet. Wie man sofort sieht, ist dann folgende abzählbar unendliche Menge

$$B_{\mathbb{C}} := \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}, \quad e_n := \exp(inx) \quad (8.76)$$

enthalten in $C^\infty(S^1)$ und orthonormiert:

$$(e_n, e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \exp(i(m - n)x) = \delta_{nm}. \quad (8.77)$$

Die Idee der Fourier-Entwicklung durch Reihen ist nun, eine (mehr oder weniger) beliebige periodische Funktion f als Linearkombination der e_n darzustellen:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n, \quad (8.78)$$

mit Entwicklungskoeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$. Letztere können dann sofort aus (8.77) berechnet werden:

$$a_n = (e_n, f). \quad (8.79)$$

f ist genau dann reell wenn

$$a_{-n} = \bar{a}_n \quad (8.80)$$

gilt. Statt der komplexen hätten wir auch eine reelle Basismenge mit den orthonormierten Elementen

$$\begin{aligned} c_n &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_{-n}) = \sqrt{2} \cos(nx), \\ s_n &:= \frac{i}{\sqrt{2}}(e_n - e_{-n}) = \sqrt{2} \sin(nx), \end{aligned} \quad (8.81)$$

wählen können, wobei $n \in \mathbb{N}$ (positive ganze Zahlen). Aus (8.77) folgt dann ohne die Notwendigkeit Integrale quadratischer Kombinationen von \sin und \cos auszuwerten

$$(c_n, c_m) = (s_n, s_m) = \delta_{nm}, \quad (s_n, c_m) = 0 \quad (n > 0). \quad (8.82)$$

Nimmt man zu den s_n und c_n ($n > 0$) noch die reelle konstante Funktion e_0 hinzu, so erhält man die reelle Basis

$$B_{\mathbb{R}} := \{c_n, s_n, e_0 : n \in \mathbb{N}\}. \quad (8.83)$$

Die Entwicklung einer Funktion f kann dann entweder in $B_{\mathbb{C}}$ oder $B_{\mathbb{R}}$ geschehen:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n c_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n s_n + \gamma e_0 \quad (8.84)$$

mit ($n > 0$)

$$\alpha_n = \frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2}}, \quad \beta_n = \frac{i(a_n - a_{-n})}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = a_0. \quad (8.85)$$

Reelle Funktionen haben dann reelle Entwicklungskoeffizienten $(\alpha_n, \beta_n, \gamma)$ dieser, oder jeder anderen reellen Basis. Aber auch dann, wenn man letztendlich an der Darstellung reeller Funktionen interessiert ist sind Entwicklungen in der Basis $B_{\mathbb{C}}$ oft vorzuziehen weil \exp -Funktionen analytisch einfachere Eigenschaften haben, z.B. die, sich bei Ableitungen zu reproduzieren.

Da unsere Funktionenraum eine Vektorraum mit Skalarprodukt ist, hat er auch eine Norm:

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)}. \quad (8.86)$$

Mit dieser bekommen wir ein Distanzmaß, also ein Maß für den ‘‘Unterschied’’ zweier Funktionen f_1, f_2 . Dieses ist einfach die Norm ihrer Differenz: $\|f_1 - f_2\|$. Will man nun eine gegebene Funktion f durch eine endliche Linearkombination der Funktionen e_n , mit $n \in K \subset \mathbb{Z}$ endlich, im Sinne dieses Distanzmaßes möglichst gut approximieren, dann wird man die Entwicklungskoeffizienten a_n so wählen, dass der Abstand von f zur Linearkombination $\sum a_n e_n$, bzw. dessen Quadrat

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n \in K} a_n e_n \right\|^2 &= (f, f) - \sum_{n \in K} (a_n (f, e_n) + \bar{a}_n (e_n, f)) + \sum_{n \in K} \bar{a}_n a_n \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n \in K} |(e_n, f)|^2 + \sum_{n \in K} |a_n - (e_n, f)|^2 \end{aligned} \quad (8.87)$$

möglichst klein wird. Da die rechte Seite eine Summe von Betragsquadraten ist von der nur die letzte Gruppe von Termen a_n enthält, ist unmittelbar klar, dass genau ein globales Minimum existiert und dieses angenommen wird, falls die a_n durch (8.79) gegeben sind. Außerdem ist klar, dass durch Hinzunahme weiterer e_n zu dem bereits bestehenden Satz $\{e_n : n \in K\}$ die Distanz zwischen f und $\sum a_n e_n$ nur verringert werden, die Approximation also nur besser werden kann.

An dieser Stelle kann auch eine quantitative Aussage darüber getroffen werden, wie schnell die Beträge a_n der Koeffizienten mit wachsendem $|n|$ gegen Null streben. Dies wird um so schneller erfolgen, je "glatter" die Funktion f ist. Um dies einzusehen, bemerken wir dass die Ableitung von e_n einfach durch $e_n' = in e_n$ gegeben ist (hier macht sich der Vorteil der komplexen Basis bemerkbar). Dann gilt auch $\bar{e}_n = (i/n) \bar{e}_n'$, so dass wir durch eine partielle Integration im Integralausdruck für a_n folgende alternative Darstellung ableiten können

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{e}_n(x) f(x) = \frac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{e}_n'(x) f(x) \\ &= \underbrace{\frac{i}{n} \bar{e}_n(x) f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{i}{n} \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{e}_n(x) f'(x) \\ &= -\frac{i}{n} (e_n, f'). \end{aligned} \quad (8.88)$$

Dabei ergeben die Randterme zusammen keinen Beitrag weil sowohl \bar{e}_n als auch f natürlich der Bedingung (8.71) genügen. Außerdem haben wir bei dieser Ableitung angenommen, dass f stetig differenzierbar ist.

Ist hingegen f nur stückweise stetig differenzierbar, springt aber an der Stelle $x = x_*$ um den endlichen Wert $\Delta_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{f(x_* + \varepsilon) - f(x_* - \varepsilon)\}$, wobei f in $[-\pi, \pi] \setminus \{x_*\}$ stetig differenzierbar bleibt, dann müssen wir das Integral in (8.88) von $-\pi$ nach π ersetzen durch die Summe zweier Integrale von $-\pi$ nach x_* bzw. x_* nach π . Die Summe der Randterme verschwindet jetzt nicht mehr, sondern ergibt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{i}{n} \left[\bar{e}_n(x) f(x) \Big|_{-\pi}^{x_* - \varepsilon} + \bar{e}_n(x) f(x) \Big|_{x_* + \varepsilon}^{\pi} \right] \right\} = -\frac{i}{n} \bar{e}_n(x_*) \Delta_*. \quad (8.89)$$

Gleichung (8.88) wird also ersetzt durch

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{i}{n} \left[e_n(x_*) \Delta_* \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\pi}^{x_* - \varepsilon} dx \bar{e}_n(x) f'(x) + \int_{x_* + \varepsilon}^{\pi} dx \bar{e}_n(x) f'(x) \right\} \right] \end{aligned} \quad (8.90)$$

Nach Voraussetzung existierten die Integrale in der geschweiften Klammer und auch deren Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$. Unter diesen Voraussetzungen fallen also die Beträge der a_n mit wachsendem $|n|$ wie $1/|n|$.

Dieses Resultat können wir sofort in zweifacher Hinsicht verallgemeinern: Erstens können wir statt einer einzigen endlich viele Sprungstellen zulassen. Dann erhalten wir statt (8.89) eine endliche Summe von Termen die mit $1/n$ multipliziert wird. Zweitens - und das ist hier die wesentliche Erweiterung - können wir die Rechnung in (8.88) iterieren im Fall, dass f von der Klasse $C^{k+1}(S^1)$, also $k + 1 > 1$ mal stetig differenzierbar ist. Statt (8.88) erhalten wir dann

$$a_n = \left(-\frac{i}{n}\right)^{(k+1)} (e_n, f^{(k)}), \quad (8.91)$$

wo $f^{(k+1)}$ die $(k + 1)$ -fache Ableitung von f bezeichnet. Auch hier können wir dann wieder endlich viele Sprungstellen endlichen Betrags in der k -ten Ableitung zulassen unter der gleichzeitigen Forderung, dass außerhalb dieser die Funktion weiterhin $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Dann gilt, dass die Beträge der a_n mit wachsendem $|n|$ wie $1/|n|^{(k+1)}$ fallen. Daraus folgt, dass die Fourier Reihen für $k \geq 1$ absolut konvergieren und schneller als jede Potenz, falls f von der Klasse $C^\infty(S^1)$, also unendlich oft stetig differenzierbar ist. Für $k = 0$ (stetig bis auf endlich viele Sprungstellen endlichen Betrags) ist die absolute Konvergenz in der Regel nicht gegeben und muss im Einzelfall geprüft werden.

Zum Schluss schreiben wir noch eine suggestive Identität an, die entsteht, wenn wir die Ausdrücke (8.79) für die Entwicklungskoeffizienten zurück einsetzen in die Entwicklung (8.78):

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_n (e_n, f). \quad (8.92)$$

In der linearen Algebra nennt man das die Vollständigkeitsrelation, die besagt, dass die Menge der Vektoren e_n in der Lage ist, jeden Vektor f darzustellen, also ein Erzeugendensystem ist. Als Identität für Funktionen ausgedrückt, in der wir auch die explizite Form (8.77) des Skalarproduktes verwenden, heißt das

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dy \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(in(x - y)) \right\} f(y) \quad (8.93)$$

was dann in der Sprache der Distributionen such so lautet:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(in(x - y)) = \delta(x - y). \quad (8.94)$$

Die Gleichheit beider Seiten in (8.94) ist also eine von Distributionen, nicht eine im Sinne von an Argumentstellen auswertbaren Funktionen.

Aus (8.92) folgt auch sofort, dass

$$(f, f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \bar{a}_n a_m (e_n, e_m) = \sum_n |a_n|^2. \quad (8.95)$$

Das besagt, dass die lineare Abbildung, die jeder Funktion f die geordneten ∞ -Tupel ihrer Fourier-Koeffizienten a_n zuordnet, eine Isometrie ist, wenn man auf dem komplexen Vektorraum der ∞ -Tupel das Hermite'sche innere Produkt

$$(\{a_n\}, \{b_m\}) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{a}_n b_n \quad (8.96)$$

einführt

8.6.2 Integrale

Die heuristische Idee hinter Fourier-Integralen ist, dass man das Periodizitätsintervall $[-\pi, \pi]$ der Länge 2π auf das Intervall $[-L/2, L/2]$ erweitert und sich dann den Grenzfall $L \rightarrow \infty$ ansieht. Definieren wir das innere Produkt in diesem Fall ganz analog zu (8.77) durch

$$(E_n, E_m) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \exp\left(\frac{2\pi}{L}(m-n)x\right) = \delta_{nm}, \quad (8.97)$$

wobei wir die Basisvektoren nun E_n genannt haben und analog zu (8.76) definieren durch

$$B_{\mathbb{C}} := \{E_n : n \in \mathbb{Z}\}, \quad E_n := \exp\left(i \frac{2\pi}{L} n x\right), \quad (8.98)$$

dann gelten entsprechend wieder die Formeln (8.78) und (8.79)

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n E_n, \quad (8.99)$$

mit

$$a_n = (E_n, f). \quad (8.100)$$

Setzen wir (8.100) in und schreiben die das innere Produkt gemäß (8.97) aus, dann bekommen wir die zu (8.93) analoge Identität

$$f(x) = \int_{-L/2}^{L/2} dy \left\{ \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(i \frac{2\pi}{L} n (x-y)\right) \right\} f(y), \quad (8.101)$$

bzw.

$$\frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(i \frac{2\pi}{L} n (x - y)\right) = \delta(x - y). \quad (8.102)$$

Dieser Formel wollen wir auch einen Sinn verleihen wenn das Intervall zur ganzen reellen Achse wird. In diesem Fall würde die diskrete Folge reeller Zahlen $k_n := 2\pi n/L$ zum Kontinuum und der Unterschied zweier benachbarter k -Werte zum Differential dk :

$$\begin{aligned} k_n &:= \frac{2\pi n}{L} \rightarrow k \quad \text{kontinuierlich} \\ k_{n+1} - k_n &\rightarrow dk = \frac{2\pi}{L} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{L} = \frac{dk}{2\pi}. \end{aligned} \quad (8.103)$$

Damit würde aus der diskreten Summe (8.101) ein Integral über ganz \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dk \exp(ik(x - y)) f(y). \quad (8.104)$$

und analog zu (8.102) bekämen wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk \exp(ik(x - y)) = \delta(x - y). \quad (8.105)$$

Diese Beziehungen legen nahe, zu jeder Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fourier-Transformierte $F[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zu definieren durch die Vorschrift

$$F[f](k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy \exp(-iky) f(y), \quad (8.106a)$$

so dass

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \exp(ikx) F[f](k). \quad (8.106b)$$

Die Fourier-Transformierte einer reellwertigen Funktion erfüllt die zu (8.80) völlig analoge Bedingung

$$F[f](-k) = \overline{F[f](k)}. \quad (8.107)$$

Oft schreibt man statt $F[f]$ auch \tilde{f} oder \hat{f} .

Die Theorie der Fourier Integrale untersucht einerseits, unter welchen einschränkenden Bedingungen an eine "gewöhnliche" (stetige, differenzierbare) Funktion f die Transformierte (8.106a) existiert und welche Eigenschaften diese hat. Insbesondere soll ja auch um Rücktransformation (8.106b) existieren und die ursprüngliche Funktion f darstellen.

Andererseits wird auch untersucht, inwieweit sich das Konzept der Fourier-Transformation auf “verallgemeinerte Funktionen”, insbesondere Distributionen, fortsetzen lässt. Das ist in der Tat möglich für sogenannte “temperierte Distributionen”, das sind Distributionen, deren Testfunktionen zwar C^∞ aber nicht von kompakten Träger sind, sondern lediglich schneller im Unendlichen abfallen als jede Potenz. Der Testfunktionenraum ist also echt größer als der kompakt getragener Funktionen (den er enthält), was für den Raum der Distributionen bedeutet, dass dieser echt kleiner ist.

Alles bisher Gesagte kann auf höhere Dimensionen, d.h. Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $n > 1$ verallgemeinert werden. Statt (8.106a) hat man dann

$$F[f](\mathbf{k}) := \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \quad (8.108a)$$

und

$$f(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{2\pi} \right]^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) F[f](\mathbf{k}), \quad (8.108b)$$

und das Analogon zu (8.105) ist

$$\left[\frac{1}{2\pi} \right]^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} \exp(i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) = \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.109)$$

Hier bezeichnen fett gedruckte Buchstaben wie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ Vektoren im \mathbb{R}^n und ein Punkt zwischen zwei solchen ihr gewöhnliches Euklidisches Skalarprodukt: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{a=1}^n x_a y_a$.

Wir betonen, dass es verschiedene Konventionen darüber gibt, wie die Potenzen des Faktors $[1/2\pi]$ auf die Fourier-Transformierte bzw. ihre Rücktransformation zu verteilen ist. Aus (8.109) folgt, dass die Integraltransformation in (8.108a) gefolgt von der Integraltransformation in (8.108b) das $[2\pi]^n$ -Fache der Ausgangsfunktion ergeben muss. Das wäre auch dann erfüllt, wenn man beispielsweise den Faktor $[1/2\pi]^{n/2}$ in (8.108a) wegließe und ihn dafür in (8.108b) mit doppelter Potenz, also als $[1/2\pi]^n$ hinzufügte. Das ist ebenfalls eine häufig getroffene Konvention, die lediglich darauf hinausläuft, das $[1/2\pi]^{n/2}$ -Fache unseres $F[f]$ als “die Fourier-Transformierte” von f zu bezeichnen. Unsere Konvention ist in der Physik die verbreitetere und hat den offensichtlichen Vorteil, die Faktoren von 2π symmetrisch, also in beiden Zeilen (8.108) mit jeweils gleicher Potenz zu verteilen. Das ist auch einfacher zu merken.

Führt man auf dem Raum der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ein Hermite’sches inneres Produkt ein durch

$$(f_1, f_2) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \overline{f_1(\mathbf{x})} f_2(\mathbf{x}) \quad (8.110)$$

dann ergibt sich zunächst per Definition

$$(\hat{f}_1, \hat{f}_2) := \left[\frac{1}{2\pi} \right]^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) \overline{\hat{f}_1(\mathbf{x})} \hat{f}_2(\mathbf{y}). \quad (8.111)$$

Führt man darin die \mathbf{k} -Integration zuerst aus und benutzt (8.109), dann kann man wegen der so entstehenden $\delta^{(n)}$ -Distribution eine weitere Integration, etwa die nach \mathbf{y} sofort ausführen und erhält die rechte Seite von (8.110), also insgesamt.

$$(\hat{f}_1, \hat{f}_2) = (f_1, f_2). \quad (8.112)$$

Diese Relation besagt, dass die Fourier-Transformation eine Isometrie bezüglich des inneren Produktes (8.110) (das so genannte L^2 -Produkt) ist. Dieses Resultat ist als *Plancherel Theorem*⁵ bekannt.

Gegeben zwei Funktionen $f_{1,2}$ mit Fourier-Transformierten $\hat{f}_{1,2} := F[f_{1,2}]$ dann gilt gemäß formaler Manipulation

⁵Nach dem Schweizer Mathematiker Michel Plancherel (1885-1967).

Literaturverzeichnis

Kapitel 9

Übungsaufgaben

9.1 Reflexion und Transmission

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der Reflexion und Transmission ebener Wellen an Grenzflächen zwischen linearen, homogenen und isotropen Materialien unterschiedlicher Permittivitäten ε und Permeabilitäten μ . Die Ebene $z = 0$ trenne die Region 1 mit $z < 0$ von der Region 2 mit $z > 0$. In diesen seien die Permittivitäten und Permeabilitäten durch (ε_1, μ_1) bzw. (ε_2, μ_2) gegeben.

Das elektrische Feld denken wir uns aus drei Anteilen zusammengesetzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_I(t, z) &= A \exp[i(\omega t - k_1 z)] \mathbf{e}_x \\ \mathbf{E}_R(t, z) &= B \exp[i(\omega t + k_1 z)] \mathbf{e}_x \\ \mathbf{E}_T(t, z) &= C \exp[i(\omega t - k_2 z)] \mathbf{e}_x.\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$ das elektrische Feld in Region 1, gedacht als lineare Superposition der einfallenden (I für engl. “incident”) und der reflektierten (R für engl. “reflected”) Welle. $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_T$ ist das elektrische Feld in Region 2, das hier nur aus der transmittierten (T für engl. “transmitted”) Welle besteht.

- (a) Zeigen Sie, dass die zu den drei Anteilen gehörigen magnetischen Felder gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_I(t, z) &= (A/c_1) \exp[i(\omega t - k_1 z)] \mathbf{e}_y \\ \mathbf{B}_R(t, z) &= -(B/c_1) \exp[i(\omega t + k_1 z)] \mathbf{e}_y \\ \mathbf{B}_T(t, z) &= (C/c_2) \exp[i(\omega t - k_2 z)] \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

wobei in Region 1 gilt

$$c_1 = 1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1},$$
$$k_1 = \omega/c_1$$

und entsprechend in Region 2.

- (b) Wie setzen voraus, dass an der Grenzfläche keine Ladungsdichten und Stromdichten existieren. Wenden für diesen Fall die Übergangsbedingungen für die tangentialen Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes an um folgende Bedingungen an die Amplituden zu erhalten:

$$A + B = C,$$
$$\frac{A - B}{c_1\mu_1} = \frac{C}{c_2\mu_2}.$$

Bestimmen Sie damit die Amplituden B des reflektierten und C des transmittierten Feldes als Funktion der Amplitude des einlaufenden Feldes. Zeigen Sie damit, dass folgendes gilt:

$$B = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} \cdot A,$$
$$C = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}} \cdot A.$$

Beachten Sie, dass B auch negativ werden kann. Wie interpretieren Sie das? Was sagt Ihnen der Ausdruck für B darüber, welche Bedingungen die Beschichtung eines Tarnkappenflugzeugs genügen muss?

- (c) Wie in der Vorlesung noch besprochen werden wird, ist die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes durch den sogenannten *Poynting-Vektor* $\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ gegeben. Zeigen Sie, dass im vorliegenden Fall zu jedem Zeitpunkt die auf die Grenzfläche $z = 0$ auftreffende Energiestromdichte gleich ist der Summe aus der reflektierten und der transmittierten. [Achtung: Wir haben die Amplituden für \mathbf{E} und \mathbf{B} komplex geschrieben, weil wir, solange nur lineare Operationen im Spiel sind, immer den Real- oder Imaginärteil getrennt betrachten können. Für Ausdrücke, die in den Feldern nicht linear sind, müssen wir aber reelle Felder verwenden. Tipp: Die zu zeigende Beziehung folgt sehr schnell aus den oben gegebenen Ausdrücken für $A + B$ und $A - B$.]

9.2 Wellenleiter

In Verallgemeinerung der ebenen Wellen, die wir in der Vorlesung kennengelernt haben, betrachten wir nun Wellen, die sich in der festen Richtung \mathbf{k} mit der festen Frequenz ω ausbreiten, deren Amplituden auf den zu \mathbf{k} senkrechten Ebenen aber nicht mehr konstant sein müssen. Das eröffnet die Möglichkeit, Wellenausbreitung in Hohlleitern zu diskutieren, bei denen transversal zur Ausbreitungsrichtung Randbedingungen zu erfüllen sind.

Die Maxwell-Gleichungen außerhalb der Quellen können für homogene und isotrope Medien wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= -c^{-2} \dot{\mathbf{E}},\end{aligned}$$

wobei $c^2 = \varepsilon\mu$. Wir suchen Lösungen der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_\perp) \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}_\perp) \exp(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}))\end{aligned}$$

wo \mathbf{x}_\perp die zu \mathbf{k} orthogonalen Komponenten von \mathbf{x} bezeichnen. Es handelt sich also um eine monochromatische Welle die sich mit der Phasengeschwindigkeit ω/k in Richtung \mathbf{k} ausbreitet, deren Amplitude aber von den zu \mathbf{k} orthogonalen Richtungen abhängt. Hier und im Folgenden ist $k := \|\mathbf{k}\|$.

- (a) Indem Sie sowohl die Amplitudenfunktionen als auch den ∇ -Operator in ihre zu \mathbf{k} parallelen (\parallel) und senkrechten (\perp) Komponenten zerlegen,

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{B}_\perp, \quad \nabla = \nabla_\parallel + \nabla_\perp,$$

können Sie auch die Maxwell-Gleichungen in diese Anteile zerlegen. Zeigen Sie, dass diese dann in Bezug auf obigen Ansatz äquivalent sind zu

$$\begin{aligned}\nabla_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_\parallel, \\ \nabla_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp &= i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_\parallel,\end{aligned}$$

für die zwei Divergenzrelationen (Constraints) und

$$\begin{aligned}\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\parallel - i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\perp &= -i\omega \mathbf{B}_\perp, \\ \nabla_\perp \times \mathbf{B}_\parallel - i\mathbf{k} \times \mathbf{B}_\perp &= i(\omega/c^2) \mathbf{E}_\perp\end{aligned}$$

für die \perp Komponenten und

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} &= -i\omega \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp} &= i(\omega/c^2) \mathbf{E}_{\parallel}\end{aligned}$$

für die \parallel -Komponenten der anderen Maxwell-Gleichungen.

- (b) Zeigen Sie, dass Sie die beiden \perp -Komponenten der Maxwell-Gleichungen benutzen können, um die \perp -Komponenten der Felder durch die \parallel -Komponenten wie folgt auszudrücken

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp} &= \frac{-i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left[\nabla_{\perp} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\parallel}) + \omega \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel} \right], \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \frac{-i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left[\nabla_{\perp} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{\parallel}) - (\omega/c^2) \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\parallel} \right]\end{aligned}$$

Multiplizieren Sie dazu die beiden Gleichungen vektoriell mit \mathbf{k} und nutzen Sie die so entstehenden Gleichungen, um in der jeweils anderen den Term $\mathbf{k} \times (\dots)$ zu eliminieren. Beachten Sie, dass diese Auflösung nur möglich ist, falls $\omega^2 \neq c^2 k^2$ vorausgesetzt wird. Trifft dies zu, reduziert sich das Problem auf die Bestimmung der \parallel -Komponenten der Felder.

- (c) Nehmen Sie $\nabla_{\perp} \times$ der zuletzt erhaltenen Ausdrücke für die \perp -Komponenten der Felder und setzen Sie dies in die verbleibenden \parallel -Komponenten der Maxwell-Gleichungen ein um zu zeigen, dass diese nun äquivalent sind zu je einer zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung für die \perp -Komponenten beider Felder

$$[\Delta_{\perp} + (\omega/c)^2 - k^2] \{ \mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{B}_{\parallel} \} = \mathbf{0}.$$

Hier ist $\Delta_{\perp} := \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp}$ der Laplace-Operator in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, also etwa $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ wenn die Ausbreitungsrichtung parallel zur z -Achse erfolgt. Last not least zeigen Sie nun noch, dass als Folge der Helmholtz-Gleichung nun auch die Divergenzrelationen und damit alle Maxwell-Gleichungen erfüllt sind.

- (d) Zeigen Sie, dass Lösungen mit $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} = 0$ notwendig divergenz- als auch rotationsfrei sind. Argumentieren Sie nun mit Hilfe des Helmholtz'schen Satzes (Vorlesung), dass es in diesem Fall keine nicht-trivialen Lösungen gibt, sofern die Felder im Unendlichen oder auf im Endlichen gelegenen Rändern verschwinden. (Es reicht, dass das für das \mathbf{E} -Feld gefordert wird.)
- (e) Hier könnte man eine Diskussion der Lösungen der Helmholtz-Gleichung im Rechteck durch Produktansatz und Separation der Variablen anschließen.

Lösungen können natürlich nur für $(\omega/c)^2 - k^2 > 0$ existieren da alle Eigenwerte des 2-d Laplace Operators negativ sind. [Setzt man den Rand als idealen Leiter voraus, folgt aus dem Ohm'schen Gesetz $\mathbf{E} = 0$ und, wenn anfänglich $\mathbf{B} = 0$ auch $\mathbf{B} = 0$ im Leiter für alle Zeiten. An der Grenzfläche im Hohlraum aus den in der Vorlesung diskutierten Stetigkeitsbedingungen dann das Verschwinden der Tangentialkomponente von \mathbf{E} und der Normalkomponente von \mathbf{B} .]

9.3 Einfache Modelle atomarer Polarisierung

9.3.1 Das Thomson'sche Atom

Denken Sie sich ein Thomson'sches Atom, in dem eine negativ geladene „Elektronenwolke“ der Gesamtladung $-Q$ einen positiv geladenen punktförmigen „Kern“ der Ladung Q in ihrem Zentrum enthält. Die „Elektronenwolke“ sei eine Kugel vom Radius R und konstanter Ladungsdichte. Den Mittelpunkt der Kugel legen wir in den Ursprung unseres Koordinatensystems. Die ganze Anordnung sei im Vakuum (Permittivität ε_0).

- (a) Zeigen Sie, dass das von der Elektronenwolke im Inneren der Kugel erzeugte Potential gegeben ist durch ($r = \|\mathbf{x}\|$ und $r \leq R$)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{R} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{r^2}{R^2} \right).$$

- (b) Das Atom denke man sich in ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_3$ ($E = \text{konst.}$) gebracht. Dadurch werden die Elektronenwolke und der Kern in unterschiedliche Richtungen gezogen. Wir setzen voraus, dass die Elektronenwolke nicht deformiert wird, also weiterhin als homogen geladene Kugel angenommen werden darf und das angelegte Feld nicht so groß ist, dass es den Kern aus der Wolke herausreisst. Zeigen Sie, dass er sich unter diesen Annahmen unter Einfluss des äußeren Feldes um den Vektor

$$\mathbf{d} = \frac{4\pi \varepsilon_0 R^3 E}{Q} \mathbf{e}_3$$

von Zentrum wegbewegt.

- (c) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} dv \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x}$$

der so verschobenen Ladungsverteilung gegeben ist durch

$$\mathbf{p} = 4\pi \varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}.$$

Zeigen Sie auch, dass dieses Dipolmoment nicht davon abhängt, welchen Basispunkt man zu seiner Berechnung wählt. Oder anders ausgedrückt: dass es unter Translationen $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ invariant ist. Für welche Ladungsverteilungen ist das der Fall?

9.3.2 Die leitende Kugel

In der Vorlesung wurde mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential und elektrische Feld einer Punktladung der Stärke q am Ort $d\mathbf{e}_3$ in Anwesenheit einer leitenden Sphäre vom Radius $R < d$ um den Mittelpunkt berechnet. Im Fall einer isolierten (nicht geerdeten) Sphäre verschwindender Gesamtladung erhielten wir die Ladungsdichte auf der Oberfläche zu

$$\sigma_f = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{d^2}{R^2} - 1 \right) \frac{R}{[R^2 + d^2 - 2Rd(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3)]^{3/2}} + \frac{q}{4\pi R d}.$$

- (a) Rechnen Sie nach, dass die Gesamtladung verschwindet.
- (b) Rechnen Sie nach, dass das Dipolmoment bezüglich des Mittelpunktes gegeben ist durch

$$\mathbf{d} = \left(-q \frac{R}{d} \right) \left(\frac{R^2}{d} \right) \mathbf{e}_3$$

und zeigen Sie, dass dieses vom Bezugspunkt unabhängig ist.

- (c) Erinnern Sie sich daran, wie die Lösung durch das Hinzudenken zweier Spiegelladungen konstruiert wurde und bestimmen deren Dipolmoment (als ob diese real wären). Auch dieses ist vom Bezugspunkt unabhängig (warum?). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem unter (b) berechneten.

9.4 Clausius Mossotti Gleichung

Unter Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes \mathbf{E}_{ext} können Atome ohne eigenes elektrisches Dipolmoment ein solches erhalten. Ein einfaches Modell dafür haben

wir gerade gesehen. Für zeitlich und räumlich schwach veränderliche Felder wird dies proportional zu \mathbf{E}_{ext} sein, so dass

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$

Man nennt α die Polarisierbarkeit des Atoms.

Auf der andere Seite haben wir in der Vorlesung den Begriff der Polarisierung kennen gelernt. Diese ist ein Vektorfeld \mathbf{P} , das Richtung und Stärke der Dipoldichte (Dipolmoment pro Volumen) einer Substanz angibt. Auch für diese ist es häufig zutreffend, dass sie proportional zum elektrischen Feld ist,

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}.$$

Dabei ist hier \mathbf{E} , im Unterschied zu \mathbf{E}_{ext} oben, das lokal existente elektrische Feld, mit Einschluss aller (u.U. gemittelten) Anteile, die von den atomaren Konstituenten herrühren. Die Proportionalitätskonstante haben wir als $\varepsilon_0 \chi_e$ geschrieben, wobei die Größe χ_e als „elektrische Suszeptibilität“ des Mediums bezeichnet wird.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Definitionen, dass

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1.$$

- (b) Indem Sie annehmen, dass sich die Felder \mathbf{E} und \mathbf{E}_{ext} um die Beiträge unterscheiden, die sich durch Mittelung über Kugeln ergeben, die je ein Atom gerade ganz enthalten, leiten Sie ab, dass

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} \left(1 - \frac{\alpha N}{3\varepsilon_0} \right).$$

Hier bezeichnet N die Volumendichte der Atome, so dass $1/N$ das Volumen angibt, das ein Atom einnimmt. Benutzen Sie dazu das Ergebnis aus der Vorlesung betreffend die Mittelung statischer elektrischer Felder über Kugeln, die die Ladungsverteilung ganz enthalten, hier also vom Volumen $1/N$ sind.

- (c) Stellt man sich nun vor, dass die Polarisierung \mathbf{P} atomistischen Ursprungs ist, wird man ansetzen

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p}.$$

Leiten Sie daraus und dem Vorhergehenden folgende Beziehungen ab:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0}{N} \frac{\chi_e}{1 + \frac{\chi_e}{3}} = \frac{3\varepsilon_0}{N} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}.$$

Das ist die sogenannte *Clausius-Mossotti*-Formel, deren physikalische Bedeutung darin besteht, dass eine atomistische Eigenschaft eine Größe – nämlich die Polarisierbarkeit α – mit der phänomenologischen Materialkonstante ε_r in Beziehung bringt.

- (d) Zeigen Sie mit Hilfe des Vorlesungsteils über Wellenlösungen der Maxwell-Gleichungen, dass in einem magnetisch inaktiven Medium (also $\mu = \mu_0$) die Clausius-Mossotti-Formel auch so geschrieben werden kann:

$$\alpha = \frac{3\varepsilon_0 n^2 - 1}{N n^2 + 2}.$$

Diese wird in der Optik auch *Lorenz-Lorentz*-Gleichung genannt.

9.5 Sphärische Randbedingungen in der Elektrostatik

Gegeben Sei das Potential

$$\phi(\mathbf{x}) = -E_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{e} - \frac{p}{4\pi\varepsilon} (\mathbf{e} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right).$$

Hier sind \mathbf{e} ein Einheitsvektor, E_0 und p Konstante und $r := \|\mathbf{x}\|$.

- (a) Zeigen oder argumentieren Sie, dass dieses Potential die Laplace-Gleichung im ganzen Raum mit Ausnahme des Ursprungs erfüllt und dass das zugehörige elektrische Feld der Superposition eines konstanten Feldes der Stärke E_1 in Richtung von \mathbf{e} und eines Dipols mit Dipolmoment $\mathbf{p} = p\mathbf{e}$ entspricht.
- (b) Sei der Wert E_1 gegeben und außerdem ein Radius R . Zeigen Sie, dass Sie p so bestimmen können, dass das elektrische Feld normal auf der Sphäre mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung steht und dass das Potential auf dieser Sphäre verschwindet. Welche Gesamtladung trägt die Sphäre und was ist das Dipolmoment ihrer Ladungsverteilung? Argumentieren Sie, dass die so erhaltene Lösung die Antwort auf die Frage nach dem elektrischen Feld im Außenraum einer leitenden Sphäre in einem konstanten elektrischen Feld enthält und ebenfalls die Frage beantwortet, welches Dipolmoment die Sphäre durch die Polarisation des äußeren Feldes erfährt.
- (c) Betrachten Sie nun den Fall, in dem das Äußere und Innere der Sphäre mit nicht leitenden Medien der Permittivitäten ε_1 bzw. ε_2 erfüllt ist. Auf der

Grenzfläche gebe es keine Oberflächenladungen, so dass die Grenzbedingungen die Stetigkeit des Potentials (und damit der Tangentialkomponente des \mathbf{E} -Feldes) und der Normalenkomponente des \mathbf{D} -Feldes sind. Im Inneren sei das \mathbf{E} -Feld von der Form $E_2\mathbf{e}$ mit konstantem E_2 , im Äußeren wie in Aufgabenteil (a) nur mit ε_1 statt ε . Zeigen Sie, dass bei gegebenem R und E_1 die Werte von E_2 und p durch die Radnbedingungen eindeutig bestimmt sind und geben sie diese explizit an. Diskutieren Sie die Grenzfälle $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ und $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Wie unterscheiden sich die \mathbf{E} und \mathbf{D} Felder im Inneren der Sphäre in diesen Fällen?