

Differentialgeometrie für Physiker

DOMENICO GIULINI

Institut für Theoretische Physik
Riemann Center for Geometry and Physics
Leibniz Universität Hannover

Dieses Manuskript ist vorläufig und
wird immer mal wieder aktualisiert
Version vom 10. Juni 2020

Zusammenfassung

In der modernen theoretischen Physik spielen differentialgeometrische Konzepte und Methoden eine immer größere Rolle. Während die Allgemeine Relativitätstheorie als Modell der Raumzeit eine Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit zu Grunde legt, steht bei Eichtheorien das Hauptfaserbündel über der Raumzeit mit seiner Theorie der Zusammenhänge im Mittelpunkt.

Im ersten Teil der Vorlesung beginnen wir mit der Diskussion der Geometrie von Kurven und Flächen im Anschauungsraum. Dieser Teil dient vor allem der Einführung des Begriffs der Krümmung und des Zusammenhangs an Beispielen (eingebettete Flächen im \mathbb{R}^3), die primär eine Anschauung des Krümmungsbegriffes vermitteln sollen. Damit soll primär eine Anschauung der relevanten geometrischen Größen vermittelt werden; es wird also absichtlich kein Wert auf die moderne, abstrakte Formulierung der Differentialgeometrie gelegt. Dem entsprechend wird auch schamlos die Koordinatenschreibweisen verwendet.

Im zweiten Teil verallgemeinern wir dies auf höhere Dimensionen und nehmen dafür den allgemeinen und abstrakteren Standpunkt ein. Wir entwickeln das Konzept der differenzierbaren Mannigfaltigkeit und achten darauf, dass bei aller Kürze mathematische Strenge und begriffliche Klarheit nicht zu kurz kommen. Der Aufbau ist logisch hierarchisch, d.h. es wird erst der Begriff der differenzierbaren Struktur und die nur darauf aufbauenden Konstruktionen (Tensorfelder) und Operationen (Lie- und äußere Ableitung) erklärt, bevor Zusatzstrukturen, wie die kovariante Ableitung, eingeführt werden. Thematisch stehen solche Inhalte im Vordergrund, die für eine moderne Präsentation der Allgemeinen Relativitätstheorie nützlich sind.

Im dritten Teil (der momentan noch nicht fertig vorliegt) diskutieren wir die Differentialgeometrie von Hauptfaserbündeln mit Zusammenhang und deren assoziierte Vektorbündel.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| I | Kurven und Flächen im Anschauungsraum | 3 |
| 1 | Das mathematische Modell des Anschauungsraumes | 4 |
| 2 | Kurven im Anschauungsraum | 7 |
| 2.1 | Kurven als Abbildungen | 7 |
| 2.2 | Das begleitende Dreibein | 9 |
| 2.3 | Die Frenet-Serret-Gleichungen | 10 |
| 2.4 | Krümmung und Torsion | 11 |
| 2.5 | Mehr über Krümmung: Schmiege- versus Krümmungsgrößen | 14 |
| 2.6 | Allgemeine Parametrisierung | 16 |
| 3 | Flächen im Anschauungsraum | 18 |
| 3.1 | Flächen als Abbildungen | 18 |
| 3.2 | Das begleitende Dreibein | 19 |
| 3.3 | Die Gleichungen der zweiten Ableitung | 22 |
| 3.4 | Krümmung; intrinsische und extrinsische Größen | 25 |
| 3.5 | Parallelverschiebung und kovariante Ableitung | 36 |
| 3.6 | Geodätische und Autoparallele Kurven | 39 |
| 3.7 | Parameterabhängigkeit und Tensorfelder | 45 |
| 3.8 | Kovariante Ableitung von Tensorfeldern | 49 |
| 3.9 | Gauß' <i>Theorema Egregium</i> | 51 |
| 3.10 | Der Riemann'sche Krümmungstensor | 53 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| II | Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten | 55 |
| 4 | Grundstrukturen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten | 56 |
| 4.1 | Differenzierbare Mannigfaltigkeit: Was ist das? | 56 |
| 4.2 | Tangentialräume | 61 |
| 4.3 | Vektor- und Tensorfelder | 69 |
| 4.4 | Differenzierbare Abbildungen | 74 |
| 4.5 | Die äußere Ableitung | 76 |
| 4.6 | Die Lie Ableitung | 83 |
| 5 | Zusatzstrukturen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten | 95 |
| 5.1 | Kovariante Ableitungen | 95 |
| 5.2 | Kovariante Ableitungen entlang von Kurven | 100 |
| 5.3 | Geodätische und Autoparallele | 104 |
| 5.4 | Torsion und Krümmung | 106 |
| 5.5 | Torsion, Krümmung und die Nicht-Vertauschbarkeit kovarianter Ableitungen | 109 |
| 5.6 | Metrik und metrischer Defekt | 110 |
| 5.7 | Die Levi-Civita kovariante Ableitung | 111 |
| 5.8 | Die Fermi kovariante Ableitung entlang von Kurven | 115 |
| 5.9 | Die Cartanschen Strukturgleichungen | 118 |
| 5.10 | Die Bianchi Identitäten | 122 |
| 5.11 | Symmetrien des Krümmungstensors | 124 |
| 5.12 | Exponentialabbildung und Riemann'sche Normalkoordinaten | 127 |
| 5.13 | Die Schnittkrümmung | 132 |
| 5.14 | Affine und projektive Strukturen | 136 |
| 5.15 | Konforme Strukturen; Vergleich mit projektiven Strukturen | 140 |
| 6 | Weiterführende Themen | 142 |
| 6.1 | Orthogonale Zerlegung des Krümmungstensors | 142 |
| 7 | Ergänzungen zur linearen und multilinearen Algebra | 146 |
| 7.1 | Tensoralgebren | 146 |
| 7.2 | Isomorphismen zwischen Vektorräumen und ihren Dualräumen (Index hoch- und runterziehen) | 150 |
| 7.3 | Hodge Dualität | 155 |

Teil I

Kurven und Flächen im Anschauungsraum

Kapitel 1

Das mathematische Modell des Anschauungsraumes

Dieser erste Teil soll dazu dienen, die für die Differentialgeometrie typischen Begriffsbildungen wie *Metrik*, *Krümmung* und *Zusammenhang* anhand leicht vorstellbarer Objekte – wie Kurven und Flächen – einzuführen und ihnen einsichtige mathematische Ausdrücke zuzuordnen. Diese Anschauung wird dadurch erreicht, dass man die Geometrie von Objekten untersucht, die man sich im dreidimensionalen Anschauungsraum eingebettet vorstellen kann. Es wird dann umso leichter sein, die entsprechenden Begriffe in höhere Dimensionen und ohne die Anschauung eines einbettenden Raumes zu verallgemeinern. In diesem ersten Teil werden wir uns oft (aber nicht immer) an dem klassischen Lehrbuch von Detlef Laugwitz [2] orientieren, ohne jedesmal auf dieses zu verweisen.

Im diesem ersten Kapitel wollen wir zunächst nur den Begriff des Anschauungsraums präzisieren.

Definition 1. Als *Anschauungsraum* bezeichnen wir den 3-dimensionalen Euklidischen Raum E_3 . Dieser ist ein reeller 3-dimensionaler affiner Raum mit euklidischer Metrik. Genauer ist also E_3 ein 4-Tupel $(M, V, +, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ bestehend aus einer Menge M von Raumpunkten, einem 3-dimensionalen reellen Vektorraum V , einer einfach-transitiven Aktion von V – aufgefasst als abelsche Gruppe – auf M : $(m, v) \mapsto m + v$ mit $m + 0 = m$ und $(m + v) + w = m + (v + w) =: m + v + w$, und einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform auf V : $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v | w \rangle$. \square

Bemerkung 2. Die Euklidische Metrik auf V definiert eine Norm $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

auf V und eine Distanzfunktion $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf M , durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}, \quad (1.1a)$$

$$d(m, n) := \|m - n\|. \quad (1.1b)$$

Letztere definiert eine metrische Topologie auf M die etwa dadurch charakterisiert werden kann, dass man die Umgebungsbasen $U(m)$ für jeden Punkt $m \in M$ angibt. Im vorliegenden Fall sind diese gerade die offenen Bälle,

$$\overset{\circ}{B}(m, r) := \{p \in M : d(p, m) < r\}, \quad (1.2)$$

wobei man sich auf rationale Radien r beschränken kann. Als Teilmenge der Potenzmenge von M ist $U(m)$ dann die disjunkte Vereinigung dieser Bälle. Zur Erinnerung: Ist zu jedem Punkt m einer Menge M eine Umgebungsbasis $U(m)$ definiert, dann charakterisieren diese eine Topologie von M wie folgt: Eine Menge $V \subseteq M$ ist genau dann offen, wenn zu jedem $m \in V$ ein $U \in U(m)$ mit $U \subset V$ existiert. \square

Definition 3. Ein 2-Tupel $B := \{o, b\}$ bestehend aus $o \in M$ und einer Basis $b = \{e_1, e_2, e_3\}$ von V definiert eine *affine Basis*. Zu b gehört eindeutig die Dualbasis $b^* = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ des zu V dualen Vektorraums V^* , die definiert ist durch $\theta^a(e_b) = \delta_b^a$. Eine affine Basis B definiert eine Bijektion

$$\phi_B : M \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad m \mapsto (\theta^1(m - o), \theta^2(m - o), \theta^3(m - o)) \quad (1.3a)$$

$$\phi_B^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow M, \quad (x^1, x^2, x^3) \mapsto o + \sum_{a=1}^3 x^a e_a. \quad (1.3b)$$

Eine affine Basis $B := \{o, e_1, e_2, e_3\}$ eines Euklidischen Raumes heißt *orthogonal*, wenn $\langle e_a | e_b \rangle = \delta_{ab}$. Das Tripel $(\phi_B, M, \mathbb{R}^3)$ nennt man auch *affine Karte*, wobei ϕ_B *Kartenabbildung*, M *Kartengebiet* und \mathbb{R}^3 *Kartenbild* heißen. Ist B orthogonal so heißt die zugehörige affine Karte *euklidisch*. \square

Sind zwei affine Basen $B = \{o, b\}$ und $\bar{B} = \{\bar{o}, \bar{b}\}$ gegeben, wobei $b = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\bar{b} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, mit zugehörigen Dualbasen $b^* = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$ und $\bar{b}^* = \{\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3\}$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $a \in V$ und eine eindeutig bestimmte invertierbare 3×3 Matrix $\{A_b^a\}$ mit reellen Einträgen, so dass

$$\bar{o} = o + a, \quad \bar{e}_b = \sum_{a=1}^3 A_b^a e_a, \quad \bar{\theta}^a = \sum_{b=1}^3 (A^{-1})_b^a \theta^b. \quad (1.4)$$

Sind die Karten euklidisch dann ist die Matrix A orthogonal, d.h. A^T ist die Inverse zu A .

Definition 4. Zu den affinen Basen B und \bar{B} gehören die Kartenabbildungen ϕ_B bzw. $\phi_{\bar{B}}$. Als *affinen Kartenwechsel* bezeichnet man die Abbildungen

$$\phi_B \circ \phi_{\bar{B}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \bar{x}^a \mapsto x^a := \sum_{b=1}^3 A_b^a \bar{x}^b + a^a, \quad (1.5a)$$

$$\phi_{\bar{B}} \circ \phi_B^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad x^a \mapsto \bar{x}^a := \sum_{b=1}^3 (A^{-1})_b^a (x^b - a^b), \quad (1.5b)$$

mit $a^a := \theta^a(a)$. Obwohl beide Kartenabbildungen in den \mathbb{R}^n abbilden, haben wir zur besseren Unterscheidung die Koordinaten im Bildraum von ϕ_B mit x^a , die im Bildraum $\phi_{\bar{B}}$ mit \bar{x}^a bezeichnet. \square

Bemerkung 5. Ist eine affine Basis B gegeben, so definiert diese eine Topologie auf M wie folgt: Die offenen Mengen in M sind genau die Urbilder der offenen Mengen in \mathbb{R}^n unter der Abbildung (1.3a). Die so induzierte Topologie ist die schwächste (oder gröbste; hat am wenigsten offene Mengen) auf M für die die gewählte affine Kartenabbildung stetig ist. Da aber die Abbildungen der affinen Kartenwechsel (1.5) selbst stetig (sogar analytisch) sind, ist eine affine Kartenabbildung stetig genau dann, wenn es alle sind. Man sieht sofort, dass die so durch die affinen Karten induzierte Topologie gleich ist der metrischen aus Bemerkung 2, was einfach daher rührt, dass die Kartentopologie ja durch die Topologie des \mathbb{R}^n induziert wurde, also der Produkttopologie, die ihrerseits gleich ist der metrischen Topologie auf \mathbb{R}^n (jeder offene Ball enthält einen offenen Würfel und umgekehrt). Wir betonen diese zweite Art der Topologisierung durch ausgewählte Karten an dieser Stelle deshalb, weil sie analog der Topologisierung allgemeiner abstrakter Mannigfaltigkeiten ist, die ebenfalls durch die Forderung der Stetigkeit ausgewählter Kartenabbildungen geschieht und nicht, wie in Bemerkung 2, durch eine von vornherein gegebene geometrische Struktur (Distanzfunktion). \square

Bemerkung 6. Im Folgenden denken wir uns immer eine orthogonale affine Basis $b := \{o, e_1, e_2, e_3\}$ gewählt, bezüglich der wir gemäß (1.3) den Anschauungsraum mit seinem treuen Bild \mathbb{R}^3 , versehen mit dem Standard-Skalarprodukt, identifizieren. Punkte m des Anschauungsraumes werden so durch 3-Tupel $\phi_B(m) = \vec{x} := (x^1, x^2, x^3)$ reeller Zahlen eineindeutig repräsentiert, und zwei Punkten m, m' des Anschauungsraumes ist das Euklidische Skalarprodukt

$$\langle m - o \mid m' - o \rangle = \vec{x} \cdot \vec{x}' := \delta_{ab} x^a x'^b := \sum_{a=1}^3 x^a x'^a \quad (1.6)$$

zugeordnet. Alle getroffenen geometrischen Aussagen, die sich nur auf die Geometrie des Anschauungsraumes beziehen, werden invariant sein unter Kartenwechsel-Transformationen (1.5), also von der Wahl der Karte nicht abhängen. \square

Kapitel 2

Kurven im Anschauungsraum

2.1 Kurven als Abbildungen

Definition 7. Eine *Kurve* (im Anschauungsraum) ist eine mindestens dreimal stetig differenzierbare Abbildung

$$\vec{z}: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \lambda \mapsto \vec{z}(\lambda), \quad (2.1)$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge ist, also ein offenes Intervall, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $I = \mathbb{R}$. Wir setzen weiter voraus, dass die Ableitung der Funktion (2.1) an keinem Punkt verschwindet. Um hier gleich weiteren störenden Komplikationen vorzubeugen, die uns hier nicht interessieren, müssen wir noch die technische Annahme hinzufügen, dass die Abbildung \vec{z} eine *Einbettung* ist. Das bedeutet insbesondere, dass sie injektiv ist, darüberhinaus aber auch, dass sie ein Homöomorphismus des Intervalls I auf sein Bild in \mathbb{R}^3 ist. \square

Bemerkung 8. Die Forderung der Injektivität bedeutet lediglich, dass je zwei verschiedenen Punkte von I verschiedene Bildpunkte in \mathbb{R}^3 zugeordnet werden, die Kurve sich also nicht selbst schneidet. Die weitergehende Forderung besagt, dass $\vec{z}: I \rightarrow \text{Bild}(I, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ ein topologischer Homöomorphismus ist, wobei das Bild von I unter \vec{z} als Teilmenge von \mathbb{R}^3 die Spurtopologie trägt, d.h. die offenen Mengen in diesem Bild sind genau die Schnitte offener Mengen in \mathbb{R}^3 mit dem Bild. Die Homöomorphie verlangt dann, dass sowohl die Abbildung $\vec{z}: I \rightarrow \text{Bild}(I, \vec{z})$ als auch ihre Inverse stetig ist, also nicht nur die Urbilder offener Mengen offen sind (Stetigkeit), sondern auch die Bilder offener Mengen offen sind (Stetigkeit der Inversen; die Abbildung heißt dann offen). Letztere Bedingung schließt manche stetigen injektive Abbildung aus, nämlich solche, unter denen Paare von Punkten aus disjunkten offenen Umgebungen der Urbildmenge nicht mehr in disjunkten

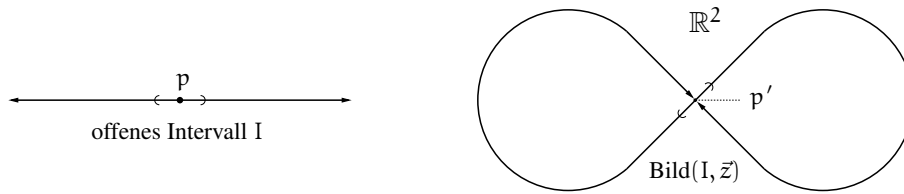


Abbildung 2.1: Das Bild eines offenen Intervalls I unter der Abbildung \vec{z} im \mathbb{R}^2 entspricht hier einer liegende Acht, in der der eine der zwei am Kreuzungspunkt übereinanderliegenden Punkte entfernt wurde. Der Mittelpunkt p des Intervalls wird auf den am Kreuzungspunkt verbleibenden Punkt p' abgebildet. Um den Punkt p in I ist ein offenes Intervall (im Text U genannt) eingezeichnet, das in das ebenfalls eingezeichnete Intervall auf der Acht um den Punkt p' abgebildet wird (im Text U' genannt). In der Spurtopologie ist aber U' nicht offen, da jede offene Menge des \mathbb{R}^2 die p' enthält immer auch Bildpunkte offener Umgebungen der Intervallenden (in Text V genannt) beinhaltet; d.h. im rechten Bild kommen die „Pfeilspitzen“ dem Punkt p' beliebig nahe.

offenen Umgebungen des Zielraumes landen, sich in diesem Sinne also „beliebig nahe“ kommen. Enthält nämlich im Zielraum jede offene Umgebung des Bildpunktes p' von p auch Bildpunkte einer anderen offenen Umgebung V , die p nicht enthält, so kann die Abbildung nicht offen sein, da das Bild einer zu V disjunkten offenen Umgebung U von p (die hier immer existiert) wegen der Injektivität auf eine Menge U' abgebildet wird, die keinen Bildpunkt von V enthält. In diesem Sinne schließen wir also aus, dass sich „wohlseparierte“ Urbildmengen nach ihrer Abbildung in den Zielraum „zu nahe“ kommen. Das kann passieren, wenn wie im vorliegenden Fall die Urbildmenge nicht kompakt ist. Ein Beispiel ist in Abbildung 2.1 diskutiert. \square

Bemerkung 9. Es ist prinzipiell wichtig zu unterscheiden zwischen einer Kurve als Abbildung $\vec{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ihrem Bild, $\text{Bild}(I, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$. Zwei verschiedene Abbildungen können durchaus das gleiche Bild (als Mengen) besitzen. Ist etwa $\phi : I \rightarrow I'$ eine Bijektion, die samt ihrer Umkehrabbildung dreimal stetig differenzierbar ist, dann sind \vec{z} und $\vec{z}' := \vec{z} \circ \phi^{-1} : I' \rightarrow \mathbb{R}^3$ verschiedenen Abbildungen mit gleichem Bild, also nach unserer Definition (Kurven als Abbildungen) auch verschiedene Kurven. Man nennt dann \vec{z}' eine *Umparametrisierung* von \vec{z} , die auch so sein kann, dass $I' = I$ aber $\phi \neq \text{id}_I$. Die geometrischen Aussagen, die wir über Kurven treffen werden, hängen allerdings nur von $\text{Bild}(I, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ und nicht von der Parametrisierung ab. Es ist wichtig, sich dieser Tatsache zu vergewissern, da wir die Ergebnisse meist unter Benutzung einer bevorzugten Parametrisierung, nämlich nach der Bogenlänge, ableiten werden. Dabei ist zu beachten, dass der Parameter der Bogenlänge erst durch $\text{Bild}(I, \vec{z})$ festgelegt wird. Aus Bequemlichkeit, und auch um die Notation nicht zu sehr zu Komplizieren, werden wir eines

unter Physikern üblichen Vergehens schuldig machen, das darin besteht, nach einer Reparametrisierung wieder von *der* Kurve zu sprechen (als sei es die gleiche) und das Funktionssymbol \vec{z} beizubehalten. Ableitungen nach unterschiedlichen Parametern werden allerdings durch verschiedene Symbole (Strich allgemein, oder Punkt bei Bogenlänge) am Funktionssymbol \vec{z} gekennzeichnet. \square

Die Bogenlänge zwischen den Kurvenpunkten $\vec{z}_1 := \vec{z}(\lambda_1)$ und $\vec{z}_2 := \vec{z}(\lambda_2)$, wobei $\lambda_2 > \lambda_1$, ist

$$s(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{\vec{z}'(\lambda) \cdot \vec{z}'(\lambda)}, \quad (2.2)$$

wobei $\vec{z}' := d\vec{z}/d\lambda$. Diese hängt bei gegebenen $\text{Bild}(I, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ nur von den Punkten $\vec{z}_{1,2}$ ab, nicht von der gewählten Parametrisierung.

Zeichnet man irgend einen Punkt \vec{z}_0 auf der Kurve aus, so ist die Bogenlänge $s(\lambda)$ zwischen dem festen Punkt $\vec{z}_0 = \vec{z}(\lambda_0)$ und dem variablen Punkt $\vec{z}(\lambda)$ für $\lambda \geq \lambda_0$ gegeben durch

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \sqrt{\vec{z}'(\lambda') \cdot \vec{z}'(\lambda')}, \quad (2.3)$$

wobei wir vorausgesetzt haben, dass \vec{z}' nirgends verschwindet, die Parametrisierung der Kurve mit λ also streng monoton ist.

2.2 Das begleitende Dreibein

Im Folgenden werden wir Bogenlänge (gerechnet von einem geeignet gewählten Anfangspunkt \vec{z}_0) selbst als Parameter verwenden. Dann ist

$$\dot{\vec{z}} := \frac{d\vec{z}}{ds} = \vec{z}' \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\vec{z}'}{\sqrt{\vec{z}' \cdot \vec{z}'}}, \quad (2.4)$$

so dass

$$\|\dot{\vec{z}}\| := \sqrt{\dot{\vec{z}} \cdot \dot{\vec{z}}} = 1. \quad (2.5)$$

Differentiation von $\dot{\vec{z}} \cdot \dot{\vec{z}} = 1$ nach s liefert

$$\dot{\vec{z}} \cdot \ddot{\vec{z}} = 0. \quad (2.6)$$

Gemessen in Einheiten der Bogenlänge ist die Kurvengeschwindigkeit vom Betrag eins und die Kurvenbeschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit. Ist $\ddot{\vec{z}}(s) \neq \vec{0}$ bilden $\{\dot{\vec{z}}(s), \ddot{\vec{z}}(s), \ddot{\vec{z}}(s) \times \dot{\vec{z}}(s)\}$ eine dem Raumpunkt $\vec{z}(s)$ zugeordnete orthogonale und orientierte Basis des \mathbb{R}^3 . In normierter Form hat diese einen speziellen Namen:

Definition 10. Ist $\ddot{\vec{z}}(s) \neq \vec{0}$; dann heißt

$$\vec{e}_1(s) := \dot{\vec{z}}(s) \quad (\text{Tangenten-Einheitsvektor}), \quad (2.7a)$$

$$\vec{e}_2(s) := \ddot{\vec{z}}(s) / \|\ddot{\vec{z}}(s)\| \quad (\text{Hauptnormale}), \quad (2.7b)$$

$$\vec{e}_3(s) := \dot{\vec{z}}(s) \times \ddot{\vec{z}}(s) / \|\dot{\vec{z}}(s) \times \ddot{\vec{z}}(s)\| \quad (\text{Binormale}), \quad (2.7c)$$

das *begleitende 3-Bein* der Kurve \vec{z} an der Stelle $\vec{z}(s)$. Dieses ist orthonormiert, d.h.

$$\vec{e}_a(s) \cdot \vec{e}_b(s) = \delta_{ab} \quad (2.8)$$

und positiv orientiert, d.h.

$$\vec{e}_1(s) \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3(s)) = (\vec{e}_1(s) \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3(s) = 1. \quad (2.9)$$

Da nach Voraussetzung die Kurve $s \mapsto \vec{z}(s)$ von der Klasse C^3 ist, sind die Abbildungen $s \mapsto \vec{e}_s(s)$ i.A. nur von der Klasse C^1 (da zweite Ableitungen von \vec{z} auftreten). \square

Ist $\ddot{\vec{z}}(s) = \vec{0}$ für alle $s \in (s_1, s_2)$ so ist das Bild dieses Intervalls unter der Abbildung \vec{z} ein Geradenstück:

$$\vec{z}(s) = \vec{a}s + \vec{b}, \quad \forall s \in (s_1, s_2) \quad (2.10)$$

mit konstanten $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\|\vec{a}\| = 1$.

2.3 Die Frenet-Serret-Gleichungen

Da das begleitende Dreibein für jeden Wert des Parameters s eine Basis bildet, gibt es stetige (also C^0 -) Funktionen $s \mapsto T_b^a(s)$, so dass

$$\dot{\vec{e}}_b(s) = \sum_{a=1}^3 T_b^a(s) \vec{e}_a(s). \quad (2.11)$$

Da das Skalarprodukt (2.8) unabhängig von s ist, folgt durch Ableiten von (2.8) nach s und Benutzung von (2.11) und wieder (2.8):

$$T_{ab}(s) := \sum_{c=1}^3 \delta_{ac} T_b^c(s) = - \sum_{c=1}^3 \delta_{bc} T_a^c(s) = -T_{ba}(s). \quad (2.12)$$

Das bedeutet, dass die Endomorphismen des \mathbb{R}^3 (lineare Abbildungen) $T(s) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(s)(\vec{e}_b(s)) = \sum_{a=1}^3 T_b^a(s)\vec{e}_a(s)$, antisymmetrisch bezüglich des euklidischen Skalarproduktes sind, d.h. $\langle v | T(s)w \rangle = -\langle T(s)v | w \rangle$. Da für orthogonale Basen die Matrizen $T_b^a(s)$ und $T_{ab}(s)$ identisch sind, bedeute dies, dass die den Endomorphismus $T(s)$ repräsentierende Matrix $T_b^a(s)$ ebenfalls antisymmetrisch ist. Eine allgemeine antisymmetrische Matrix $T_b^a(s)$ hat in drei Dimensionen im Allgemeinen drei unabhängige Einträge. Aus (2.7a) folgt durch Ableiten sofort $\dot{\vec{e}}_1(s) = \ddot{z}(s) = \|\ddot{z}(s)\|\vec{e}_2(s)$, also $T_1^3(s) = -T_3^1(s) = 0$. Somit hat die Matrix $T_b^a(s)$ nur zwei i.A. nicht-verschwindende Komponenten, nämlich $T_1^2(s)$ und $T_2^3(s)$:

Definition 11. Man nennt die Funktionen

$$T_1^2(s) = -T_2^1(s) =: \kappa(s) = \|\ddot{z}(s)\| \quad \text{die Krümmung,} \quad (2.13)$$

$$T_2^3(s) = -T_3^2(s) =: \tau(s) \quad \text{die Torsion.} \quad (2.14)$$

Die resultierenden Gleichungen (2.11) (hier in einer offensichtlich erweiterten Matrix-Schreibweise)

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_1(s) \\ \dot{\vec{e}}_2(s) \\ \dot{\vec{e}}_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1(s) \\ \vec{e}_2(s) \\ \vec{e}_3(s) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

heißen die *Frenet-Serret Gleichungen*. Diese können in folgender äquivalenten Form geschrieben werden:

$$\dot{\vec{e}}_a(s) = \vec{\omega}(s) \times \vec{e}_a(s), \quad (2.16a)$$

wobei man

$$\vec{\omega}(s) := \tau(s) \vec{e}_1(s) + \kappa(s) \vec{e}_3(s) \quad (2.16b)$$

den *Darboux-Vektor* nennt. \square

2.4 Krümmung und Torsion

Krümmung, Torsion und Darboux-Vektor haben jeweils eine sehr anschauliche, wenn auch nicht ganz triviale Bedeutung. Zunächst stellen wir jedoch ihre analytischen Eigenschaften fest.

Bemerkung 12. Gegeben eine Kurve $\vec{z} : I \rightarrow \vec{z}(s)$ der Klasse C^3 mit $\|\ddot{\vec{z}}(s)\| \neq 0$ für alle $s \in I$. Dann sind Krümmung und Torsion folgende, durch \vec{z} ausgedrückte Funktionen:

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \kappa(s) = \|\ddot{\vec{z}}(s)\| \quad \text{Klasse } C^1, \quad (2.17a)$$

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \frac{(\dot{\vec{z}}(s) \times \ddot{\vec{z}}(s)) \cdot \ddot{\vec{z}}(s)}{\|\ddot{\vec{z}}(s)\|^2} \quad \text{Klasse } C^0. \quad (2.17b)$$

Gleichung (2.17a) ist klar und Gleichung (2.17b) folgt aus $\tau = \ddot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3$ und Einsetzen der Definitionen (2.7b) und (2.7c) von \vec{e}_2 und \vec{e}_3 . Im Folgenden werden wir also bei der gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzung an \vec{z} noch eine Ableitung von κ bilden können, nicht jedoch von τ und damit auch nicht von $\vec{\omega}$. Für letztere müsste \vec{z} von der Klasse C^4 sein. \square

Was nun die geometrische Deutung angeht, so ist zunächst ist aus (2.16a) klar, dass $\vec{\omega}(s)$ der Vektor der *Winkelgeschwindigkeit* ist, mit dem das begleitende Dreibein an der Stelle $\vec{z}(s)$ im Raum rotiert wenn man entlang der Kurve mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag Eins fortschreitet. Die durch $\vec{\omega}$ repräsentierte Winkelgeschwindigkeit wird also in Einheiten von Bogenmaß pro Längeneinheit (entlang der Kurve) gemessen. Dieser Vektor liegt in der Ebene, die von der Tangente und der Binormalen aufgespannt wird, steht also immer senkrecht zur Hauptnormalen.

Definition 13. Die Ebene

$$KE(s) := \vec{z}(s) + \text{Span}\{\vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s)\} = \vec{z}(s) + \text{Span}\{\dot{\vec{z}}(s), \ddot{\vec{z}}(s)\} \quad (2.18)$$

nennt man die *Krümmungsebene* der Kurve \vec{z} durch den Punkt $\vec{z}(s)$. \square

Der Name „Krümmungsebene“ rührt einfach daher, dass wegen

$$\begin{aligned} \vec{z}(s) &= \vec{z}(s_*) + (s - s_*) \dot{\vec{z}}(s_*) + \frac{1}{2}(s - s_*)^2 \ddot{\vec{z}}(s_*) + \mathcal{O}((s - s_*)^3) \\ &= \vec{z}(s_*) + (s - s_*) \vec{e}_1(s_*) + \frac{1}{2}(s - s_*)^2 \kappa(s_*) \vec{e}_2(s_*) + \mathcal{O}((s - s_*)^3) \end{aligned} \quad (2.19)$$

die Kurve am Punkt $\vec{z}(s_*)$ bis in einschließlich 2. Ordnung in der Krümmungsebene durch $\vec{z}(s_*)$ verläuft. Bis einschließlich 2. Ordnung wird die Kurve \vec{z} am Punkt $\vec{z}(s_*)$ also durch die ebene Kurve approximiert, die aus (2.19) durch Weglassen von Termen von dritter und höherer Ordnung in $(s - s_*)$ entsteht. Der Krümmungsradius dieser ebenen Kurve ist am Punkt $\vec{z}(s_*)$ gerade durch $1/\kappa(s_*)$ gegeben, das heißt, dass der in der Krümmungsebene liegende Kreis mit Radius $1/\kappa(s_*)$ und Mittelpunkt $\vec{z}(s_*) + \vec{e}_2(s_*)/\kappa(s_*)$ diese ebene Kurve, und damit auch die Kurve \vec{z} , in 2. Ordnung berührt. Wir werden einen Beweis dieser Aussage weiter unten

als Spezialfall einer weitergehenden Aussage kennenlernen, haben aber damit bereits eine erste Interpretation der Krümmung. Komplimentiert durch die Beobachtung, dass κ die Komponente des Darboux-Vektors entlang \vec{e}_3 ist, erreichen wir folgende Interpretation der Krümmung:

Bemerkung 14. $\kappa(s)$ ist die in Bogenmaß pro Weglänge gemessene Geschwindigkeit, mit der sich die Tangentialrichtung am Punkt $\vec{z}(s)$ beim Fortschreiten entlang der Kurve um die orientierte Achse $\text{Span}\{\vec{e}_3(s)\}$ in der Krümmungsebene dreht. $\kappa(s)$ ist auch der inversen Radius des in der Krümmungsebene gelegenen Kreises, der die Kurve am Punkte $\vec{z}(s)$ in 2. Ordnung berührt. \square

Definition 15. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $s_* \in I$ und $\vec{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Kurve (hier reicht C^2 da wir nur die Stetigkeit der Krümmung brauchen) mit $\kappa(s_*) \neq 0$. (Es existiert also das begleitende Dreibein in einer Umgebung von s_* und insbesondere die Krümmungsebenen.) Der Kreis mit Mittelpunkt $\vec{z}(s_*) + \vec{e}_2(s_*)/\kappa(s_*)$ und Radius $R^K(s_*) = 1/\kappa(s_*)$ in der Krümmungsebene $KE(s_*)$ heißt *Krümmungskreis* und $R^K(s_*)$ der *Krümmungsradius* der Kurve \vec{z} am Punkt $\vec{z}(s_*)$. \square

Die Torsion ist nun diejenige Größe, die gerade die Abweichung von einer ebenen Kurve anzeigt. Das sieht man sofort, wenn man in (2.19) die Approximation noch um eine Ordnung weiter treibt. Mit Hilfe der Frenet-Serret Formeln (2.15) folgt sofort

$$\ddot{\vec{z}} = d(\kappa\vec{e}_2)/ds = -\kappa^2\vec{e}_1 + \dot{\kappa}\vec{e}_2 + \kappa\tau\vec{e}_3 \quad (2.20)$$

so dass in dritter Ordnung ein nicht-verschwindender Term $\propto \vec{e}_3$ auftritt sofern $\tau\kappa \neq 0$, also falls $\tau \neq 0$ da ja $\kappa \neq 0$ vorausgesetzt war (ansonsten ist die Krümmungsebene ja überhaupt nicht definiert). Beachte, dass τ die Komponente des Darboux-Vektors ω entlang \vec{e}_1 ist, vgl (2.16). Daraus ergibt sich die Interpretation der Torsion:

Bemerkung 16. $\tau(s)$ ist die in Bogenmaß pro Weglänge gemessene Geschwindigkeit, mit der sich die Krümmungsebene am Punkt $\vec{z}(s)$ beim Fortschreiten entlang der Kurve um die orientierte Achse $\text{Span}\{\vec{e}_1(s)\}$ tangential zur Kurve dreht. \square

Dieser *lokalen* Charakterisierung der Torsion kann eine *globale* an die Seite gestellt werden durch folgende

Proposition 17. Eine Kurve $\vec{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ verläuft genau dann in einer Ebene wenn ihre Torsion an jedem Punkt verschwindet.

Beweis. Verläuft \vec{z} in einer Ebene dann existieren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und C^3 -Funktionen $\beta, \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\vec{z}(s) = \vec{a} + \beta(s)\vec{b} + \gamma(s)\vec{c}$; die Kurve verläuft also in der

Ebene $\vec{a} + \text{Span}\{\vec{b}, \vec{c}\}$, wobei \vec{b} und \vec{c} linear unabhängig sein sollen. Es ist klar, dass dann $\vec{e}_1(s)$ und $\vec{e}_2(s)$ für alle $s \in I$ in $\text{Span}\{\vec{b}, \vec{c}\}$ liegen, insbesondere also auch $\dot{\vec{e}}_2(s)$, dessen $\vec{e}_3(s)$ -Komponente somit verschwindet. Letztere ist nach der dritten Frenet-Serret-Gleichung (2.15) aber gerade $\tau(s)$, das somit für alle $s \in I$ verschwindet.

Ist umgekehrt $\tau(s) = 0$ für alle $s \in I$, dann ist wieder nach der dritten Frenet-Serret-Gleichung (2.15) $\dot{\vec{e}}_3(s) = 0$ also $\vec{e}_3(s) = \vec{n} \in \mathbb{R}^3$ konstant. Aus $\vec{0} = \vec{e}_1(s) \cdot \vec{e}_3(s) = \dot{\vec{z}}(s) \cdot \vec{n} = d(\vec{z}(s) \cdot \vec{n})/ds$ folgt dann $\vec{z}(s) \cdot \vec{n} = \vec{z}_* \cdot \vec{n}$, wobei $\vec{z}_* := \vec{z}(s = s_*)$ mit $s_* \in I$ irgend ein gewählter Punkt der Kurve ist. Also ist $(\vec{z}(s) - \vec{z}_*) \cdot \vec{n} = 0$ für alle $s \in I$. Mit anderen Worten, \vec{z} verläuft ganz in der Ebene senkrecht zu \vec{n} durch \vec{z}_* . \square

Wir wenden uns nun der Krümmung zu. Diese hat gemäß (2.13) die Dimension einer inversen Länge und es liegt somit nahe, der inversen Krümmung eine Länge zuzuordnen die als „Krümmungsradius“ interpretiert werden kann. In welchem Sinne das möglich ist, sei nun genauer untersucht.

2.5 Mehr über Krümmung: Schmiege- versus Krümmungsgrößen

Wir wollen versuchen, Radius und Mittelpunkt einer Kugel (2-Sphäre) im Raum so zu bestimmen, dass sie sich „möglichst glatt“ an einen Punkt $\vec{z}(s_*)$ der Kurve anschmiegt. Damit ist Folgendes gemeint: Sei \vec{m} ein Punkt außerhalb des Bildes der Kurve \vec{z} . Eine Kugel $K(\vec{m}, R) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - \vec{m}\| = R\}$ mit Mittelpunkt \vec{m} und Radius R schmiegt sich dann „möglichst glatt“ an die Kurve am Punkt $\vec{z}(s_*)$, wenn die Funktion $f(s) := \|\vec{z}(s) - \vec{m}\|^2 - R^2$ an der Stelle $s = s_*$ samt ihren Ableitungen zu bis zu möglichst hoher Ordnung verschwindet. Da es sich um vier gesuchte reelle Zahlen handelt – eine für R und drei für \vec{m} –, wird man neben der Funktion f noch ihre ersten drei Ableitungen betrachten. Das führt mit Hilfe der Frenet-Serret-Formeln (2.15) und der Orthogonalität (2.8) des begleitenden Dreibeins nach einfacher Rechnung auf

$$f(s_*) = (\vec{z}(s_*) - \vec{m})^2 - R^2 = 0, \quad (2.21a)$$

$$f'(s_*) = 2\vec{e}_1(s_*) \cdot (\vec{z}(s_*) - \vec{m}) = 0, \quad (2.21b)$$

$$f''(s_*) = 2\kappa(s_*) \vec{e}_2(s_*) \cdot (\vec{z}(s_*) - \vec{m}) + 2 = 0, \quad (2.21c)$$

$$f'''(s_*) = 2(\vec{z}(s_*) - \vec{m}) \cdot (-\kappa^2 \vec{e}_1 + \dot{\kappa} \vec{e}_2 + \kappa \tau \vec{e}_3) \Big|_{s=s_*} = 0. \quad (2.21d)$$

Dies sind vier Gleichungen für die vier Parameter R, \vec{m} bei gegebener Bahn (d.h. $\vec{z}(s_*)$, $\vec{e}_\alpha(s_*)$, $\kappa(s_*)$, $\tau(s_*)$ sind gegeben). Setzt man

$$\vec{m} - \vec{z}(s_*) =: \vec{\rho}(s_*) = \sum_{\alpha=1}^3 \rho^\alpha(s_*) \vec{e}_\alpha(s_*), \quad (2.22)$$

ist also ρ der Vektor, der vom Bahnpunkt $\vec{z}(s_*)$ zum Mittelpunkt der zugehörigen Schmiegekugel zeigt und sind (ρ^1, ρ^2, ρ^3) seine drei Komponenten bezüglich des lokalen begleitenden Dreibeins (also nicht die Komponenten bezüglich der kanonischen Basis des \mathbb{R}^3), dann führen die Gleichungen (2.21) auf

$$\|\vec{\rho}(s_*)\|^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (\rho^\alpha(s_*))^2 = R^2, \quad (2.23a)$$

$$\rho^1(s_*) = 0, \quad (2.23b)$$

$$\rho^2(s_*) = 1/\kappa(s_*), \quad (2.23c)$$

$$\rho^3(s_*) \kappa(s_*) \tau(s_*) = -\dot{\kappa}(s_*)/\kappa(s_*). \quad (2.23d)$$

Daraus ergibt sich folgender

Satz 18. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $s_* \in I$ und $\vec{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^3 -Kurve mit $\kappa(s_*) \neq 0$. (Es existiert also das begleitende Dreibein in einer Umgebung von s_* .) Wir betrachten die einparametrische Schar (Scharparameter λ) von Kugeloberflächen $K(\vec{m}(\lambda), R(\lambda))$ mit $\vec{m}(\lambda) = \vec{z}(s_*) + \vec{e}_2(s_*)/\kappa(s_*) + \lambda \vec{e}_3(s_*)$ und $R(\lambda) = \sqrt{(1/\kappa(s_*))^2 + \lambda^2}$. Jede dieser Kugeln enthält den Kreis in der Krümmungsebene mit Mittelpunkt $\vec{z}(s_*) + \vec{e}_2(s_*)/\kappa(s_*)$ und Radius $1/\kappa(s_*)$, d.h. den Krümmungskreis (Definition 15). Ist $\tau(s_*) = 0$ so sind entweder alle oder keine diese Berührungen sogar von dritter Ordnung, je nachdem ob $\dot{\kappa}(s_*) = 0$ oder $\dot{\kappa}(s_*) \neq 0$. Ist hingegen $\tau(s_*) \neq 0$ so berührt genau eine Kugel der Schar die Kurve \vec{z} am Punkte $\vec{z}(s_*)$ auch in dritter Ordnung, nämlich die mit

$$\lambda = \lambda_* := \frac{-\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa^2(s_*)} = \rho^3(s_*). \quad (2.24)$$

□

Definition 19. Die Voraussetzungen seien wie in Satz 18 und $\tau(s_*) \neq 0$; dann heißt die Kugeloberfläche mit Mittelpunkt

$$\vec{m}(s_*) = \vec{z}(s_*) + \frac{1}{\kappa(s_*)} \vec{e}_2(s_*) - \frac{\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa^2(s_*)} \vec{e}_3(s_*) \quad (2.25a)$$

und Radius

$$R^S(s_*) = \frac{1}{\kappa(s_*)} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa(s_*)} \right)^2} \quad (2.25b)$$

die *Schmiegekugel* zur Kurve \vec{z} am Punkt $\vec{z}(s_*)$ und $R(s_*)$ der *Schmiegradius*. Die Ebene

$$SE(s_*) := \vec{z}(s_*) + \text{Span} \left\{ \vec{e}_1(s_*), \vec{e}_2(s_*) - \frac{\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa(s_*)} \vec{e}_3(s_*) \right\}, \quad (2.26)$$

die also durch $\vec{n}(s_*)$ und $\vec{z}(s_*)$ verläuft und tangential zu der $\vec{e}_1(s_*)$ ist, heißt *Schmiegebene* zur Kurve \vec{z} am Punkt $\vec{z}(s_*)$. Der Schnitt der Schmiegekugel mit der Schmiegebene ist ein Großkreis auf der Schmiegekugel, der die Kurve \vec{z} am Punkt $\vec{z}(s_*)$ in dritter Ordnung berührt. Dieser heißt *Schmiekreis*. Er hat als Großkreis natürlich den gleichen Mittelpunkt und Radius wie die Schmiegekugel. \square

Bemerkung 20. Krümmungs- und Schmiegebene sind im Allgemeinen verschieden und stimmen am Punkt $\vec{z}(s_*)$ genau dann überein, wenn dort die Kurve von lokal konstanter Krümmung ist, d.h. wenn $\dot{\kappa}(s_*) = 0$. Genau in diesem Fall sind auch Krümmungs- und Schmiekreis identisch und es stimmen Krümmungs- und Schmiegradius überein. Im allgemeinen Fall entsteht die Schmiegebene aus der Krümmungsebene wenn man letztere um die in ihr liegende orientierte Achse $\vec{z}(s_*) + \text{Span}\{\vec{e}_1(s_*)\}$ mit dem Winkel

$$\alpha = -\arctan \left(\frac{\dot{\kappa}(s_*)}{\tau(s_*)\kappa(s_*)} \right) \quad (2.27)$$

dreht. Interessanterweise ist die Schmiegebene im Falle $\dot{\kappa} > 0$ entgegengesetzt zur Torsionsrichtung verdreht. Sind Krümmungs- und Schmiegebene verschieden, also $\dot{\kappa}(s_*) \neq 0$, dann ist der Schmiegradius gemäß (2.25b) echt größer als der Krümmungsradius und der Krümmungskreis liegt zwar auf der Schmiegekugel, ist aber kein Großkreis. \square

2.6 Allgemeine Parametrisierung

Zum Schluss wollen wir noch Ausdrücke für die Krümmung und Torsion für den Fall angeben, dass die Kurve \vec{z} in allgemeiner Parametrisierung $\mathbb{R} \subseteq \lambda \mapsto \vec{z}(\lambda)$ gegeben ist, also λ nicht mit der Bogenlänge übereinstimmen muss. Dann gilt ja $ds = \|\vec{z}'(\lambda)\| d\lambda$, wobei ein Strich die Ableitung nach λ bedeutet, so dass

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\|\vec{z}'\|} \frac{d}{d\lambda}, \quad (2.28a)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{\|\vec{z}'\|^2} \left(\frac{d^2}{d\lambda^2} - \frac{\vec{z}' \cdot \vec{z}''}{\|\vec{z}'\|^2} \frac{d}{d\lambda} \right). \quad (2.28b)$$

Also ist

$$\ddot{\vec{z}} = \frac{1}{\|\vec{z}'\|^2} \left(\vec{z}'' - \frac{\vec{z}'(\vec{z}' \cdot \vec{z}'')}{\|\vec{z}'\|^2} \right) = \frac{P_{\perp}(\vec{z}'')}{\|\vec{z}'\|^2} = -\frac{\vec{z}' \times (\vec{z}' \times \vec{z}'')}{\|\vec{z}'\|^4}, \quad (2.29)$$

wobei P_{\perp} die (λ -abhängigen) orthogonale Projektion auf die Ebene senkrecht zu \vec{z}' bezeichnet. Da die Vektoren \vec{z}' und $\vec{z}' \times \vec{z}''$ orthogonal sind ist $[\vec{z}' \times (\vec{z}' \times \vec{z}'')]^2 = \|\vec{z}'\|^2 \|\vec{z}' \times \vec{z}''\|^2$. Somit folgt sofort

$$\kappa(\lambda) = \frac{\|\vec{z}'(\lambda) \times \vec{z}''(\lambda)\|}{\|\vec{z}'(\lambda)\|^3}. \quad (2.30)$$

Ist die Kurve eben, so dass o.B.d.A. $\vec{z}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), 0)$, so ist $\vec{z}' \times \vec{z}'' = (0, 0, (x'y'' - y'x''))$, also

$$\kappa(\lambda) = \frac{|x'(\lambda)y''(\lambda) - y'(\lambda)x''(\lambda)|}{[x'^2(\lambda) + y'^2(\lambda)]^{3/2}}. \quad (2.31a)$$

Ist darüberhinaus der Parameter λ so gewählt, dass $x(\lambda) = \lambda$, die Kurve also als Graph $y(x)$ in der xz -Ebene gegeben ist, so ist $x'(\lambda) \equiv 1$ und $x''(\lambda) \equiv 0$, so dass

$$\kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}}. \quad (2.31b)$$

Dies ist eine aus der Analysis der Funktionen einer Veränderlichen bekannte Formel für die Krümmung des Graphen, die sich hier als Spezialfall ergibt.

Um auch eine allgemeine Formel für die Torsion zu erhalten, gehen wir aus von Ausdruck (2.17b) aus. In diesem ersetzen wir $\dot{\vec{z}}$ und $\ddot{\vec{z}}$ gemäß (2.28) und es folgt sofort

$$\dot{\vec{z}} \times \ddot{\vec{z}} = \frac{\vec{z}' \times \vec{z}''}{\|\vec{z}'\|^3} \quad (2.32a)$$

Weiter ist

$$\ddot{\vec{z}} = \frac{\vec{z}'''}{\|\vec{z}'\|^3} + \text{Terme} \propto \vec{z}' \text{ und } \propto \vec{z}'' , \quad (2.32b)$$

so dass

$$(\dot{\vec{z}} \times \ddot{\vec{z}}) \cdot \ddot{\vec{z}} = \frac{(\vec{z}' \times \vec{z}'') \cdot \vec{z}'''}{\|\vec{z}'\|^6}. \quad (2.32c)$$

Außerdem ist, wie bereits in (2.30) gezeigt, $\|\ddot{\vec{z}}\|^2 = \|\vec{z}' \times \vec{z}''\|^2 / \|\vec{z}'\|^6$. Damit können wir (2.17b) umschreiben in

$$\tau(\lambda) = \frac{(\vec{z}'(\lambda) \times \vec{z}''(\lambda)) \cdot \vec{z}'''(\lambda)}{\|\vec{z}'(\lambda) \times \vec{z}''(\lambda)\|^2}. \quad (2.33)$$

Kapitel 3

Flächen im Anschauungsraum

3.1 Flächen als Abbildungen

Definition 21. Eine *Fläche* (im Anschauungsraum) ist eine mindestens dreimal stetig differenzierbare Abbildung

$$\vec{z}: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x^1, x^2) \mapsto \vec{z}(x^1, x^2), \quad (3.1)$$

wobei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene zusammenhängende Teilmenge ist, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass $U = \mathbb{R}^2$. Wir setzen weiter voraus, dass der Rang der Jacobi-Matrix der Abbildung (3.1) überall maximal (also gleich Zwei) ist. Wie zuvor im Falle von Kurven schließen wir störenden Komplikationen durch die weitergehende technische Annahme aus, dass die Abbildung \vec{z} eine *Einbettung* ist, also injektiv und ein Homöomorphismus von U auf $\text{Bild}(U, \vec{z})$. \square

Bemerkung 22. Die Forderung nach dem Höchstrang der Abbildung (3.1) ist ganz analog zur Forderung bei Kurven, dass die Ableitung der Funktion (2.1) nirgends verschwinden möge, also auch Höchstrang (nämlich Eins) hat. Hier ist es gleichbedeutend damit, dass die zwei Tangentenvektoren

$$\vec{z}_1 := \left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial x^1} \right|_{x^2}, \quad (3.2a)$$

$$\vec{z}_2 := \left. \frac{\partial \vec{z}}{\partial x^2} \right|_{x^1}, \quad (3.2b)$$

an die Kurven konstanter Koordinaten x^2 bzw. x^1 (angedeutet durch die bei der partiellen Ableitung konstant zu haltende Variable) an jedem Punkt der Fläche linear

unabhängig sind. Dies ist seinerseits gleichbedeutend damit, dass $\vec{z}_1 \times \vec{z}_2$ nirgends verschwindet, so dass überall auf der Fläche das Feld der Normalenvektoren

$$\begin{aligned} \vec{n} : U &\rightarrow S^2 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}, \\ (x^1, x^2) &\mapsto \vec{n}(x^1, x^2) := \frac{\vec{z}_1(x^1, x^2) \times \vec{z}_2(x^1, x^2)}{\|\vec{z}_1(x^1, x^2) \times \vec{z}_2(x^1, x^2)\|}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

definiert ist. □

Definition 23. Die Abbildung (3.3) nennt man *Gauß-Abbildung*.

Bemerkung 24. Wie Kurven müssen wir auch bei Flächen zwischen der Abbildung $\vec{z} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und dem Bild, $\text{Bild}(U, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ unterscheiden. Ist $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^3$ eine Bijektion, die samt ihrer Umkehrabbildung dreimal stetig differenzierbar ist, dann sind \vec{z} und $\vec{z}' := \vec{z} \circ \phi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ verschiedene Abbildungen mit gleichem Bild, also nach unserer Definition (Flächen als Abbildungen) auch verschiedene Flächen. Wieder nennt man dann \vec{z}' eine *Umparametrisierung* von \vec{z} , die auch so sein kann, dass $U' = U$ aber $\phi \neq \text{id}_U$. Allerdings werden wie schon bei Kurven die zu treffenden geometrischen Aussagen über Flächen nur von $\text{Bild}(U, \vec{z})$, nicht aber von der Parametrisierung abhängen. Bevorzugte, durch die Geometrie der Fläche definierte Parametrisierungen existieren auch bei Flächen, jedoch weniger eindeutig und in der Charakterisierung komplexer als bei Kurven, wo im wesentlichen nur die zur Bogenlänge proportionalen Parameter ausgezeichnet waren. □

3.2 Das begleitende Dreibein

Definition 25. Eine Abbildung (3.1) definiert durch (3.2) und (3.3) an jedem ihrer Bildpunkte $\vec{z}(x^1, x^2)$ ein orientierte Basis $\{\vec{z}_1(x^1, x^2), \vec{z}_2(x^1, x^2), \vec{n}(x^1, x^2)\}$ des \mathbb{R}^3 , die wir das die Abbildung \vec{z} *begleitende Dreibein* nennen. Dieses ist im Unterschied zu Kurven nicht geometrisch festgelegt (da dort der Parameter der Bogenlänge geometrisch ausgezeichnet war) sondern immer nur relativ zur einer (geometrisch nicht bestimmten) Parametrisierung (x^1, x^2) definiert. Davon ausgenommen ist das Normalenfeld \vec{n} (das modulo Orientierung durch $\text{Bild}(U, \vec{z})$ bestimmt ist) und die Orthogonalität zwischen \vec{n} und $\vec{z}_{1,2}$. Es gilt also immer

$$\|\vec{n}(x^1, x^2)\| = 1, \quad \vec{n}(x^1, x^2) \cdot \vec{z}_1(x^1, x^2) = 0, \quad \vec{n}(x^1, x^2) \cdot \vec{z}_2(x^1, x^2) = 0, \quad (3.4)$$

während die drei unabhängigen Skalarprodukte der Vektoren $\vec{z}_1(x^1, x^2)$ und $\vec{z}_2(x^1, x^2)$ untereinander von der Parametrisierung abhängen. Ist \vec{z} von der Klasse

\mathbb{C}^3 , so sind \vec{z}_1, \vec{z}_2 und \vec{n} von der Klasse C^2 , da in ihre Definition nur erste Ableitungen von \vec{z} eingehen (im Gegensatz zum Fall der Kurve, wo \vec{e}_2 und \vec{e}_3 in (2.7b) bzw. (2.7c) bereits zweite Ableitungen enthalten, das begleitende Dreibein also nur von der Klasse C^1 ist). \square

Definition 26. Der durch die tangential an die Fläche $\text{Bild}(\mathbb{U}, \vec{z})$ am Punkt $\vec{z}(x^1, x^2)$ von $\vec{z}_1(x^1, x^2)$ und $\vec{z}_2(x^1, x^2)$ aufgespannte Untervektorraum von \mathbb{R}^3 heißt *Tangentialraum* der Fläche am Punkt $\vec{z}(x^1, x^2)$. Er ist das orthogonale Komplement zu $\vec{n}(x^1, x^2)$ in \mathbb{R}^3 und somit von der Parametrisierung unabhängig, also durch $\text{Bild}(\mathbb{U}, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ bestimmt. Wir nennen ihn $T_{\vec{z}(x)}(\text{Bild}(\mathbb{U}, \vec{z}))$ \square

Eine Kurve $\vec{z}(\lambda)$ auf der Fläche wird dargestellt durch ihre Parameterform $\lambda \mapsto (x^1(\lambda), x^2(\lambda))$, so dass

$$\vec{z}(\lambda) := \vec{z}(x^1(\lambda), x^2(\lambda)). \quad (3.5)$$

Ihr Tangentenvektor am Punkt $\vec{z}(\lambda)$ ist

$$\vec{z}'(\lambda) = \vec{z}_a(x(\lambda)) x'^a(\lambda) \quad (3.6)$$

Dabei haben wir zur Vereinfachung der Notation folgende Schreibweisen eingeführt: Das Argument $x(\lambda)$ oder einfach nur x steht für das 2-Tupel $(x^1(\lambda), x^2(\lambda))$ bzw. (x^1, x^2) . Ausserdem lassen wir an Ausdrücken wie $\sum_{a=1}^3 \vec{z}_a v^a$ das Summenzeichen fallen und vereinbaren, dass über doppelt auftretende Indizes in unterschiedlicher Stellung (einer oben und einer unten) zu summieren ist (Einstein'sche Summenkonvention).

Definition 27. In den Tangentialräumen wird durch die Einbettung im euklidischen \mathbb{R}^3 ein positiv definites Skalarprodukt definiert, das am Punkt $\vec{z}(x)$ der Fläche auf den Basisvektoren $\vec{z}_a(x)$ gegeben ist durch

$$\vec{z}_a(x) \cdot \vec{z}_b(x) := g_{ab}(x) \quad (3.7)$$

Mann nennt diese punktweise Zuweisung positiv-definiten Skalarprodukte, eines zu jedem Tangentialraum der Fläche, die *erste Fundamentalform* der Fläche oder auch einfach ihre *Metrik*. \square

Bemerkung 28. Da die Tangentialräume von der Parametrisierung unabhängig sind, gilt dies auch für die Metrik. Lediglich die die Metrik repräsentierenden Koeffizienten g_{ab} ändern sich unter Reparametrisierung. Ist $\phi : \mathbb{U} \rightarrow \bar{\mathbb{U}}$ eine Reparametrisierung und $\vec{\bar{z}} := \vec{z} \circ \phi^{-1} : \bar{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die reparametrisierte Fläche mit gleichem Bild, dann ist $\vec{\bar{z}}(\bar{x}) = \vec{z}(x)$ mit $\bar{x} = \phi(x)$ und

$$\vec{\bar{z}}_a(\bar{x}) = \vec{z}_b(x) \bar{J}_a^b(\bar{x}). \quad (3.8)$$

Dabei haben wir folgende kompakte Notation eingeführt, die uns in späteren Rechnungen noch sehr nützlich sein wird: Ableitungen nach \bar{x}^a werden durch einen angehängten, überstrichenen Index \bar{a} bezeichnet. Die Komponenten $\partial\bar{x}^a/\partial x^b$ der Jacobi-Matrix zur Abbildung $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}, x \mapsto \bar{x} := \phi(x)$ werden durch $\bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{a}}(x)$ bezeichnet und die Komponenten $\partial x^a/\partial\bar{x}^b$ der Jacobi-Matrix zur inversen Abbildung $\phi^{-1} : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}, \bar{x} \mapsto x := \phi^{-1}(\bar{x})$ mit $\bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{a}}$. Es gilt dann

$$\bar{J}_{\bar{c}}^{\bar{a}}(x) \bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{c}}(\bar{x}) = \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}} \quad \text{und} \quad \bar{J}_{\bar{c}}^{\bar{a}}(\bar{x}) J_{\bar{b}}^{\bar{c}}(x) = \delta_{\bar{b}}^{\bar{a}}. \quad (3.9)$$

Derselbe Tangentialvektor am Punkt $\vec{z}(x) = \vec{z}(\bar{x})$ hat also die parametrisierungsabhängigen Basisentwicklungen $v = \bar{z}_a(x)v^a = \bar{z}_{\bar{a}}(\bar{x})\bar{v}^{\bar{a}}$ mit

$$\bar{v}^{\bar{a}} = J_{\bar{b}}^{\bar{a}}(x)v^b. \quad (3.10)$$

Die Koeffizienten der Metrik bezüglich beider Basen stehen dann in folgender Relation:

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = \bar{z}_{\bar{a}}(\bar{x}) \cdot \bar{z}_{\bar{b}}(\bar{x}) = g_{cd}(x) \bar{J}_{\bar{a}}^{\bar{c}}(\bar{x}) \bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{d}}(\bar{x}). \quad (3.11)$$

Insbesondere gilt also mit (3.10) und entsprechend $\bar{w}^{\bar{b}} = J_{\bar{c}}^{\bar{b}}(x)w^c$, dass $g_{ab}(x)v^a w^b = \bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x})\bar{v}^{\bar{a}}\bar{w}^{\bar{b}}$, was eben in Komponenten die Tatsache ausdrückt, dass die Metrik selbst von der Parametrisierung unabhängig ist. \square

Die Länge der Kurve (3.5) ist nun analog zu (2.3) gegeben durch

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \sqrt{g_{ab}(x)x'^a(\lambda')x'^b(\lambda')}. \quad (3.12)$$

Der Flächeninhalt der durch $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ parametrisierten Fläche, also von $\text{Bild}(\mathcal{U}, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$, ist

$$\begin{aligned} A(\text{Bild}(\mathcal{U}, \vec{z})) &= \int_{\mathcal{U}} \|\vec{z}_1(x) \times \vec{z}_2(x)\| dx^1 dx^2 \\ &= \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det\{g_{ab}(x)\}} dx^1 dx^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

denn es ist $\|\vec{z}_1(x) \times \vec{z}_2(x)\|^2 = (\vec{z}_1)^2(\vec{z}_2)^2 - (\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2)^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = \det\{g_{ab}\}$.

Sowohl die Kurvenlänge als auch der Flächeninhalt sind von der Parametrisierung unabhängig. Wir zeigen das formal anhand des Flächeninhalts. Zu zeigen ist, dass

$A(\text{Bild}(U, \vec{z})) = A(\text{Bild}(\bar{U}, \vec{\bar{z}}))$. Aber das ist einfach, denn

$$\begin{aligned} A(\text{Bild}(\bar{U}, \vec{\bar{z}})) &= \int_{\bar{U}} \sqrt{\det\{\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x})\}} \, d\bar{x}^1 \, d\bar{x}^2 \\ &= \int_{\bar{U}} \sqrt{\det\{g_{ab}(x)\}} \det\{\bar{J}_{\bar{a}}^c(\bar{x})\} \, d\bar{x}^1 \, d\bar{x}^2 \\ &= \int_U \sqrt{\det\{g_{ab}(x)\}} \, dx^1 \, dx^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dabei haben wir für das zweite Gleichheitszeichen (3.11) benutzt und für das dritte einfach die Regel für die Variablensubstitution des Lebesgue Integrals.

3.3 Die Gleichungen der zweiten Ableitung

Die „zweiten Ableitungen“ von denen hier im Titel die Rede ist, beziehen sich auf die Einbettungsfunktionen (3.1). An jedem Punkt $\vec{z}(x)$ der Fläche $\text{Bild}(U, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ hatten wir ein aus den ersten Ableitungen ein Dreibein (Basis des \mathbb{R}^3) definiert, bestehend aus den zwei linear unabhängigen (aber i.a. weder orthogonalen noch normierten) Tangentialvektoren (3.2) und dem zu diesen senkrechten und normierten Normalenvektor (3.3). Die Gleichungen der zweiten Ableitung betreffen nun die ersten Ableitungen dieses Dreibein-Feldes. Sie sind das flächentheoretische Pendant zu den Frenet-Seret-Gleichungen der Kurventheorie, die wir in Abschnitt 2.3 diskutiert haben.

Wir schreiben

$$\vec{z}_{ab} := \frac{\partial \vec{z}}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial \vec{z}}{\partial x^b \partial x^a} = \vec{z}_{ba} \quad (3.15a)$$

und

$$\vec{n}_a := \frac{\partial \vec{n}}{\partial x^a}. \quad (3.15b)$$

Beachte, dass \vec{n} gemäß (3.3) aus den ersten Ableitungen \vec{z}_a zusammengesetzt ist, so dass die rechte Seite von (3.15b) ebenfalls die zweiten Ableitungen \vec{z}_{ab} enthält. Da wir die Einbettungsfunktion \vec{z} als sogar dreimal stetig-differenzierbar vorausgesetzt haben (aus Gründen, die bald offensichtlich werden), gilt die bereits in (3.15a) hingeschriebene Symmetrie unter Vertauschen der Indizes a und b .

Da das Dreibein $\{\vec{z}_1(x), \vec{z}_2(x), \vec{n}(x)\}$ an jedem Punkt $\vec{z}(x)$ eine Basis bildet, gibt es Koeffizientenfunktionen $x \mapsto K_{ab}(x)$ und $x \mapsto \Gamma_{ab}^c(x)$, so dass (wir unterdrücken nun das Argument x , von dem jede der hier hingeschriebenen Größen

abhängt)

$$\vec{z}_{ab} = K_{ab} \vec{n} + \Gamma_{ab}^c \vec{z}_c, \quad (3.16a)$$

$$\vec{n}_b = L_b^c \vec{z}_c. \quad (3.16b)$$

Dabei haben wir gleich berücksichtigt, dass die Ableitung des normierten Feldes \vec{n}_a normal zu \vec{n} steht, also auf der rechten Seite von (3.16b) keine Terme parallel zu \vec{n} stehen. Aus der Symmetrie $\vec{z}_{ab} = \vec{z}_{ba}$ folgt sofort die Symmetrie der Koeffizienten:

$$K_{ab} = K_{ba} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ba}^c. \quad (3.17)$$

Die Gleichungen (3.15) sind nun die besagten *Gleichungen der zweiten Ableitungen*. Wie bei den Kurven die Funktionen der Krümmung und Torsion die Geometrie der Kurve charakterisieren, sind bei den Flächen die Koeffizientenfunktionen K_{ab} , L_b^a und Γ_{ab}^c charakteristisch für die Geometrie der Fläche. Dabei sind vom Informationsgehalt her K_{ab} und L_b^a identisch, wie wir nun zuerst diskutieren wollen. Danach wenden wir uns den Γ_{ab}^c zu.

Bemerkung 29. Die Koeffizienten K_{ab} und L_b^c sind eng miteinander verknüpft. Um das zu sehen nimmt man das Skalarprodukt von (3.16b) mit \vec{z}_a . Es folgt

$$\vec{z}_a \cdot \vec{n}_b = g_{ac} L_b^c. \quad (3.18)$$

Die linke Seite ist aber nach der Produktregel gleich $-\vec{z}_{ab} \cdot \vec{n}$, da $\vec{z}_a \cdot \vec{n}$ ja identisch verschwindet. Nach (3.16a) ist dies aber gleich $-K_{ab}$. Also gilt

$$K_{ab} = -g_{ac} L_b^a, \quad (3.19a)$$

oder äquivalent

$$L_b^a = -g^{ac} K_{cb}, \quad (3.19b)$$

wobei g^{ab} die Komponenten der zu $\{g_{ab}\}$ inversen Matrix sind; d.h.

$$g^{ac} g_{cb} = \delta_b^a, \quad (3.20)$$

die natürlich selbst wieder symmetrisch ist: $g^{ab} = g^{ba}$. □

Man beachte die unterschiedliche mathematische Bedeutung der durch die Koeffizienten K_{ab} und L_b^a definierten Objekte K und L : K ist eine auf den Tangentialräumen an die Fläche definierte symmetrische Bilinearform (so wie die Metrik). Für $\vec{v} = v^a \vec{z}_a$ und $\vec{w} = w^b \vec{z}_b$ ist

$$K(\vec{v}, \vec{w}) = K(v^a \vec{z}_a, w^b \vec{z}_b) = K_{ab} v^a w^b, \quad (3.21)$$

wobei $K_{ab} = K(\vec{z}_a, \vec{z}_b)$. Hingegen ist L ein auf den Tangentialräumen definierter Endomorphismus (lineare Selbstabbildung)

$$L(\vec{v}) = L(v^b \vec{z}_b) = L_b^a v^b \vec{z}_a, \quad (3.22)$$

wobei also $L(\vec{z}_b) = L_b^a \vec{z}_a$.

Nun ist in einem Vektorraum mit Metrik g (allgemein: nicht ausgearteter symmetrischer Bilinearform) jedem Endomorphismus L eindeutig eine Bilinearform B zugeordnet, nämlich durch

$$B(\vec{v}, \vec{w}) := g(\vec{v}, L\vec{w}). \quad (3.23)$$

In Komponenten bezüglich einer Basis \vec{z}_a hat man dann $B_{ab} := B(\vec{z}_a, \vec{z}_b) = g(\vec{z}_a, L_b^c \vec{z}_c) = g_{ac} L_b^c$, was mit $K_{ab} = -B_{ab}$ genau (3.19a) entspricht. Außerdem ist B symmetrisch genau dann, wenn L bezüglich g symmetrisch (selbstadjungiert) ist, d.h. gilt $g(\vec{v}, L\vec{w}) = g(\vec{w}, L\vec{v})$ für alle \vec{v} und \vec{w} des Vektorraums.

Definition 30. Das Feld L der punktweisen Endomorphismen der Tangentialräume nennt man die *Weingarten Abbildung* der Fläche, manchmal auch den *Form-Operator* (aus Gründen die wir noch kennenlernen werden). Das Feld K der punktweisen symmetrischen Bilinearformen auf den Tangentialräumen nennt man die *zweite Fundamentalform* oder gleichbedeutend die *extrinsische Krümmung* der Fläche. Die extrinsische Krümmung ist das Negative der zur Weingarten-Abbildung durch die Metrik assoziierten Bilinearform. Die Weingarten Abbildung ist bezüglich der Metrik symmetrisch (selbstadjungiert). \square

Satz 31. Die Koeffizientenfunktionen Γ_{ab}^c sind durch die Komponentenfunktionen g_{nm} der Metrik bestimmt wie folgt ($g_{ab,c} := \partial g_{ab} / \partial x^c$ etc.):

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cn} (-g_{ab,n} + g_{na,b} + g_{bn,a}). \quad (3.24)$$

Beweis. Multiplikation von (3.16a) mit \vec{z}_n ergibt

$$\begin{aligned} g_{nc} \Gamma_{ab}^c &= \vec{z}_n \cdot \vec{z}_{ab} \\ &= \underbrace{\partial(\vec{z}_n \cdot \vec{z}_a) / \partial x^b}_{=g_{na,b}} - \vec{z}_{nb} \cdot \vec{z}_a. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ersetzt man darin auf der rechten Seite \vec{z}_{nb} gemäß (3.16a), wobei wegen des Skalarprodukts mit \vec{z}_a nur der Γ -Term beiträgt, so folgt aufgelöst nach $g_{na,b}$:

$$g_{na,b} = g_{nc} \Gamma_{ab}^c + g_{ac} \Gamma_{nb}^c \quad (3.26a)$$

Schreibt man diese Gleichung noch zweimal mit zyklisch permutierten Indizes (nab) auf

$$g_{ab,n} = g_{ac}\Gamma_{bn}^c + g_{bc}\Gamma_{an}^c, \quad (3.26b)$$

$$g_{bn,a} = g_{bc}\Gamma_{na}^c + g_{nc}\Gamma_{ba}^c, \quad (3.26c)$$

und subtrahiert die zweite Gleichung (3.26b) von der Summe der ersten (3.26a) und dritten (3.26c), dann heben sich wegen der Symmetrie (3.17) der Γ -Koeffizienten auf den rechten Seiten der erste Term von (3.26b) gegen den zweiten von (3.26a) und der zweite Term von (3.26b) gegen den ersten von (3.26c) weg und die verbleibenden zwei Terme (erste von (3.26a) und zweite (3.26c)) sind gleich. Also hat man

$$-g_{ab,n} + g_{na,b} + g_{bn,a} = 2g_{nc}\Gamma_{ab}^c. \quad (3.27)$$

Multiplikation mit der inversen Metrik g^{dn} (und Summation über n) unter Ausnutzen von $g^{dn}g_{nc} = \delta_c^d$ liefert

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2}g^{dn}(-g_{ab,n} + g_{na,b} + g_{bn,a}), \quad (3.28)$$

was genau (3.24) entspricht, wenn wir den oberen Index d wieder in c umbenennen. \square

Bemerkung 32. Man beachte, dass der vorstehende Beweis die Inversion der Relation (3.26a) zeigt, gemäß der die Koeffizientenfunktionen $g_{ab,c}$ linear durch die Koeffizientenfunktionen Γ_{ab}^c ausgedrückt werden. Die Anzahl der unabhängigen Komponenten ist in beiden Fällen 6, da sowohl $g_{ab,c}$ als auch Γ_{ab}^c im Indexpaar (a, b) symmetrisch ist. Man kann also die 6 Komponenten Γ_{ab}^c lediglich als eine eine andere, linear unabhängige Kombination der ersten Ableitungen $g_{ab,c}$ betrachten. \square

3.4 Krümmung; intrinsische und extrinsische Größen

Ist eine Fläche als Einbettung (3.1) spezifiziert, so liegt damit die Weingarten-Abbildung L fest. Für jeden Punkt $\vec{z}(x)$ der Fläche $\text{Bild}(U, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ existiert demnach eine lineare Selbstabbildung $L(x)$ des Tangentialraumes auf sich (die Tangentialräume wurden in Definition 26 charakterisiert). Die geometrische Interpretation dieser Abbildung ergibt sich sofort aus (3.16b). Dazu betrachten wir wie zuvor eine mindestens einmal stetig differenzierbare Kurve $x(\lambda)$ im Parametergebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ und die dadurch definierte Kurve $\vec{z}(\lambda) := \vec{z}(x(\lambda))$ auf der Fläche. An jedem Ort der Kurve $\vec{z}(\lambda)$ betrachten wir die Normale $\vec{n}(\lambda) := \vec{n}(x(\lambda))$. Die Änderungsrate

der Normale am Punkt $\vec{z}(\lambda)$ ist ein Vektor im Tangentialraum zur Fläche, denn die Änderungsrate der Normalen muss senkrecht auf ihr stehen (da \vec{n} konstante Länge hat). Diese Änderungsrate ist gerade

$$\frac{d\vec{n}(\lambda)}{d\lambda} = \left. \frac{\partial \vec{n}(x)}{\partial x^b} \right|_{x=x(\lambda)} x'^b(\lambda). \quad (3.29)$$

Ersetzt man darin $\partial \vec{n} / \partial x^b =: \vec{n}_b$ durch die rechte Seite von (3.16b), so folgt mit $d\vec{n}(\lambda)/d\lambda =: \vec{n}'(\lambda)$:

$$\vec{n}'(\lambda) = L_b^a(x(\lambda)) x'^b(\lambda) = L(\vec{z}'(\lambda)). \quad (3.30)$$

Die Weingarten-Abbildung L am Punkt $\vec{z}(\lambda)$ der Fläche bildet also die Tangentialgeschwindigkeit $\vec{z}'(\lambda)$ in die Änderungsrate $\vec{n}'(\lambda)$ des Normalenfeldes ab. Es ist anschaulich klar, dass diese Änderungsrate der Normalen bei Fortschreiten in Richtung $\vec{z}'(\lambda)$ umso größer ist, je stärker sich die Fläche „im umgebenden Anschauungsraum im Richtung $\vec{z}'(\lambda)$ krümmt“, soll heissen, je schneller der Normalenvektor beim Fortschreiten in Richtung $\vec{z}'(\lambda)$ kippt.

Bemerkung 33. Geometrisch ist die Weingarten-Abbildung also wie folgt zu verstehen: Sei $\vec{z}(s)$ ein nach der Bogenlänge s parametrisierter Weg auf der Fläche und $\dot{\vec{z}}(s)$ der zugehörige normierte Geschwindigkeits-Tangentialvektor am Punkte $\vec{z}(s)$. Dann gibt der Tangentialvektor $L(\dot{\vec{z}}(s))$ am Punkte $\vec{z}(s)$ der Fläche die in Bogenmaß pro Weglänge gemessene gerichtete Geschwindigkeit an, mit der der Normalenvektor $\vec{n}(s)$ beim Fortschreiten in Richtung $\dot{\vec{z}}(s)$ kippt.

Da die Weingarten-Abbildung L bezüglich der Metrik g symmetrisch (selbstadjungiert) ist, gibt es am jedem Punkt der Fläche eine Orthogonalbasis die L diagonalisiert. Es gibt also an jedem Punkt der Fläche zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen mit der Eigenschaft, dass beim Fortschreiten in diesen Richtungen der Normalenvektor parallel oder antiparallel zu dieser Richtung kippt. Sind die Eigenwerte von L gleich, L also ein Vielfaches der Identität, so gilt letzteres für alle Richtungen.

Definition 34. Die Eigenräume der Weingarten-Abbildung im Tangentialraum der Fläche an einem Punkt bezeichnet man als die (nicht orientierten) *Hauptkrümmungsrichtungen* an diesem Punkt, die Eigenwerte als *Hauptkrümmungen* und die Inversen der Hauptkrümmungen als die *Hauptkrümmungsradien*. Sind an einem Punkt die Eigenwerte der Weingartenabbildung gleich, also alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen, so bezeichnet man diesen Punkt als *Nabelpunkt* oder *umbilischen Punkt* (engl. umbilic point). Ist jeder Punkt einer Fläche ein Nabelpunkt, so heißt die Fläche *Nabelfläche* oder *total umbilisch* (engl. totally umbilic). \square

Satz 35. *Eine Nabelfläche ist entweder ein Stück einer Kugel oder einer Ebene; letzteres genau dann, wenn die Weingarten Abbildung an jedem Punkt die Nullabbildung ist (die zweite Fundamentalform = extrinsische Krümmung also identisch verschwindet).*

Beweis. Der Beweis ist relativ einfach wenn man wie wir dreimalige stetige Differenzierbarkeit voraussetzt. Eine Verallgemeinerung auf nur zweimalige stetige Differenzierbarkeit findet man z.B. in [3]. Im Falle der Nabelfläche ist die Weingarten-Abbildung an jedem Punkt der Fläche proportional zur Identität, wobei der Proportionalitätsfaktor (die Hauptkrümmung) von Punkt zu Punkt variieren kann. Es gibt also eine Funktion $\kappa : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\kappa(x)$ die Hauptkrümmung am Flächenpunkt $\vec{z}(x)$ angibt. Aus (3.16b) wird dann

$$\vec{n}_b = \kappa \vec{z}_b . \quad (3.31)$$

Nochmalige Differentiation liefert

$$\vec{n}_{ba} = \kappa \vec{z}_{ba} + \kappa_a \vec{z}_b , \quad (3.32)$$

wobei $\kappa_a := \partial \kappa / \partial x^a$. Subtrahiert man von dieser Gleichung die Gleichung, die man erhält, wenn man a und b vertauscht und benutzt $\vec{z}_{ab} = \vec{z}_{ba}$ und $\vec{n}_{ab} = \vec{n}_{ba}$ (letzteres benutzt die dreimalige stetige Differenzierbarkeit der Einbettungsfunktion), dann folgt $\kappa_a \vec{z}_b - \kappa_b \vec{z}_a = 0$, was äquivalent ist zu

$$\kappa_1 \vec{z}_2 - \kappa_2 \vec{z}_1 = 0 . \quad (3.33)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von \vec{z}_1 und \vec{z}_2 an jedem Punkt folgt $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, also die Konstanz von κ . Also gilt (3.31) mit konstantem κ , was sofort integriert werden kann zu

$$\vec{n} = \kappa \vec{z} + \vec{c} , \quad (3.34)$$

wobei $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ konstant ist. Ist $\kappa = 0$ so ist $\vec{n} = \vec{c}$, die Fläche also Stück einer Ebene senkrecht zu \vec{c} . Ist $\kappa \neq 0$ dann

$$\vec{z} = -\vec{c}/\kappa + \vec{n}/\kappa , \quad (3.35)$$

was die Gleichung des Stücks einer Kugel mit Mittelpunkt $-\vec{c}/\kappa$ und Radius $1/|\kappa|$ ist. \square

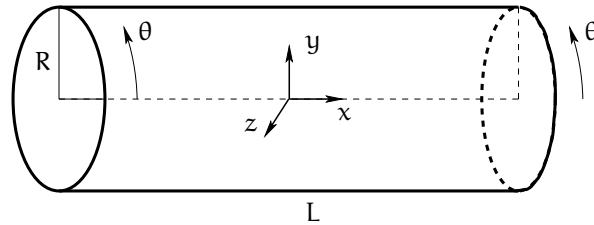


Abbildung 3.1: Zylindermantel der Länge L und vom Radius R eingebettet im \mathbb{R}^3 . Die Parametrisierung ist durch die x -Koordinate und den Meridianwinkel θ , der die Drehung um die *negativ*-orientierte x -Achse angibt. Diese Orientierung wurde deshalb gewählt, damit $\vec{z}_1 \times \vec{z}_2$ und damit die Normale \vec{n} nach außen zeigt.

Beispiele

Zur Veranschaulichung der Weingarten-Abbildung betrachten wir zwei Beispiele, das des Zylindermantels und des Torus.

Wenden wir uns zuerst dem Zylindermantel zu. Dieser habe die Länge L und den Radius R , wobei die Zylinderachse auf der x -Achse des \mathbb{R}^3 liegt. Der Mittelpunkt der Zylinderachse soll im Ursprung liegen, so dass sich der Zylindermantel von $x = -L/2$ bis $x = L/2$ erstreckt. Wir parametrisieren den Zylindermantel durch $(x^1, x^2) = (x, \theta)$, wobei $x^1 = x$ einfach die x -Koordinate ist und θ der Winkel auf den Meridiankreisen in den Schnittkreisen des Zylindermantels mit den Ebenen $x = \text{konst.}$. Dann gilt

$$\vec{z}(x, \theta) = \begin{pmatrix} x \\ R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Dann ist das begleitende Dreibein gegeben durch (die Argumente (x, θ) sind wieder unterdrückt)

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos \theta \\ -R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Dabei ergibt sich \vec{n} einfach durch ausrechnen von $\vec{z}_1 \times \vec{z}_2$ und normieren mit $\|\vec{z}_1 \times \vec{z}_2\| = R$.

Als Zwischenergebnis notieren wir die gemäß (3.7) berechneten Komponenten der ersten Fundamentalform (Metrik) $g_{ab} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b$:

$$\{g_{ab}(x, \theta)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Sie sind also konstant (von x und θ unabhängig).

Für die Ableitungen des Normalenvektorfeldes folgt aus (3.37) weiter

$$\vec{n}_1 = \vec{0}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = R^{-1} \vec{z}_2. \quad (3.39)$$

Damit sind die Komponenten der Weingarten-Abbildung bezüglich der Basis $\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ sofort bestimmt:

$$\{L_b^a(x, \theta)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Auch diese sind konstant (von x und θ unabhängig). Die Interpretation dieser Eigenwerte gemäß Bemerkung 33 ist offensichtlich: Während der Normalenvektor beim Fortschreiten parallel zur Zylinderachse immer parallel zu sich bleibt, also nicht kippt, und somit die Richtung parallel zur Zylinderachse dem Eigenwert Null entspricht, kippt der Normalenvektor beim Fortschreiten um die Weglänge $R \Delta\theta$ in die dazu senkrechte Meridianrichtung um den Winkel $\Delta\theta$ parallel zur Fortschreitungsrichtung. Diese Richtung ist also Eigenrichtung mit Eigenwert $\Delta\theta / (R \Delta\theta) = 1/R$.

Als zweites und interessanteres Beispiel betrachten wir die Torusfläche, deren Krümmung örtlich variiert. Diese sei wie in Abbildung angegeben durch den Meridianwinkel p und den Azimuth t parametrisiert und zwar so, dass $x^1 = t$ einen Kreis vom Radius R in der xy -Ebene parametrisiert – der Mittelkreis (oder „Seele“) des Torus – und dann, für jeden Punkt t dieses Mittelkreises, $x^2 = p$ einen weiteren Kreis senkrecht zum Mittelkreis mit Radius r . Damit diese letzteren Kreise alle schnittfremd sind muss $r < R$ sein. Sie bilden dann einen geschlossenen Schlauch vom Innenradius r um den Mittelkreis. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{z}(t, p) &= R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r \cos p \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + r \sin p \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} (R + r \cos p) \cos t \\ (R + r \cos p) \sin t \\ r \sin p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

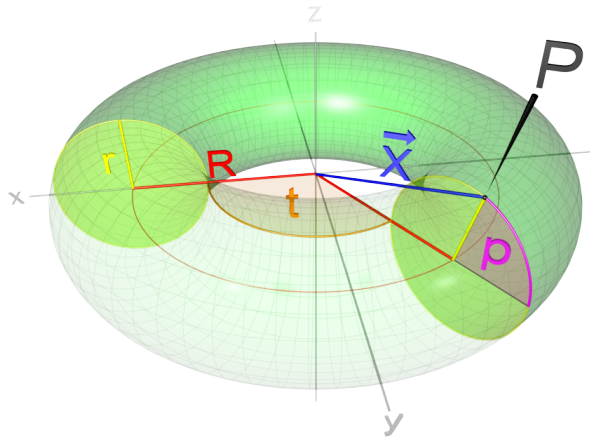


Abbildung 3.2: Eingebette Torusfläche mit Mittelkreis vom Radius R und Schlauchradius $r < R$, die durch die Winkel $x^1 = t$ bzw. $x^2 = p$ im Intervall $[0, 2\pi]$ parametrisiert werden. Der Ortsvektor der in dieser Zeichnung mit \vec{x} bezeichnet ist entspricht $\vec{z}(x^1, x^2)$ in der unserer Bezeichnungsweise.

Einfaches Ausrechnen ergibt die Komponenten des begleitenden Dreieins:

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} -(R + r \cos p) \sin t \\ (R + r \cos p) \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42a)$$

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} -r \sin p \cos t \\ -r \sin p \sin t \\ r \cos p \end{pmatrix} \quad (3.42b)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos p \cos t \\ \cos p \sin t \\ \sin p \end{pmatrix}. \quad (3.42c)$$

Als Zwischenergebnis notieren wir wieder die Komponenten der ersten Fundamentform $g_{ab} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b$:

$$\{g_{ab}\} = \begin{pmatrix} (R + r \cos p)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Diese hängen nunmehr von $x^2 = p$ (aber nicht von $x^1 = t$) ab und sind somit entlang der Meridiane nicht konstant.

Für die Ableitungen des Normalenvektorfeldes folgt aus (3.42c) weiter

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\cos p \sin t \\ \cos p \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos p}{R + r \cos p} \vec{z}_1, \quad (3.44a)$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\sin p \cos t \\ -\sin p \sin t \\ \cos p \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \vec{z}_2. \quad (3.44b)$$

Damit sind die Komponenten der Weingarten-Abbildung bezüglich der Basis $\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ wieder sofort bestimmt:

$$\{L_b^a\} = \begin{pmatrix} \frac{\cos p}{R+r \cos p} & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Der zweite Eigenwert $1/r$ hat wieder eine unmittelbare Bedeutung als konstante Krümmung der Meridiankreise. Interessanter ist der erste, vom $\chi^2 = p$ abhängige Eigenwert. Er ist positiv in den Intervallen $[0, \pi/2)$ und $(3\pi/2, 2\pi]$, negativ für $p \in (\pi/2, 3\pi/2)$ und verschwindet für $p = \pi/2$ und $\pi = 3\pi/2$. Auch das macht man sich leicht anhand der Interpretation in Bemerkung 33 und der Abbildung 3.2 klar: Läuft man entlang von Breitenkreisen ($p = \text{konst.}$) entlang des Torus, so kippt der Normalenvektor in Forschungsrichtung in den äußeren Bereichen, wo $\cos p > 0$, und entgegen der Forschungsrichtung in den inneren Bereichen, wo $\cos p < 0$. Auf dem Kreisen $p = \pi/2$ und $\pi = 3\pi/2$ direkt oberhalb bzw. unterhalb des Mittelkreises bleibt der Normalenvektor immer senkrecht zur Mittelebene und daher parallel zu sich.

Gauß'sche Krümmung

Es ist klar, dass auf der Zylinderfläche lokal (mit „lokal“ meint man stets: Um jeden Punkt gibt es eine Umgebung, so dass ...) die Gesetze der Euklidischen Geometrie gelten, denn diese ist auf die Ebene abwickelbar. Umgekehrt kann man einen Zylinder aus einem Blatt Papier durch Aufrollen formen, also indem man das Papier zwar *im Raum* krümmt, ohne es jedoch intrinsisch zu verzerren. Man sagt, der Zylinder ist zur Ebene lokal isometrisch.

Ein lokaler Begriff von „Krümmung“ soll nun gerade die Nicht-Abwickelbarkeit signalisieren, also die Abweichung von der lokalen Isometrie zur ungekrümmten (flachen) Ebene. Ein solches Maß erhält man aus der Weingarten Abbildung durch Determinantenbildung. Diese verschwindet nur dann nicht, wenn *beide* Eigenwerte

von Null verschieden sind. Außerdem ist die Determinante eine sinnvolle geometrische Größe, da sie nur von der Abbildung L selbst und nicht von ihrer Komponentendarstellung $\{L_b^a\}$ abhängt. Letzteres trifft zwar auch für die Spur zu, doch ist diese eben im allgemeinen auch dann ungleich Null, wenn die Fläche lokal isometrisch zur Ebene ist, wie im Fall des Zylinders. Weitere unabhängige geometrische Invarianten der Weingarten-Abbildung existieren nicht (in zwei Dimensionen sind alle Invarianten einer Linearen Abbildung aus der Spur und der Determinante bildbar).

Definition 36. Die Gauß'sche Krümmung einer Fläche $\text{Bild}(U, \vec{z}) \subset \mathbb{R}^3$ am Punkt $p = \vec{z}(x)$ ist definiert durch

$$\mathcal{K}(p) := \det(L(p)) = \det\{L_b^a(x)\} = \frac{\det\{K_{ab}(x)\}}{\det\{g_{ab}(x)\}}. \quad (3.46)$$

Letzteres wegen (3.19a). Man bachte, dass im Gegensatz zu einem Endomorphismus die Determinante einer Bilinearform keinen geometrisch invarianten Sinn ergibt, der Quotient der Determinanten zweier Bilinearformen aber sehr wohl. \square

Um die geometrische Bedeutung dieser Krümmungsdefinition weiter zu untermauern betrachten wir in gewohnter Weise nach der Eigenlänge parametrisierte Kurven $s \mapsto \vec{z}(s) = \vec{z}(x(s))$ auf der Fläche. Also

$$\dot{\vec{z}}(s) = \vec{z}_a \dot{x}^a, \quad (3.47a)$$

$$\ddot{\vec{z}}(s) = \vec{z}_a \ddot{x}^a + \vec{z}_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b. \quad (3.47b)$$

Wir zerlegen $\ddot{\vec{z}}$ in seine Komponenten normal und tangential zur Fläche. Da $\ddot{\vec{z}} \cdot \dot{\vec{z}} = 0$ muss auch die tangentiale Komponente von $\ddot{\vec{z}}$ senkrecht zu $\dot{\vec{z}}$ und damit parallel zu $\vec{n} \times \dot{\vec{z}}$ sein. Also ist

$$\ddot{\vec{z}} = \kappa_n \vec{n} + \kappa_g (\vec{n} \times \dot{\vec{z}}), \quad (3.48a)$$

wobei κ_n und κ_g reellwertige Funktionen des Kurvenparameters sind. Da der Kurvenparameter geometrisch durch das Bild der Kurvenabbildung in der Fläche definiert ist (Bogenlänge), sind κ_n und κ_g auch als Funktionen auf dem Bild der Kurve in der Fläche definiert. Als solche betrachten wir sie im Folgenden und nennen sie

$$\kappa_n = \text{Normalkrümmung}, \quad (3.48b)$$

$$\kappa_g = \text{geodätische Krümmung}. \quad (3.48c)$$

Gemäß (2.17a) ist die Krümmung der Kurve gegeben durch $\kappa = \|\ddot{\vec{z}}\|$, also gilt

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2. \quad (3.49)$$

Man beachte aber, dass κ per Definition eine nicht negative Funktion ist, während κ_n und κ_g beide Vorzeichen annehmen können. Die geometrische Bedeutung der Vorzeichen geht dabei aus (3.48a) hervor: Blickt man antiparallel zur Normalen \vec{n} auf die Fläche (also so, dass \vec{n} auf den Betrachter zeigt), dann ist κ_n positiv/negativ, wenn die Beschleunigung des bewegten Punktes zum/vom Beobachter hin/weg gerichtet ist. Entsprechend ist κ_g positiv/negativ, wenn die Kurve nach links/rechts abbiegt.

Die Zerlegung (3.48a) können wir konkretisieren, indem wir das $\ddot{\vec{z}}$ der linken Seite gemäß (3.47b) schreiben und dort das \vec{z}_{ab} durch (3.16a) ersetzen. Das ergibt

$$\ddot{\vec{z}} = \vec{z}_c (\ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b) + \vec{n} K_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b. \quad (3.50)$$

Der Vergleich mit (3.48a) liefert dann

$$\kappa_n = K_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b, \quad (3.51a)$$

$$(\vec{n} \times \dot{\vec{z}}) \kappa_g = \vec{z}_c (\ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b). \quad (3.51b)$$

Definition 37. Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf einer Fläche heißt *Geodätische*, falls ihre geodätische Krümmung verschwindet. \square

Proposition 38. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

$$\vec{z}(s) = \dot{x}^a(s) \dot{\vec{z}}(s) \quad \text{ist Geodätische,} \quad (3.52a)$$

$$\ddot{x}^c(s) + \Gamma_{bc}^c(x(s)) \dot{x}^a(s) \dot{x}^b(s) = 0, \quad (3.52b)$$

$$\vec{n}(s) \cdot (\dot{\vec{z}}(s) \times \ddot{\vec{z}}(s)) = 0. \quad (3.52c)$$

Beweis. Geodätische zu sein ist definitionsgemäß äquivalent zu $\ddot{\vec{z}} \parallel \vec{n}$ (wir lassen die Argumente (s) wieder weg), was nach (3.50) äquivalent zu (3.52b) ist. Da $\ddot{\vec{z}} \perp \dot{\vec{z}}$, ist $\ddot{\vec{z}} \parallel \vec{n}$ aber auch äquivalent zu $\ddot{\vec{z}} \cdot (\vec{n} \times \dot{\vec{z}}) = 0$, was äquivalent zu (3.52c) ist. \square

Dazu machen wir eine Reihe von Bemerkungen.

Bemerkung 39. Da $\dot{\vec{z}}(s)$ und $\ddot{\vec{z}}(s)$ die Krümmungsebene am Punkt $\vec{z}(s)$ aufspannen (vgl. Definition 13), also $\dot{\vec{z}}(s) \times \ddot{\vec{z}}(s)$ senkrecht auf dieser Ebene steht, können wir sagen, dass eine nach der Eigenlänge parametrisierte Kurve genau dann Geodätische der Fläche ist in der sie verläuft, wenn an jedem Punkt ihre Krümmungsebene die Flächennormale enthält, die Krümmungsebene in diesem Sinne also die Fläche senkrecht schneidet. \square

Bemerkung 40. Die in Bemerkung 39 und Gleichung (3.52c) gegebene Charakterisierung der Geodätischen macht von Begriffen und Strukturen Gebrauch, die explizit mit der Einbettung der Fläche zusammenhängen. Hingegen zeigt Gleichung (3.52b), dass auch eine rein intrinsische Charakterisierung möglich ist, denn die Koeffizienten Γ_{ab}^c hängen gemäß Gleichung (3.24) nur von den g_{ab} ab, die ihrerseits aus Längenmessungen innerhalb der Fläche bestimmbar sind, wie z.B. Gleichung (3.12) zeigt. \square

Bemerkung 41. Für nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven gilt für $\vec{z}(x(s))$

$$1 = \dot{\vec{z}} \cdot \dot{\vec{z}} = \vec{z}_a \cdot \vec{z}_b \dot{x}^a \dot{x}^b = g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b. \quad (3.53)$$

Damit besteht die Freiheit in der Wahl der $\dot{\vec{z}}$ nur in der Richtung (der Betrag ist fest). Die Geodätengleichung (3.52b) bestimmt eine Lösung daher eindeutig, falls Anfangspunkt und Anfangsrichtung vorgegeben werden. \square

Bemerkung 42. Unter allen Kurven, die mit gleicher Tangente durch einen Punkt $p = \vec{z}(s)$ der Fläche gehen, besitzt die Geodätische gemäß Definition 38 und (3.49) die kleinste Krümmung $\kappa(s) = \|\ddot{\vec{z}}(s)\|$. Diese ist rein extrinsisch (hat keinen κ_g -Anteil) und für sie gilt (an jedem Punkt, wobei wir das Argument s wieder weglassen)

$$\kappa = |\kappa_n| \quad (3.54a)$$

wobei

$$\kappa_n = K_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = K(\dot{\vec{z}}, \dot{\vec{z}}) = -g(\dot{\vec{z}}, L\dot{\vec{z}}). \quad (3.54b)$$

Dabei haben wir (3.19a) benutzt. Die Eigenschaft der Geodätischen, an jedem ihrer Punkte die kleinstmögliche Krümmung zu besitzen, kann man auch so ausdrücken: Jede Geodätische ist, zu gegebenem Anfangspunkt und gegebener Anfangsrichtung, die *gerademögliche* Kurve auf der Fläche. Wir werden weiter unten eine andere Eigenschaft der Geodätischen kennenlernen, die diese Anschauung unterstützt. \square

Bemerkung 43. Betrachtet man für einen festen Punkt $p = \vec{z}(s)$ der Fläche alle möglichen Geodätischen entsprechend allen Tangentenrichtungen, so gibt es unter diesen zwei sich in p senkrecht schneidende, wobei die eine die größte, die andere die kleinste Normalkrümmung besitzt. Diese unorientierten Richtungen entsprechen nach (3.54b) gerade den (1-dimensionalen) Eigenräumen der Weingarten-Abbildung $L(p)$. Die extremalen Normalkrümmungen sind gerade das Negative der beiden Hauptkrümmungen gemäß Definition 34, bzw. gleich den Diagonalelementen von $K_{ab}(p)$ in einer diagonalisierenden Orthonormalbasis (bezgl. der Metrik $g_{ab}(p)$). Sind die Eigenwerte von $L(p)$ gleich, also p ein Nabelpunkt, dann

sind die Normalkrümmungen natürlich in allen Richtungen gleich. Dass die Normalkrümmungen gleich sind den *nagtiven* Hauptkrümmungen liegt an dem Umstand, dass die Hauptkrümmung positives Vorzeichen hat falls der Normalenvektor in Fortschrittrichtung kippt, dass dann aber der Beschleunigungsvektor der Kurve (der senkrecht auf der Kurve steht) *anti*-parallel zur Normalenrichtung zeigt. Dieser Vorzeichenunterschied ist also natürlich und nicht Folge einer unpassenden Definition. \square

Nochmals Gauß'sche Krümmung: Alternative Definition

Eine alternative Definition der Gauß'schen Krümmung – genauer: Ihres Betrages – ergibt sich wie folgt: Wir betrachten das Normalenfeld (3.3) selbst als Einbettung, deren Bild im \mathbb{R}^3 ein Stück einer 2-dimensionalen Sphäre vom Radius 1 ist. Von diesem Bild berechnen wir die Oberfläche gemäß (3.13) und erhalten

$$A(\text{Bild}(\mathbf{U}, \vec{n})) = \int_{\mathbf{U}} \|\vec{n}_1(x) \times \vec{n}_2(x)\| dx^1 dx^2 \quad (3.55)$$

Benutzen wir nun (3.16b) um die Ableitungen von \vec{n} durch die Ableitungen von \vec{z} auszudrücken, so erhalten wir

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = L_1^a L_2^b \vec{z}_a \times \vec{z}_b = (L_1^1 L_2^2 - L_1^2 L_2^1) \vec{z}_1 \times \vec{z}_2 = \det(L) \vec{z}_1 \times \vec{z}_2. \quad (3.56)$$

Also ist das Verhältnis der Oberflächen, die vom Bild der Normalenabbildung $\vec{n} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und vom Bild der Einbettung $\vec{z} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ überstrichen wird, gegeben durch

$$\frac{A(\text{Bild}(\mathbf{U}, \vec{n}))}{A(\text{Bild}(\mathbf{U}, \vec{z}))} = \frac{\int_{\mathbf{U}} |\det(L(x))| \|\vec{z}_1(x) \times \vec{z}_2(x)\| dx^1 dx^2}{\int_{\mathbf{U}} \|\vec{z}_1(x) \times \vec{z}_2(x)\| dx^1 dx^2}. \quad (3.57)$$

Nimmt man als Gebiet $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe $K_\epsilon(x)$ vom Radius ϵ um den Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^2$, und lässt dann den Radius ϵ gegen Null gehen, dann ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{A(\text{Bild}(K_\epsilon(x), \vec{n}))}{A(\text{Bild}(K_\epsilon(x), \vec{z}))} \right\} = |\det(L(x))| = |\mathcal{K}(p)|, \quad (3.58)$$

wenn $p = \vec{z}(x)$. Der Betrag der Gauß'schen Krümmung entspricht also dem lokalen Verhältnis der Oberflächenmaße auf der Gauß-Kugel (Bild von \vec{n}) und der Fläche (Bild von \vec{z}) in Limes unendlich kleiner (d.h. gegen ein Punkt konvergierender) Flächenstücke.

3.5 Parallelverschiebung und kovariante Ableitung

Definition 44. Sei $\vec{z}(\lambda) := \vec{z}(x(\lambda))$ eine mindestens einmal stetig differenzierbare Kurve auf der Fläche $\text{Bild}(\mathbb{U}, \vec{z})$. Der Parameter $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$ ist nicht weiter spezifiziert, muss also auch nicht affin äquivalent zur Bogenlänge sein. Ein tangentiales Vektorfeld entlang dieser Kurve ist eine Abbildung $\vec{v} : I \mapsto \mathbb{R}^3$, die jedem Parameterwert λ einen Tangentialvektor am Punkte $\vec{z}(x(\lambda))$ zuordnet; das heißt $\vec{v}(\lambda) \in T_{\vec{z}(x(\lambda))}(\text{Bild}(\mathbb{U}, \vec{z}))$; vgl. dazu Definition (26). Wir nehmen an, dass die Funktion $\lambda \mapsto \vec{v}(\lambda)$ ebenfalls mindestens einmal stetig differenzierbar ist. Das Vektorfeld $\vec{v}(\lambda)$ heißt nun entlang der Kurve $\vec{z}(\lambda)$ *parallel verschoben* genau dann, wenn

$$\left[\frac{d\vec{v}(\lambda)}{d\lambda} \right]^\parallel = 0. \quad (3.59)$$

Dabei bezeichnet ein hochgestelltes \parallel die Projektion parallel zur Fläche, hier also die Projektion in $T_{\vec{z}(x(\lambda))}(\text{Bild}(\mathbb{U}, \vec{z})) \subset \mathbb{R}^3$. Statt (3.59) hätten wir natürlich auch sagen können, dass $d\vec{v}(\lambda)/d\lambda \propto \vec{n}(x(\lambda))$. \square

Proposition 45. Das Tangential-Vektorfeld $\vec{v}(\lambda) = v^a(\lambda)\vec{z}_a(\lambda)$ ist genau dann parallel verschoben, wenn die Koeffizientenfunktionen $v^a(\lambda)$ folgendem System linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen:

$$\frac{dv^c(\lambda)}{d\lambda} + \Gamma_{ab}^c(x(\lambda)) \frac{dx^a(\lambda)}{d\lambda} v^b(\lambda) = 0. \quad (3.60)$$

Beweis. Indem wir die Argumente λ und $x(\lambda)$ unterdrücken, schreiben wir

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{d\lambda} &= \frac{dv^a}{d\lambda} \vec{z}_a + v^a \vec{z}_{ab} \frac{dx^b}{d\lambda} \\ &= \vec{z}_c \left(\frac{dv^c}{d\lambda} + \Gamma_{ab}^c v^a \frac{dx^b}{d\lambda} \right) + \vec{n} K_{ab} v^a \frac{dx^b}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

wobei wir beim Übergang in die zweite Zeile (3.16a) benutzt haben. Also ist

$$\left[\frac{d\vec{v}}{d\lambda} \right]^\parallel = \vec{z}_c \left(\frac{dv^c}{d\lambda} + \Gamma_{ab}^c v^a \frac{dx^b}{d\lambda} \right) \quad (3.62)$$

Das ist wegen der Symmetrie $\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{bc}^a$ äquivalent ist zu (3.60). \square

Definition 46. Die tangential projizierte Ableitung $[d\vec{v}/d\lambda]^\parallel$ nennt man auch die *kovariante Ableitung entlang der Kurve* $\vec{z} : \lambda \mapsto \vec{z}(x(\lambda))$ und schreibt dafür $\nabla_{\vec{z}}\vec{v}$, also

$$\nabla_{\vec{z}}\vec{v} := \left[\frac{d\vec{v}}{d\lambda} \right]^\parallel = \vec{z}_c \left(\frac{dv^c}{d\lambda} + \Gamma_{ab}^c \frac{dx^a}{d\lambda} v^b \right). \quad (3.63)$$

Ist $\nabla_{\vec{z}}\vec{v} = 0$ dann heißt \vec{v} entlang der Kurve \vec{z} auch *kovariant konstant*.

Proposition 47. *Seien \vec{v} und \vec{w} zwei entlang der gleichen Kurve \vec{z} parallel verschobene Tangentialvektorfelder, dann ist ihr Skalarprodukt entlang der Kurve konstant.*

Beweis. Wir geben zwei Beweise, einen „extrinsischen“ und einen „intrinsischen“. Wir beginnen mit dem extrinsischen, der fast trivial ist:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{w})}{d\lambda} &= \frac{d\vec{v}}{d\lambda} \cdot \vec{w} + \frac{d\vec{w}}{d\lambda} \cdot \vec{v} \\ &= \left[\frac{d\vec{v}}{d\lambda} \right]^{\parallel} \cdot \vec{w} + \left[\frac{d\vec{w}}{d\lambda} \right]^{\parallel} \cdot \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dabei haben wir benutzt, dass wegen der skalaren Multiplikation mit den Tangentialvektoren \vec{w} und \vec{v} die Differentialquotienten $d\vec{v}/d\lambda$ bzw. $d\vec{w}/d\lambda$ durch ihre Projektionen tangential zur Fläche ersetzt werden dürfen, die nach Voraussetzung aber verschwinden.

Der intrinsische Beweis ist zwar komplizierter aber sehr instruktiv, denn da er nur intrinsische Größen verwendet, kann er (sogar wörtlich!) auf allgemeine (semi-Riemann'sche) Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Zur Abkürzung schreiben wir $\chi'^a := dx^a/d\lambda$, $g_{ab,c} := \partial g_{ab}/\partial x^c$ und lassen die Argumente λ und x fort. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{w})}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} (v^a w^b g_{ab}) \\ &= v'^a w^b g_{ab} + v^a w'^b g_{ab} + v^a w^b g_{ab,c} \chi'^c. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Da $\vec{v}(\lambda)$ und $\vec{w}(\lambda)$ aber jeweils die Gleichung (3.60) erfüllen,

$$v'^a = -\Gamma_{nm}^a \chi'^n v^m, \quad (3.66a)$$

$$w'^b = -\Gamma_{nm}^b \chi'^n w^m, \quad (3.66b)$$

können wir damit in (3.65) die Ableitungen v'^a und w'^b ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{w})}{d\lambda} &= -g_{ab} w^b \Gamma_{nm}^a \chi'^n v^m - g_{ab} v^a \Gamma_{nm}^b \chi'^n w^m + v^a w^b \chi'^c g_{ab,c} \\ &= v^a w^b \chi'^c \left(g_{ab,c} - g_{bn} \Gamma_{ca}^n - g_{an} \Gamma_{cb}^n \right) \\ &= v^a w^b \chi'^c \left(g_{ab,c} - \frac{1}{2} (-g_{ca,b} + g_{bc,a} + g_{ab,c}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (-g_{cb,a} + g_{ac,b} + g_{ba,c}) \right) \\ &= v^a w^b \chi'^c \left(g_{ab,c} - \frac{1}{2} g_{ab,c} - \frac{1}{2} g_{ba,c} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt lediglich benutzt, dass sich wegen der Symmetrie $g_{ab} = g_{ba}$ der $-g_{ca,b}$ gegen den $+g_{ac,b}$ Term und der $+g_{bc,a}$ gegen den $-g_{cb,a}$ Term weghebt. \square

Die kovariante Ableitung wurde in Definition 46 nur für Vektorfelder entlang Kurven definiert. Dazu brauchte man das Vektorfeld \vec{v} nur auf einem offenen Intervall der Kurve zu kennen. Kennt man nun ein Vektorfeld \vec{v} in einer offenen Menge der Fläche und ist es dort mindestens einmal stetig differenzierbar, so kann man Innerhalb dieser Menge die kovariante Ableitung des Vektorfeldes \vec{v} nach jeder Tangentialrichtung definieren.

Definition 48. Sei $\mathbb{R}^2 \supset U \ni x \mapsto \vec{v}(x) \in \mathbb{R}^3$ ein tangentiales Vektorfeld, d.h. $\vec{v}(x) \in T_{\vec{z}(x)}(\text{Bild}(U, \vec{z}))$, und \vec{w} ein fester Tangentialvektor bei $p = \vec{z}(x_*)$. Dann ist die *kovariante Ableitung von \vec{v} nach \vec{w}* am Punkt p definiert durch

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{w}} \vec{v}(\vec{z}(x_*)) &:= \left[w^a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^a} \right]_{x=x_*}^{\parallel} = \left[w^a \frac{\partial (v^c \vec{z}_c)}{\partial x^a} \right]_{x=x_*}^{\parallel} \\ &= \vec{z}_c(x_*) \left(w^a \frac{\partial v^c}{\partial x^a} + \Gamma_{ab}^c w^a v^b \right) \Big|_{x=x_*}. \end{aligned} \quad (3.68a)$$

Das dritte Gleichheitszeichen ergibt sich aus der Definition (erstes Gleichheitszeichen) wieder durch Ersetzen von \vec{z}_{ab} gemäß (3.15a). Wir schreiben auch abkürzend am betreffenden Punkt

$$\nabla_{\vec{w}} \vec{v} =: \vec{z}_c w^a \nabla_a v^c, \quad (3.68b)$$

mit

$$\nabla_a v^c = \frac{\partial v^c}{\partial x^a} + \Gamma_{ab}^c v^b. \quad (3.68c)$$

Man beachte, dass man dazu \vec{w} nur am Punkt p kennen muss, während \vec{v} in einer ganzen offenen Umgebung von p benötigt wird, um die partiellen Ableitungen $\partial v^c / \partial x^a$ zu berechnen. Das Ergebnis ist dann ein Tangentialvektor am Punkt $p = \vec{z}(x_*)$ der Fläche. Natürlich kann man auch die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes \vec{v} nach einem anderen Vektorfeld \vec{w} bilden, indem man \vec{v} nach dem Vektor \vec{w} an allen Punkten bildet und dann das Ergebnis wieder als Vektorfeld auf der ganzen Fläche interpretiert. Dieses ist dann im Schnitt der Differenzierbarkeitsklasse von \vec{w} mit der um eins verminderten Differenzierbarkeitsklasse von \vec{v} . \square

Bemerkung 49. Ist ein Vektorfeld \vec{v} auf der Fläche in einer offenen Umgebung der Kurve $\vec{z}(\lambda) = \vec{z}(x(\lambda))$ gegeben, dann kann man an jedem Punkt $p = \vec{z}(\lambda_*)$ der Kurve das Vektorfeld \vec{v} nach dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{z}'_* := \vec{z}'(x(\lambda_*)) =$

$d\vec{z}/d\lambda|_{\lambda=\lambda_*}$ kovariant ableiten und erhält aus (3.68a) mit $\vec{w} = \vec{z}'_*$, d.h. $w^a = dx^a/d\lambda|_{\lambda=\lambda_*}$

$$\nabla_{\vec{z}'_*} \vec{v} = \vec{z}_c(x(\lambda_*)) \left(\frac{dv^c(\lambda)}{d\lambda} + \Gamma_{ab}^c(x(\lambda)) \frac{dx^a(\lambda)}{d\lambda} v^b(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=\lambda_*}. \quad (3.69)$$

Dabei haben wir $v^c(\lambda) := v^c(x(\lambda))$ und $dv^c/d\lambda := (dx^a/d\lambda)(\partial v^c/\partial x^a)$ gesetzt. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist identisch zur rechten Seite von (3.60), so dass man sagen kann, dass die kovarianten Ableitungen von \vec{v} nach den Geschwindigkeitsvektoren \vec{z}' der Kurve \vec{z} genau dann verschwinden, wenn die Einschränkung des Vektorfeldes \vec{v} auf die Bildpunkte der Kurve \vec{z} ein im Sinne der Definition 44 parallel verschobenes Vektorfeld ist. Wir betonen, dass die umgekehrte Aussage, die oft in der Literatur gemacht wird, streng genommen sinnlos ist: Hat man ein entlang einer Kurve parallel verschobenes Vektorfeld, das aber nur auf dem Bild der Kurve definiert ist, dann kann man seine kovariante Ableitung entlang der Kurve zwar im Sinne der Definition 46 bilden, nicht jedoch seine kovariante Ableitung auf der Fläche an den Punkten der Kurve in Richtung des Geschwindigkeitsvektors im Sinne der Definition 48, denn für letztere braucht man *alle* partiellen Ableitungen $\partial v^c/\partial x^a$, die ja nicht definiert sind. Die beiden Definitionen stimmen aber im folgenden Sinn überein: Ist \vec{v} kovariant konstant entlang einer Kurve \vec{z} im Sinne der Definition 46, dann besitzt *jede* differenzierbare Fortsetzung von \vec{v} auf eine offene Umgebung der Kurve an jedem Kurvenpunkt eine verschwindende kovariante Ableitungen nach dem Geschwindigkeitsvektor.

3.6 Geodätische und Autoparallele Kurven

Vergleicht man die Geodätengleichung (3.52b) mit der Gleichung (3.59) der Parallelverschiebung und setzt in letzterer den un spezifizierten Parameter λ gleich der Bogenlänge s und die Komponenten v^c des Vektorfeldes gleich \dot{x}^c , dann folgt sofort folgende

Proposition 50. *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf der Fläche ist genau dann Geodätische, wenn ihr Geschwindigkeitsvektorfeld entlang ihr selbst parallelverschoben ist. Dies ist äquivalent der Aussage, dass das Geschwindigkeitsvektorfeld entlang der Kurve kovariant konstant ist. Dies passt zur bereits gegebenen Charakterisierung der Geodätischen als „gerademögliche“ Kurve.*

Will man Geodätische durch die Differentialgleichung (3.52b) charakterisieren, so muss man sich auf spezielle Parametrisierungen einschränken, die in einem ein-

fachen Verhältnis zur Bogenlänge stehen (oben hatten wir ja explizit eine Bogenlängen-Parametrisierung gefordert). Um explizit zu sehen, wie sich (3.52b) unter Reparametrisierung verhält, führen wir neben der Bogenlänge s einen allgemeinen Parameter $\lambda = f(s)$ ein, wobei $f'(s) \neq 0$ für alle s gilt, also etwa $f'(s) > 0$. Dann ist (Ableitungen nach s werden wie immer durch einen Punkt bezeichnet)

$$\frac{d}{ds} = \dot{f}(s) \frac{d}{d\lambda} \quad (3.70a)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} = \ddot{f}(s) \frac{d}{d\lambda} + (\dot{f}(s))^2 \frac{d}{d\lambda}. \quad (3.70b)$$

Fasst man nun in der Geodätengleichung die Koordinaten x^a als Funktionen von λ auf und schreibt alle Ableitungen nach s in Ableitungen nach λ um, so erhält man

$$x''^c + \Gamma_{ab}^c x'^a x'^b = -(\ddot{f}/\dot{f}^2) x'^c, \quad (3.71)$$

wobei ein Strich die Ableitung nach λ bezeichnet.

Wären wir umgekehrt von einer Gleichung der Form

$$x''^c + \Gamma_{ab}^c x'^a x'^b = h x'^c \quad (3.72a)$$

ausgegangen, wobei h eine beliebige Funktion von λ ist, und hätten durch eine Funktion $s = \sigma(\lambda)$ einen neuen Parameter s eingeführt, dann wäre nach völlig analoger Rechnung (3.72a) äquivalent zu

$$\ddot{x}^c + \Gamma_{ab}^c \dot{x}^a \dot{x}^b = -\frac{\sigma'' - h\sigma'}{\sigma'^2} \dot{x}^c. \quad (3.72b)$$

Daran sieht man sofort, dass wir die Funktion σ immer so wählen können, dass die rechte Seite verschwindet. Dazu müssen wir nur die einfache Differentialgleichung $\sigma'' - h\sigma' = 0$ lösen, was leicht allgemein möglich ist. Wählt man etwa $\sigma(0) = a$ und $\sigma'(0) = b$, so ist

$$s = \sigma(\lambda) = a + b \int_0^\lambda d\lambda_1 \exp\left(\int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 h(\lambda_2)\right). \quad (3.73)$$

Die Frage nach der Eindeutigkeit eines die rechte Seite von (3.72a) eliminierenden Parameterwechsels beantwortet (3.73) durch Setzen von $h = 0$. Daraus sieht man: Verschwindet die rechte Seite von (3.72a), so sind immer noch affin-lineare Parameterwechsel $s = a + b\lambda$ möglich.

Definition 51. Eine Kurve $\lambda \mapsto \vec{z}(\lambda)$ heißt *Autoparallele* genau dann, wenn die kovariante Ableitung des Vektorfeldes der Geschwindigkeit nach der Kurve (im Sinne der Definition 46) proportional zum Geschwindigkeitsfeld ist:

$$\nabla_{\vec{z}} \dot{\vec{z}} = h \dot{\vec{z}}, \quad (3.74)$$

wobei hier h eine Funktion entlang der Kurve ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Komponentenfunktionen $x^a(\lambda)$ die Differentialgleichung (3.72a) erfüllen.

Proposition 52. *Eine Autoparallele ist genau dann Geodätische, also erfüllt die Differentialgleichung (3.72a) mit $h = 0$, wenn ihre Parametrisierung affin äquivalent zur Bogenlänge ist.*

Beweis. Aus Proposition 38 wissen wir, dass eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische die Gleichung (3.52b), also (3.72a) mit $h = 0$ erfüllt. Umgekehrt ist Gleichung (3.52b) äquivalent der Bedingung, dass das Geschwindigkeitsvektorfeld entlang der Kurve parallel verschoben ist. Aus Proposition 47 folgt dann, dass seine Norm entlang der Kurve konstant ist. Damit ist der Integrand des Längenfunctionals (3.12) entlang der Kurve konstant und somit auch das Verhältnis von ds und $d\lambda$. \square

Bemerkung 53. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass falls eine durch λ parametrisierte Kurve die Differentialgleichung (3.72a) erfüllt, die Funktion h auf der rechten Seite notwendig gleich ist dem Quotienten σ''/σ' , wobei $s = \sigma(\lambda)$ die Funktion ist, die die Bogenlänge (gemessen von einem beliebigen Anfangswert) durch den Parameter λ ausdrückt. Tatsächlich gilt das auch für jeden zur Bogenlänge s affin äquivalenten Parameter $\tilde{s} = as + b$, denn falls $h = \sigma''/\sigma'$ dann klarerweise auch $h = \tilde{\sigma}''/\tilde{\sigma}'$ falls $\tilde{\sigma}(\lambda) := a\sigma(\lambda) + b$ mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$. \square

Naiv würde man erwarten, dass die „geradestmöglichen“ Kurven auch die „kürzesten“ sind. Das ist in der Tat auch der Fall und dient als zweite, unabhängige Definition der Geodätischen und Autoparallelen. Um das einzusehen, betrachten wir einparametrische Scharen von Kurven $\bar{z}(\lambda, t) = \bar{z}(x(\lambda, t))$ im Intervall $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ und für alle Werte $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ des Scharparameters t , so dass für alle t gilt $\bar{z}(\lambda_1, t) = p_1$ und $\bar{z}(\lambda_2, t) = p_2$, das heißt alle Kurven der Schar beginnen bei p_1 und enden bei p_2 , zwei fest gewählten Punkten der Fläche. Die Länge der durch t gekennzeichneten Kurve der Schar ist dann gegeben durch

$$\mathcal{L}(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda L(x(\lambda, t), \dot{x}(\lambda, t)) \quad (3.75a)$$

mit

$$L(x, x') = \sqrt{g_{ab}(x)x'^a x'^b}. \quad (3.75b)$$

Aus der Variationsrechnung wissen wir, dass die Bedingungen

$$\left. \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (3.76)$$

sofern man sie für *alle* einparametrischen Kurvenscharen mit gleicher Kurve $\vec{z}_*(\lambda) = \vec{z}(\lambda, t = 0)$ fordert, äquivalent ist der Euler-Lagrange-Gleichung für $x_*(\lambda)$:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial x'^a} \right|_{\substack{x=x_*(\lambda) \\ x'=x'_*(\lambda)}} \right) - \left. \frac{\partial L}{\partial x^a} \right|_{\substack{x=x_*(\lambda) \\ x'=x'_*(\lambda)}} = 0. \quad (3.77)$$

Setzt man darin für L die Funktion (3.75b) ein, so ergibt sich mit $L' := dL(x_*(\lambda), x'_*(\lambda))/d\lambda$ und kurzer Rechnung analog zu oben (wir lassen den Stern an x_* und x'_* ab jetzt wieder weg)

$$x''^c + \Gamma_{ab}^c x'^b x'^c = x'^c (L'/L) \quad (3.78)$$

was genau der Gleichung (3.74) einer Autoparallelen mit $h = L'/L$ entspricht.

Bemerkung 54. Das Wort „genau“ im vorhergehenden Satz ist gerechtfertigt, denn wie bereits in Bemerkung 53 festgestellt, ist h notwendig von der Form σ''/σ' , wobei $s = \sigma(\lambda)$ die Bogenlänge ist. Nun ist aber $L'_1 = ds/d\lambda = \sigma'$, so dass (3.78) die *allgemeine* Form der Gleichung einer Autoparallelen ist. Die stationären Punkte des Längenfunktional (3.75a) sind also *genau* die Autoparallelen.

Die gleiche Betrachtung können wir nun mit einem Funktional ohne Wurzel Ausdruck im Integranden wiederholen. Statt \mathcal{L} betrachten wir also nun

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda E(x(\lambda, t), \dot{x}(\lambda, t)) \quad (3.79a)$$

mit

$$E(x, x') = g_{ab}(x) x'^a x'^b = L^2(x, x'). \quad (3.79b)$$

Der Definitionsbereich ist wieder die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Kurven, die für die fest gewählten Parameterwerte $\lambda_{1,2}$ durch die fest gewählten Punkte $p_{1,2}$ gehen. Die (3.77) entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen (mit E statt L) enthalten nun keine E' -Terme (die im Falle von L durch die Ableitung der Wurzel hineinkamen), so dass die zur Stationarität des Funktional \mathcal{E} äquivalente Gleichung gegeben ist durch

$$x''^c + \Gamma_{ab}^c x'^b x'^c = 0, \quad (3.80)$$

also der Geodätengleichung.

Bemerkung 55. Man nennt (3.75) das Längenfunktional und (3.79) das Energiefunktional auf der Menge $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2)$ der zweimal stetig differenzierbaren Kurven auf dem Definitionsintervall $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R}$, die für die Endwerte dieses Parameterintervalls durch die fest gewählten Punkte p_1 bzw. p_2 gehen. Für beide Funktionale bilden die Geodätischen stationäre Punkte. Während diese die stationären Punkte des Energiefunktionals erschöpfen, besitzt das Längenfunktional genau noch die Kurven als weitere stationäre Punkte, die aus den Geodätischen durch solche Umparametrisierung hervorgehen, die mit den beiden Bedingungen $\bar{z}(\lambda_{1,2}) = p_{1,2}$ verträglich sind (so dass auch die umparametrisierten Kurven wieder Elemente von $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2)$ sind). Die stationären Punkte des Energiefunktionals sind also genau die Autoparallelen in $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1; L p_2, \lambda_2)$.

Es ist geometrisch klar, dass das allgemeine Längenfunktional (3.75) nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt, wenn man es auf der Menge $\mathcal{K}_2(p_1, p_2)$ der zweimal stetig differenzierbare Kurven durch die fest gewählten Punkte $p_{1,2}$ auffasst. In $\mathcal{K}_2(p_1, p_2)$ sind im Gegensatz zu $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1; L p_2, \lambda_2)$ die Parameterwerte $\lambda_{\alpha,2}$ nicht spezifiziert. Entsprechend sind auch die Integrationsgrenzen $\lambda_{1,2}$ des Funktionals nicht fest vorgegeben, sondern jeweils durch die Kurve bestimmt, eben als die Parameterwerte ihrer Endpunkte. Analytisch folgt dann die Invarianz unter *beliebigen*, zweimal stetig differenzierbaren Reparametrisierungen sofort aus (3.75), wobei man jetzt berücksichtigen muss, dass sich die Integrationsgrenzen unter Reparametrisierungen auch ändern.

Da das Längenfunktional die geometrische Länge als Wert besitzt, ist anschaulich klar, dass es auf $\mathcal{K}_2(p_1, p_2)$ nach unten beschränkt ist, das heisst für $p_1 \neq p_2$ ein Infimum > 0 besitzt. Man kann zeigen, dass es auch immer eine (nicht notwendig eindeutige) Kurve gibt, die dieses Infimum tatsächlich annimmt und dass diese notwendig eine Autoparallele sein muss. Wir bezeichnen so eine längenminimierende Kurve mit einem hochgestellten Stern, also durch $\bar{z}^* : \lambda^* \mapsto \bar{z}^*(\lambda^*)$, wobei der Stern am Parameter nur andeuten soll, dass er zu einer längenminimierenden Kurve gehört. Tatsächlich ist die Eigenschaft, längenminimierend zu sein, ja reparametrisierungsinvariant, wie gerade diskutiert. Es gilt also

$$\mathcal{L}[\bar{z}^*] \leq \mathcal{L}[\bar{z}]. \quad (3.81)$$

Eine analoge Gleichung kann für das Energiefunktional (3.79) über $\mathcal{K}(p_1, p_2)$ nicht gelten, denn es ist von der Parametrisierung abhängig. In der Tat sieht man leicht, dass seine Werte für jedes vorgegebenen Punktepaar $p_1 \neq p_2$ beliebig nahe an Null heranreicht, wenn man das Bild der Kurve nur hinreichend langsam durchläuft. Das ist unmittelbar anschaulich, denn der Integrand des Energiefunktionals ist das

Geschwindigkeitsquadrat, das umgekehrt proportional zur 2. Potenz des Parameters skaliert, während das Integrationsintervall proportional zum Parameter skaliert, so dass eine einfache umgekehrte Proportionalität bleibt. Analytisch gilt entsprechend Folgendes: Sei $\vec{z} : \lambda \mapsto \vec{z}(\lambda)$ eine gegebene Kurve und ersetzt man λ durch $\tilde{\lambda} = \alpha\lambda$, mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, dann gilt für die reparametrisierte Kurve $\tilde{\vec{z}}(\tilde{\lambda}) = \vec{z}(\lambda)$, so dass $\mathcal{E}[\tilde{\vec{z}}] = (1/\alpha) \mathcal{E}[\vec{z}]$. Also $\mathcal{E}[\tilde{\vec{z}}] \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow \infty$.

Eine zu (3.81) analoge Ungleichung kann also bestenfalls dann gelten, wenn man die Parametrisierungen der Kurven einschränkt, so, dass das Bild einer Kurve nicht mehr beliebig langsam durchlaufen werden kann. Es liegt also nahe, die Länge des Parameterintervalls $[\lambda_1, \lambda_2]$ festzuschreiben (etwa auf $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$, was wir aber hier offen lassen) und das Energiefunktional nur auf der Menge der Kurven betrachten, für die dann die gegebenen Flächenpunkte $p_{1,2}$ bei vorgegebenen Parameterwerten $\lambda_{1,2}$ durchlaufen werden. Deswegen ist es natürlich, das Energiefunktional statt auf $\mathcal{K}_\epsilon(p_1, p_2)$ auf der der Untermenge $\mathcal{K}_\epsilon(p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2)$ zu betrachten. Diese Einschränkung war ja auch nötig, damit die Euler-Lagrange Gleichung eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Stationarität des Funktionals darstellen (sonst verschwinden die Randterme bei der Variation nicht). Das war der Grund, warum wir oben gleich $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1, p_2, \lambda_2)$ als Definitionsbereich beider Funktionale angenommen haben.

In der Tat gilt folgende

Proposition 56. *Wir betrachten die Menge $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2)$ der zweimal stetig differenzierbaren Kurven $\vec{z} : \lambda \mapsto \vec{z}(\lambda)$ auf der Fläche, wobei $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ und $\vec{z}(\lambda_{1,2}) = p_{1,2}$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}[\vec{z}] \geq \mathcal{E}[\vec{z}^*], \quad (3.82)$$

wobei \vec{z}^* die Kurve bezeichnet, die das Längenfunktional (3.75) minimiert und affin äquivalent zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die letzte Forderung ist mit $\vec{z}^*(\lambda_{1,2}^*) = p_{1,2}$ verträglich und fixiert die Parametrisierung eindeutig. \vec{z}^* ist dann eine Geodätische. Gleichheit in (3.82) gilt nur dann, wenn \vec{z} ebenfalls proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die längenminimierende Kurve ist also auch energieminimierend unter allen Kurven in $\mathcal{K}_2(p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2)$, sofern sie affin parametrisiert und damit eine Geodätische ist.

Beweis. Wir gehen aus von der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda f(\lambda)g(\lambda) \right]^2 \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda f^2(\lambda) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda g^2(\lambda), \quad (3.83)$$

für reellwertige Funktionen f, g über dem Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$. In der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt Gleichheit genau dann, wenn f und g proportional sind. Wir wen-

den diese Ungleichung an auf den Fall wo $g \equiv 1$ und $f(\lambda) = L(x(\lambda), x'(\lambda))$ (vgl. (3.75b)). Gleichheit in (3.83) gilt in diesem Fall also genau dann, wenn f konstant, also der Parameter λ affin äquivalent zur Bogenlänge ist. Zweifache Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung zusammen mit (3.81) ergibt dann

$$\mathcal{E}[\vec{z}](\lambda_2 - \lambda_1) \geq \mathcal{L}^2[\vec{z}] \geq \mathcal{L}^2[\vec{z}^*] = (\lambda_2^* - \lambda_1^*) \mathcal{E}[\vec{z}^*]. \quad (3.84)$$

Dabei haben wir für die letzte Gleichheit benutzt, dass wir \vec{z}^* affin zur Bogenlänge parametrisieren. Da für die Menge \mathcal{K} der Vergleichskurven alle Anfangs- und Endparameterwerte übereinstimmen ist insbesondere $(\lambda_2^* - \lambda_1^*) = (\lambda_2 - \lambda_1)$ und es folgt die Behauptung aus (3.84) \square

3.7 Parameterabhängigkeit und Tensorfelder

In Bemerkung 28 sind wir bereits auf die Frage der des Verhaltens gewisser Koeffizientenfunktionen unter Reparametrisierung der Fläche eingegangen und dem damit direkt verbundenen Problem des Nachweises der Unabhängigkeit intrinsisch geometrischer Aussagen von der Parametrisierung. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Aspekt vertiefen.

Wie zuvor betrachten wir dazu eine Reparametrisierung

$$\phi : \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.85a)$$

unter der sich die Einbettungsfunktion $\vec{z} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ verändert zu

$$\vec{\bar{z}} := \vec{z} \circ \phi^{-1} : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.85b)$$

die, wie bereits oben betont wurde, das gleich Bild (Fläche im \mathbb{R}^3) wie \vec{z} besitzt. Gleichung (3.85a) ist äquivalent zu

$$\vec{\bar{z}}(\bar{x}) = \vec{z}(x) \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \phi(x). \quad (3.85c)$$

Mit der bereits eingeführten Notation (Ableitungen nach \bar{x}^a werden durch einen angehängten überstrichenen Index \bar{a} bezeichnet) gelten die dortigen Gleichungen (3.8) bis (3.11), auf die wir uns im Folgenden beziehen werden. Insbesondere erinnern wir daran, dass $J_b^{\bar{a}} := \partial \bar{x}^a / \partial x^b$ die Komponenten der Jacobi-Matrix der Abbildung $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}, x \mapsto \bar{x} = \phi(x)$ am Punkt x sind, während $\bar{J}_b^a := \partial x^a / \partial \bar{x}^b$ die Komponenten der Jacobi-Matrix der dazu inversen Abbildung $\phi^{-1} : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}, \bar{x} \mapsto x = \phi^{-1}(\bar{x})$ am Punkt \bar{x} bezeichnet. Die Argumente x und \bar{x} werden dabei zur Verkürzung der Schreibweise unterdrückt. Die Matrizen $J_b^{\bar{a}}$ und \bar{J}_b^a sind dann zueinander invers, wie in Gleichung (3.9) ausgedrückt.

Wir wissen bereits aus Gleichungen (3.10) und (3.11) wie sich die Komponenten eines Tangentialvektorfeldes und der Metrik (1. Fundamentalform) transformieren. Allgemein gilt folgende Sprechweise:

Definition 57. Seien p und q nicht-negative ganze Zahlen; dann heißen die $2^{(p+q)}$ Funktionen $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} : \mathcal{X} \mapsto T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(x)$ die *Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe* $\binom{p}{q}$ (sprich: p -fach kontravariant und q -fach kovariant), wenn sie sich unter Reparametrisierung (3.85a) wie folgt verhalten (der Deutlichkeit halber führen wir hier die Argumente x und $\bar{x} := \phi(x)$ wieder explizit mit):

$$\bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p}(\bar{x}) = \left[J_{\bar{a}_1}^{\bar{a}_1}(x) \cdots J_{\bar{a}_p}^{\bar{a}_p}(x) \right] T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(x) \left[\bar{J}_{\bar{b}_1}^{b_1}(\bar{x}) \cdots \bar{J}_{\bar{b}_q}^{b_q}(\bar{x}) \right]. \quad (3.86)$$

Dabei haben wir der besseren Übersicht halber alle Jacobi-Matrizen, die die oberen Indizes versehen, in eine Klammer links vom Symbol $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ angeordnet und die inversen Jacobi-Matrizen, die die unteren Indizes versehen, in eine Klammer rechts davon. \square

Aus (3.11) lesen wir dann ab, dass die $g_{ab}(x)$ die Komponenten eines zweifach kovarianten Tensors sind. Man rechnet dann sofort nach, dass die Komponenten der inversen Metrik die eines zweifach kontravarianten Tensors sind:

$$\bar{g}^{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = J_{\bar{a}}^{\bar{a}}(x) J_{\bar{b}}^{\bar{b}}(x) g^{ab}(x). \quad (3.87)$$

Wir überlegen uns nun das Transformationsverhalten der Koeffizientenfunktionen K_{ab} , L_b^a und Γ_{ab}^c , die durch (3.16) definiert sind. Aus (3.19b) und (3.87) folgt das Transformationsverhalten der L_b^a aus dem von K_{ab} , so dass wir uns auf die K_{ab} und Γ_{ab}^c , beschränken können, die beide durch (3.16a) definiert sind. Also brauchen wir nichts anderes zu tun, als die Gleichungen (3.16a) in den neuen Koordinaten huzuschreiben:

$$\bar{z}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) = \bar{K}_{\bar{a}\bar{b}}(\bar{x}) \bar{n}(\bar{x}) + \bar{\Gamma}_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}(\bar{x}) \bar{z}_{\bar{c}}(\bar{x}) \quad (3.88)$$

Wie bereits in Bemerkung 28 mitgeteilt, folgt aus (3.85c) durch einmalige Differentiation

$$\bar{z}_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{J}_{\bar{a}}^{\bar{c}}(\bar{x}) z_c(x). \quad (3.89a)$$

Daraus, und aus der Definitionsgleichung (3.3) des Normalenfeldes, folgt

$$\bar{n}(\bar{x}) = \frac{\bar{z}_{\bar{1}}(\bar{x}) \times \bar{z}_{\bar{2}}(\bar{x})}{\|\bar{z}_{\bar{1}}(\bar{x}) \times \bar{z}_{\bar{2}}(\bar{x})\|} = \sigma \bar{n}(x), \quad (3.89b)$$

wobei

$$\sigma := \frac{\det\{\bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{a}}(\bar{x})\}}{|\det\{\bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{a}}(\bar{x})\}|} = \text{sign}(\det\{\bar{J}_{\bar{b}}^{\bar{a}}\}). \quad (3.89c)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass das Vorzeichen der Determinante der inversen Jakobi-Matrix \bar{J}_b^a natürlich gleich dem der Determinante der Jakobi-Matrix J_b^a ist und nicht vom Punkt abhängt (da die Determinante nicht verschwinden kann), so dass $\sigma = \pm 1$ konstant ist.

Mit (3.89a) und (3.89c) schreiben wir die rechte Seite von (3.88) als Linearkombination des Dreibeins $\{\bar{z}_1(x), \bar{z}_2(x), \bar{n}(x)\}$:

$$\text{rechte Seite von (3.88)} = \bar{z}_n(x) \bar{J}_c^n(\bar{x}) \bar{\Gamma}_{ab}^c(\bar{x}) + \bar{n}(x) \sigma \bar{K}_{ab}(\bar{x}). \quad (3.90)$$

Das Gleiche können wir für die linke Seite von (3.88) tun: Nochmalige Differentiation von (3.89a) liefert

$$\bar{z}_{ab}(\bar{x}) = \bar{J}_{ab}^c(\bar{x}) \bar{z}_c(x) + \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}) \bar{z}_{cd}(x), \quad (3.91)$$

wobei wir, wie üblich, die Ableitung der Jacobi-Matrix \bar{J}_a^c nach \bar{x}^b einfach durch Anhängen eines weiteren Index gekennzeichnet haben, d.h. $\partial \bar{J}_a^c / \partial \bar{x}^b =: \bar{J}_{ab}^c$. In (3.91) ersetzen wir $\bar{z}_{cd}(x)$ durch eine Linearkombination des Dreibeins $\{\bar{z}_1(x), \bar{z}_2(x), \bar{n}(x)\}$ gemäß Gleichung (3.16a). Dann folgt

$$\begin{aligned} \text{linke Seite von (3.88)} &= \bar{z}_n(x) \left(\bar{J}_{ab}^n(\bar{x}) + \Gamma_{cd}^n(x) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}) \right) \\ &\quad + \bar{n}(x) K_{ac}(x) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Gleichheit der Koeffizienten von $\bar{n}(x)$ und $\bar{z}_n(x)$ in (3.90) und (3.92) liefert dann

$$\bar{K}_{ab}(\bar{x}) = \sigma K_{cd}(x) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}), \quad (3.93)$$

bzw.

$$\bar{J}_c^n(\bar{x}) \bar{\Gamma}_{ab}^c(\bar{x}) = \Gamma_{cd}^n(x) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}). \quad (3.94)$$

Multipliziert man letztere Gleichung mit $J_n^m(x)$ und beachtet $J_n^m(x) \bar{J}_c^n(\bar{x}) = \delta_c^m$, so sieht man sofort, dass (3.94) äquivalent ist zu

$$\bar{\Gamma}_{ab}^m(\bar{x}) = J_n^m(x) \Gamma_{cd}^n(x) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}) + J_n^m(x) \bar{J}_{ab}^n(\bar{x}) \quad (3.95a)$$

$$= J_n^m(x) \left(\Gamma_{cd}^n(x) - \bar{J}_k^n(\bar{x}) \bar{J}_{cd}^k(x) \right) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}) \quad (3.95b)$$

Dabei haben wir beim Übergang von (3.95a) nach (3.95b) nur den inhomogenen (d.h. den nicht in den Γ -Koeffizienten linearen) Term durch Produkt- und Leibnizregel umgeformt:

$$\begin{aligned} J_n^m(x) \bar{J}_{ab}^n(\bar{x}) &= J_c^m(x) \bar{J}_{ab}^c(\bar{x}) \\ &= \underbrace{[J_c^m(x) \bar{J}_a^c(\bar{x})]}_{=\delta_a^m} \bar{J}_b^d(\bar{x}) - J_{cd}^m(x) \bar{J}_b^d(\bar{x}) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \\ &= - \underbrace{J_n^m(x) \bar{J}_k^n(\bar{x})}_{=\delta_k^m} \bar{J}_{cd}^k(x) \bar{J}_a^c(\bar{x}) \bar{J}_b^d(\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Dabei haben wir im 2. Schritt die Differentiation nach \bar{x}^b vom 2. auf den ersten J-Faktor per Produkt- und Kettenregel übergewälzt und die Konstanz von δ_a^m benutzt.

Bemerkung 58. Durch Vergleich von (3.93) mit 3.86 sehen wir, dass für $\sigma = 1$, also für orientierungserhaltende Transformationen, die Funktionen K_{ab} die Komponenten eines kovarianten Tensors der Stufe 2 im Sinne der Definition 57 bilden. (Diese Definition kann man in mannigfacher Weise erweitern, so dass auch orientierungsumkehrende Transformation mit einem Faktor σ versehen werden – sogenannte „twisted tensors“ –, doch brauchen wir das an dieser Stelle nicht.) Da die g^{ab} Komponenten eines zweifach kontravarianten Tensorfeldes bilden, folgt, dass die Koeffizienten L_b^a der Weingarten-Abbildung die Komponenten eines einfach kontra- und einfach kovarianten Tensorfeldes bilden, wie es bei einem Feld von Endomorphismen der lokalen Tangentialräume (die die Weingarten-Abbildung ja definieren) auch sein muss.

Bemerkung 59. Das Transformationsverhalten der Γ -Symbole hat eine affine Form, also einen zu Γ proportionalen Teil, der die Form hat als wären die Γ_{ab}^c Komponenten eines Tensors der Stufe $\binom{1}{2}$, plus einen von Γ unabhängigen Teil. Also bilden die Γ_{ab}^c kein Tensorfeld. das bedeutet aber *nicht*, dass sie deswegen irgendwie „ungeometrisch“ wären. Vielmehr ist eine *geometrische Struktur* dadurch ausgezeichnet, dass ihre Repräsentanten (die Koeffizientenfunktionen) unter Reparametrisierungen *eindeutig transformieren*, so dass die Struktur durch Angabe eines Repräsentanten vollständig festgelegt ist. Dafür ist das lineare Tensortransformationsgesetz nur ein besonders einfaches aber keineswegs erschöpfendes Beispiel.

Bemerkung 60. Das affine Transformationsgesetz der Γ_{ab}^c hat zur Folge, dass unter einer Reparametrisierung die Koeffizienten $\bar{\Gamma}_{ab}^c(\bar{x})$ für einen fest gewählten Punkt mit Parameterwerten $\bar{x}_* = \phi(x_*)$ immer zum verschwinden gebracht werden können. Dazu betrachte man etwa die Reparametrisierungsabbildung

$$\bar{x}^c = \bar{x}_*^c + (x^c - x_*^c) + \frac{1}{2}\Gamma_{ab}^c(x_*)(x^a - x_*^a)(x^b - x_*^b) \quad (3.97)$$

in einer Umgebung des Betrachteten Punktes. Damit ist

$$\begin{aligned} J_a^c(x_*) &= \delta_a^c \Rightarrow J_{\bar{k}}^n(\bar{x}_*) = \delta_k^n \\ J_{cd}^{\bar{k}}(x_*) &= \Gamma_{cd}^k(x_*). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Eingesetzt in (3.95b) zeigt sofort, dass der Klammerausdruck auf der rechten Seite verschwindet, so dass $\bar{\Gamma}_{ab}^m(\bar{x}_*) = 0$.

3.8 Kovariante Ableitung von Tensorfeldern

Hat man die Komponenten eines Tensorfeldes $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ der Stufe $\binom{p}{q}$, die also unter Reparametrisierungen gemäß (3.86) transformieren, dann sieht man sofort, dass die gewöhnlichen partiellen Ableitungen $\partial_c T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ *nicht* die Komponenten eines neuen Tensorfeldes der Stufe $\binom{p}{q+1}$ bilden. Der formale Grund ist einfach, dass die partiellen Ableitungen auch auf die bei der Transformation anfallenden Jacobi-Matrizen wirkt und somit Terme proportional zu den zweite Ableitungen $J_{bc}^{\bar{a}}(x)$ produziert, und zwar für jede der in (3.86) vorkommende Jacobi-Matrix einen, also $(p + q)$ Stück. Diese werden vermieden, wenn man statt der partiellen eine kovarianten Ableitung wie folgt definiert:

Definition 61. Die *kovariante Ableitung* ∇ macht aus den Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $\binom{p}{q}$ die Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $\binom{p}{q+1}$ und ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \nabla_c T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} &:= \frac{\partial T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}}{\partial x^c} \\ &+ \Gamma_{cd}^{a_1} T_{b_1 \dots b_q}^{da_2 \dots a_p} + \dots + \Gamma_{cd}^{a_p} T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_{p-1}d} \quad (p \text{ Summanden}) \\ &- \Gamma_{cb_1}^d T_{db_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} - \dots - \Gamma_{cb_q}^d T_{b_1 \dots b_{q-1}d}^{a_1 \dots a_p} \quad (q \text{ Summanden}). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Jeder obere Index wird also mit einem Endomorphismus Γ_c transformiert, dessen Komponenten gerade die Γ_{cd}^a sind, jeder untere Index durch dem dazu negativ-transponierten Endomorphismus. Der Spezialfall für Tensorfelder der Stufe $\binom{1}{0}$ (Vektorfelder) ist uns schon in (3.68c) begegnet. \square

Es sind gerade die inhomogenen Glieder im Transformationsverhalten (3.95) der Γ -Symbole, die die oben erwähnten störenden Ableitungen der Jacobi-Matrizen gerade wegheben. Das beweisen wir im Zuge der folgenden Proposition, die die nachträgliche Rechtfertigung für diese Definition der kovarianten Ableitung liefert.

Proposition 62. Sind $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ die Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $\binom{p}{q}$, dann sind $(\nabla T)_{b_0 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} := \nabla_{b_0} T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$ die Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $\binom{p}{q+1}$.

Beweis. Bildet man gemäß (3.99) die kovariante Ableitung der Komponenten

bezüglich der Parameter \bar{x} so hat man

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{c}} \bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p} &:= \frac{\partial \bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p}}{\partial \bar{x}^c} \\ &+ \bar{\Gamma}_{\bar{c}\bar{d}}^{\bar{a}_1} \bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{d}\bar{a}_2 \dots \bar{a}_p} + \dots + \bar{\Gamma}_{\bar{c}\bar{d}}^{\bar{a}_p} \bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{p-1}\bar{d}} \quad (\text{p Summanden}) \\ &- \bar{\Gamma}_{\bar{c}\bar{b}_1}^{\bar{d}} \bar{T}_{\bar{d}\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p} - \dots - \bar{\Gamma}_{\bar{c}\bar{b}_q}^{\bar{d}} \bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_{q-1}\bar{d}}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p} \quad (\text{q Summanden}). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Hier haben wir die Argumente x und \bar{x} nun weggelassen, da klar ist: überstrichene Größen sind bei \bar{x} , nicht überstrichene bei x auszuwerten. Das gilt auch für Jacobi-Matrizen. Ersetzen wir nun $\bar{T}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_q}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_p}$ in der partiellen Ableitung gemäß (3.86) So erhalten wir für jeden oberen Index einen Term der Form

$$(\bar{\partial}_{\bar{c}} \bar{J}_{\bar{n}}^{\bar{a}_i}) T^{\dots n \dots} = \bar{J}_{\bar{c}}^{\bar{c}} \bar{J}_{\bar{n}\bar{c}}^{\bar{a}_i} T^{\dots n \dots} = \bar{J}_{\bar{c}}^{\bar{c}} \bar{J}_{\bar{n}\bar{c}}^{\bar{a}_i} \bar{J}_{\bar{d}}^{\bar{d}} J_{\bar{d}}^{\bar{d}} T^{\dots d \dots} = J_{\bar{d}\bar{c}}^{\bar{a}_i} \bar{J}_{\bar{c}}^{\bar{c}} \bar{J}_{\bar{d}}^{\bar{d}} \bar{T}^{\dots \bar{d} \dots}, \quad (3.101a)$$

wobei wir im letzten Schritt den laufenden Index n wieder in d umbenannt haben, und jeden unteren einen Term der Form

$$(\bar{\partial}_{\bar{c}} \bar{J}_{\bar{b}_i}^{\bar{n}}) T_{\dots n \dots} = \bar{J}_{\bar{b}_i \bar{c}}^{\bar{n}} T_{\dots n \dots} = \bar{J}_{\bar{b}_i \bar{c}}^{\bar{n}} J_{\bar{n}}^{\bar{d}} \bar{J}_{\bar{d}}^{\bar{d}} T_{\dots d \dots} = J_{\bar{d}}^{\bar{d}} \bar{J}_{\bar{b}_i \bar{c}}^{\bar{d}} \bar{T}_{\dots \bar{d} \dots}. \quad (3.101b)$$

Auch hier haben wir im letzten Schritt den laufenden Index n wieder d genannt. Auf der anderen Seite ergeben die inhomogenen Terme der Γ -Transformationen im Falle der oberen Indizes Zusätze der Form

$$\bar{\Gamma}_{\bar{c}\bar{d}}^{\bar{a}_1} \bar{T}^{\dots \bar{d} \dots} \rightarrow -J_{\bar{c}\bar{d}}^{\bar{a}_1} \bar{J}_{\bar{c}}^{\bar{c}} \bar{J}_{\bar{d}}^{\bar{d}} \bar{T}^{\dots \bar{d} \dots}, \quad (3.102a)$$

wie man sofort aus (3.95b) abliest (und $J^{\bar{m}\bar{n}} \bar{J}_{\bar{k}}^{\bar{n}} = \delta_{\bar{k}}^{\bar{m}}$ benutzt), bzw. im Falle der unteren Indizes der Form

$$-\bar{\Gamma}_{\bar{c}\bar{b}_i}^{\bar{d}} \bar{T}_{\dots \bar{d} \dots} \rightarrow -J_{\bar{d}}^{\bar{d}} \bar{J}_{\bar{c}\bar{b}_i}^{\bar{d}} \bar{T}_{\dots \bar{d} \dots} \quad (3.102b)$$

wie man sofort aus (3.95a) sieht. Vergleicht man nun (3.102a) und (3.102b) mit den jeweils letzten Termen von (3.101a) bzw. (3.101b) so sieht man sofort, dass diese jeweils entgegengesetzt gleich sind wenn man die Symmetrie $\bar{J}_{\bar{b}_c}^{\bar{a}} = \bar{J}_{\bar{c}\bar{b}}^{\bar{a}}$ berücksichtigt (Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen der Abbildung $\bar{x} \rightarrow x = \phi^{-1}(\bar{x})$). Alle Terme die Ableitungen der Jacobi-Matrizen enthalten heben sich also paarweise weg und es bleibt das tensorielle Transformationsgesetz übrig, wie behauptet. \square

3.9 Gauß' Theorema Egregium

Kernaussage des *Theorema Egregium*, des *bemerkenswerten* oder *erstaunlichen* Theorems, ist, dass die Gauß'sche Krümmung (3.46) eine *intrinsische* Größe ist, also bereits vollständig durch die *erste* Fundamentalform der Fläche (also deren Metrik) bestimmt. Tatsächlich gilt folgendes: Wir können die Gauß'sche Krümmung $\mathcal{K}(\mathfrak{p})$ am Punkte $\mathfrak{p} = \vec{z}(x)$ der Fläche berechnen, wenn wir die Koeffizienten $g_{ab}(x) := \vec{z}_a(x) \cdot \vec{z}_b(x)$ und deren ersten beiden Ableitungen bei x kennen.

Zum Beweis gehen wir von den Gleichungen (3.16) der zweiten Ableitungen aus. Wir betrachten sie als ein System von 15 partiellen Differentialgleichungen für die $9=6+3$ Funktionen \vec{z}_a und \vec{n} . (9 Gleichungen resultieren aus (3.16a), da \vec{z} drei Komponenten besitzt, für die je 3 unabhängige 2. Ableitungen $\vec{z}_{ab} = \vec{z}_{ba}$ existieren, und 6 Gleichungen aus (3.16b).) Man hat es also mit einem überbestimmenden System zu tun, das zur Lösung Integrabilitätsbedingungen stellt. Diese Integrabilitätsbedingungen implizieren die Aussage des *Theorema Egregium*.

Die Integrabilitätsbedingungen kann man leicht einsehen. Dazu differenzieren wir (nach bekanntem Muster in solchen Fällen) die Gleichungen (3.16) erneut nach x^c und ersetzen die dadurch dann auf den rechten Seiten entstehenden Terme \vec{z}_{ab} und \vec{n}_a wieder durch (3.16). Tatsächlich benötigen wir nur die Bedingungen die aus der Differentiation der ersten Gleichung (3.16) resultiert. Zunächst hat man also

$$\vec{z}_{abc} = K_{ab,c} \vec{n} + K_{ab} \vec{n}_c + \Gamma_{ab,c}^d \vec{z}_d + \Gamma_{ab}^d \vec{z}_{dc}. \quad (3.103)$$

Dabei haben wir $\vec{z}_{abc} := \partial \vec{z}_{ab} / \partial x^c$ geschrieben und an den Komponenten K_{ab} und Γ_{ab}^d die partielle Differentiation nach x^c durch einen mit Komma abgetrennten Index c bezeichnet.

Gemäß Plan ersetzen wir nun \vec{n}_c und \vec{z}_{dc} auf der rechten Seite von (3.103) durch $L_c^d \vec{z}_d = -g^{dn} K_{nc} \vec{z}_d$ (vgl. (3.19b)) und \vec{z}_{dc} durch $K_{dc} \vec{n} + \Gamma_{dc}^e \vec{z}_e$, und erhalten

$$\vec{z}_{abc} = K_{ab,c} \vec{n} - K_{ab} g^{dn} K_{nc} \vec{z}_d + \Gamma_{ab,c}^d \vec{z}_d + \Gamma_{ab}^d (K_{dc} \vec{n} + \Gamma_{dc}^e \vec{z}_e). \quad (3.104)$$

Die Integrabilitätsbedingung entsteht nun aus der simplen Beobachtung, dass wenn die Linke Seite die zweifache partielle Ableitung $\partial^2 \vec{z} / \partial x^b \partial x^c$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion \vec{z}_a ist (wir hatten ja \vec{z} als dreimal stetig-differenzierbar vorausgesetzt) auch die rechte Seite im Indexpaar (b, c) symmetrisch sein muss; oder äquivalent ausgedrückt: ihr in (b, c) antisymmetrischer Anteil muss verschwinden. Das führt sofort auf:

$$0 = \vec{n} \left[K_{ab,c} - K_{ac,b} + \Gamma_{ab}^d K_{dc} - \Gamma_{ac}^d K_{db} \right] + \vec{z}_d \left[\Gamma_{ab,c}^d - \Gamma_{ac,b}^d + \Gamma_{ce}^d \Gamma_{ba}^e - \Gamma_{be}^d \Gamma_{ca}^e - g^{dn} (K_{ab} K_{nc} - K_{ac} K_{nb}) \right] \quad (3.105)$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\{\vec{n}, \vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ an jedem Punkt müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern einzeln verschwinden. Das Verschwinden der ersten Klammer können wir elegant mit Hilfe der kovarianten Ableitung $\nabla_c K_{ab} = K_{ab,c} - \Gamma_{ca}^d K_{db} - \Gamma_{cb}^d K_{ad}$ schreiben: Bilden wir $\nabla_c K_{ab} - \nabla_b K_{ac}$ so heben sich zwei der vier so entstehenden ΓK -Terme weg und es bleibt gerade der Ausdruck der ersten eckigen Klammer. Also ist dessen Verschwinden äquivalent zu

$$\nabla_c K_{ab} - \nabla_b K_{ac} = 0. \quad (3.106)$$

Diese Gleichung heißt *Codazzi-Mainardi-Gleichung* und spielt in der Flächentheorie sowie im Anfangswertproblem der Allgemeinen Relativitätstheorie (verallgemeinert auf höhere Dimensionen, wo sie die identische Form annimmt) eine große Rolle. Für den Beweis des Gauß'schen Theorems brauchen wir sie aber nicht.

Zum Beweis des Theorema Egregiums brauchen wir nur das Verschwinden der zweiten eckigen Klammer in (3.105). Nach Umbenennung der Indizes, Ausschreiben der partiellen Ableitung $\partial_c = \partial/\partial x^c$ und Ausnutzen der Symmetrien $K_{ab} = K_{ba}$, $\Gamma_{ab}^d = \Gamma_{ba}^d$ ist diese äquivalent zu:

$$R^a{}_{bcd} = g^{an}(K_{nc}K_{bd} - K_{nd}K_{bc}), \quad (3.107a)$$

mit

$$R^a{}_{bcd} := \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{cn}^a \Gamma_{db}^n - \Gamma_{dn}^a \Gamma_{cb}^n. \quad (3.107b)$$

Alternativ dazu können wir auch schreiben

$$R_{abcd} = (K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc}), \quad (3.108a)$$

mit

$$R_{abcd} := g_{an}R^n{}_{bcd}. \quad (3.108b)$$

Man nennt Gleichung (3.108a) die *Gauß-Codazzi-Gleichung*. Diese enthält gerade den Beweis des *Theorema Egregiums*, denn nach (3.46) müssen wir ja beweisen, dass die Determinante $\det\{K_{ab}(x)\}$ durch die $g_{ab}(x)$ und deren Ableitungen ausdrückbar ist. Das aber steht gerade in (3.108a), denn für die Indexkombination $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, 2)$ ist die rechte Seite gerade $K_{11}K_{22} - (K_{12})^2 = \det\{K_{ab}\}$. Die linke Seite, R_{1212} , ist wegen (3.108b), (3.107b) und (3.28) aber eine Kombination der Koeffizienten g_{ab} und ihrer ersten beiden Ableitungen. Für die Gauß'sche Krümmung der Fläche erhalten wir also die das Gauß'sche Theorem zusammenfassende Formel

$$\mathcal{K} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}. \quad (3.109)$$

3.10 Der Riemann'sche Krümmungstensor

Die in (3.107b) und (3.108b) definierten Komponenten $R^a{}_{bcd}$ bzw. R_{abcd} entsprechen tatsächlich denen von Tensorfeldern der Stufe $\binom{1}{3}$ bzw. $\binom{0}{4}$ gemäß Definition 57. Diese Tatsache werden wir weiter unten beweisen und zwar mit einer Methode bzw. Schreibweise, die uns auch in höheren Dimensionen sehr nützlich sein wird.

Man nennt den durch die Komponenten $R^a{}_{bcd}$ repräsentierten Tensor den *Riemann'schen Krümmungstensor*. Dieser ist in zwei Dimensionen gemäß (3.109) durch die Gauß'schen Krümmung vollständig bestimmt, weil, wie wir ebenfalls gleich sehen werden, R_{1212} in 2 Dimensionen die einzige unabhängige Komponente des Riemann'schen Krümmungstensors ist. Trotzdem ist es sinnvoll, sich an dieser Stelle mit der genauen analytischen Form des Ausdrucks (3.107b) vertraut zu machen, denn diese wird uns in höheren Dimensionen genau so wieder begegnen, mit dem einzigen impliziten Unterschied, dass die Mächtigkeit der Indexmenge, die ja gleich der Dimension ist, größer wird. Für viele Rechnungen ist das aber ganz gleichgültig, so dass vieles, was wir bereits hier mit Hilfe des Ausdrucks $R^a{}_{bcd}$ feststellen können, in höheren Dimensionen mit formal identischer Begründung weiterhin gilt.

Wir beginnen mit der Diskussion der Symmetrien R_{abcd} . Ohne weitere Rechnung ist klar, dass R_{abcd} und damit auch $R^a{}_{bcd}$ im letzten Indexpaar (c, d) antisymmetrisch ist; denn von den vier Termen der rechten Seite von (3.107b) entsteht der zweite aus dem ersten und der vierte aus dem dritten durch Vertauschen von c mit d und Vorzeichenwechsel. Diese Antisymmetrie gilt also ganz unabhängig davon, wie die Γ_{ab}^c durch die g_{ab} ausgedrückt werden und wie groß die Indexmenge ist, über die die Indizes $a, b, c, ..$ laufen. Wir bemerken das an dieser Stelle, weil auch in höheren Dimensionen ganz analoge Symmetrien gelten mit zum Teil identischen Begründungen.

Alle weiteren Symmetrien des Krümmungstensors machen nun von seiner expliziten Abhängigkeit von der Metrik Gebrauch. Insgesamt ergeben sich die folgenden Symmetrierelationen (mit Einschluss der bereits eben festgestellten):

$$R_{abcd} = -R_{abdc}, \quad (3.110a)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd}, \quad (3.110b)$$

$$R_{abcd} = -R_{cdab}, \quad (3.110c)$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0. \quad (3.110d)$$

Diese gelten in allem Dimensionen, wenn nur der Zusammenhang (3.28) zwischen den Γ_{ab}^d Komponenten und den Ableitungen der Metrik besteht.

Zum Beweis bedienen wir uns einer sehr effektiven Methode, die ausnutzt, dass 1.) um jeden Punkt p der Fläche eine Parametrisierung existiert in der alle Komponenten $\Gamma_{ab}^d(p) = 0$ und 2.) die Symmetrie, die in einer Parametrisierung zutrifft, auch in jeder anderen Parametrisierung zutrifft, sofern es sich um die Komponenten eines Tensors handelt. Ersteres haben wir bereits in Bemerkung 60 gezeigt und letzteres folgt sofort aus dem Transformationsgesetz (3.86) für Tensoren, das die Indizes einer Reihe (für die alleine Symmetrierelationen betrachtet werden) alle mit der gleichen Jacobi-Matrix multipliziert, so dass Symmetrien dadurch 1-1 übertragen werden. Freilich müssen wir noch nachweisen, dass die $R_{ab\ cd}$ tatsächlich die Komponenten eines Tensors sind, was unten nachgeholt werden wird. Nehmen wir dies jedoch einmal vorweg, dann wird der Beweis ganz einfach, denn es reicht ja, diese Symmetrien in einer Parametrisierung nachzuweisen, in der am gerade betrachteten Punkt alle Γ_{ab}^c und damit wegen (3.26a) auch alle Ableitungen $g_{ab,c}$, sowie alle Ableitungen der Inversen Metrik, $g_{,c}^{ab}$, verschwinden; letzteres wegen $g_{,c}^{ab} = -g^{an}g^{bm}g_{nm,c}$. An diesem Punkt und in dieser Parametrisierung gilt dann mit (3.24)

$$\begin{aligned}
R_{ab\ cd} &= g_{an}(\partial_c \Gamma_{db}^n - \partial_d \Gamma_{cb}^n) \\
&= \partial_c(g_{an} \Gamma_{db}^n) - \partial_d(g_{an} \Gamma_{cb}^n) \\
&= \frac{1}{2}(-g_{db,ac} + g_{ad,bc} + g_{ba,dc} + g_{cb,ad} - g_{ac,bd} - g_{ba,cd}) \\
&= -\frac{1}{2}(g_{ac,bd} + g_{db,ac} - g_{ad,bc} - g_{bc,ad})
\end{aligned} \tag{3.111}$$

wobei $g_{ab,cd} := \partial^2 g_{ab} / \partial x^c \partial x^d$ und wir die Symmetrie der $g_{ab,cd}$ im ersten und zweiten Indexpaar genutzt haben. Eben diese Symmetrie, zusammen mit dem letzten Ausdruck in (3.111) setzt nun auch alle Beziehungen (3.110) mehr oder weniger sofort in Evidenz, nur für (3.110d) muss man zwei Zeilen rechnen.

Teil II

Semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

Kapitel 4

Grundstrukturen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

4.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeit: Was ist das?

Mannigfaltigkeiten sind Räume, die lokal so ‘aussehen’ wie der \mathbb{R}^n , wobei das n bei gegebener Mannigfaltigkeit immer das gleiche ist; es heißt die *Dimension* der Mannigfaltigkeit.

Unter die 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten fällt z.B. die leicht vorstellbare (weil im \mathbb{R}^3 einbettbare) zweidimensionale Sphäre:

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}, \quad (4.1)$$

und all die anderen Riemannschen Flächen höheren Geschlechts, die ebenfalls im \mathbb{R}^3 einbettbar und deshalb leicht visualisierbar sind. Selbst in zwei Dimensionen gibt es daneben aber auch weniger anschauliche Mannigfaltigkeiten, wie etwa den reell-projektiven Raum, den man aus der 2-Sphäre erhält, indem man antipodale Paare von Punkten $(x, -x)$ zu einem identifiziert (Quotientenkonstruktion). Wesentlich für eine Mannigfaltigkeit ist eben ihre lokale Äquivalenz zu einem Stück des \mathbb{R}^n und nicht ihre Einbettbarkeit in einem \mathbb{R}^N mit $N \geq n$. Die lokale Äquivalenz zu einem Stück des \mathbb{R}^n reicht z.B. aus, um die Differentiation von reellwertigen Funktionen auf der Mannigfaltigkeit zu erklären. Damit können dynamische Gesetze der Physik, die üblicherweise in Form von Differentialgleichungen für Funktionen auf der Raum-Zeit annehmen, auch auf Mannigfaltigkeiten formuliert

werden. Das bedeutet, dass die Raumzeit nicht mehr mit dem reellen vierdimensionalen affinen Raum identifiziert werden muss, wie etwa in der Speziellen Relativitätstheorie, sondern allgemeiner eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit sein kann - und davon gibt es *sehr* viele verschiedene. Von dieser Freiheit macht die Allgemeine Relativitätstheorie intensiven Gebrauch.

Dass eine Menge lokal so ‘aussieht’ wie der \mathbb{R}^n bedeutet mathematisch, dass diese Menge einen *Atlas* (Definition unten) besitzt, dessen *Kartenbilder* (Definition unten) Untermengen des \mathbb{R}^n sind und dabei gewisse Strukturmerkmale des \mathbb{R}^n erhält. Man beachte, dass der \mathbb{R}^n von sich aus eine Reihe von Strukturen mitbringt: Eine Topologie, einen Begriff von Differenzierbarkeit, eine affine und damit auch analytische Struktur, usw. Je nachdem, welche Strukturmerkmale des \mathbb{R}^n erhalten werden, spricht man z.B. von topologischer, differenzierbarer, analytischer, stückweise linearer etc. Mannigfaltigkeit. Wir werden uns hier hauptsächlich für differenzierbare Mannigfaltigkeiten interessieren.

Definition 63. Sei M eine Menge und $U \subseteq M$ eine Untermenge. Eine *Karte* (von U) auf M ist ein Paar (U, ϕ) , wobei $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung ist. U heißt *Kartengebiet*, ϕ *Kartenabbildung* und $\phi(U) =: V \subseteq \mathbb{R}^n$ *Kartenbild*.

Definition 64. Ein *S-Atlas* ist eine Menge von Karten $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ (mit einer hier nicht näher spezifizierter Indexmenge I , die nicht abzählbar sein muss), mit folgenden Eigenschaften:

A1 Die Mengen U_α überdecken M , d.h.

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha. \quad (4.2)$$

A2 Die Abbildungen ϕ_α erhalten das Strukturmerkmal \mathcal{S} ; das heißt, ist $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann sind

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} \Big|_{\phi_\beta(U_{\alpha\beta})} : \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}), \quad (4.3a)$$

$$\phi_{\beta\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \Big|_{\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \quad (4.3b)$$

Abbildungen, die \mathcal{S} erhalten bzw. die Eigenschaft \mathcal{S} besitzen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Eigenschaft von Abbildungen, das Strukturmerkmal \mathcal{S} zu erhalten, nach Komposition solcher Abbildungen bestehen bleibt. Bezeichnet z.B. \mathcal{S} die Topologie des \mathbb{R}^n , so sollen die Abbildungen (4.3) stetig sein und man spricht von einem topologischen Atlas. Sind die Abbildungen (4.3) k -fach stetig differenzierbar, so spricht man von einem C^k Atlas

und von einem *glatten* Atlas, falls $k = \infty$. C^0 bezeichnet dann topologische Abbildungen. Weitere Beispiele wären analytische, affine oder lineare Abbildungen. Im Folgenden verstehen wir unter dem Strukturmerkmal \mathcal{S} mindestens stetige Abbildungen.

Bemerkung 65. Eine Mannigfaltigkeit mit einem C^0 -Atlas ist in natürlicher Weise ein topologischer Raum. Seine Topologie ist definiert durch die Forderung, dass die Kartenabbildungen $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen seien. Die Urbilder $\phi_\alpha^{-1}(V)$ offener Mengen V von \mathbb{R}^n sind also – per Definition – offen in M . Die Menge der bei gegebenem Atlas so definierten offenen Mengen in M ist dann eine Sub-Basis der Topologie von M , d.h. die offenen Mengen von M sind genau diejenigen, die aus der Sub-Basis durch beliebige Vereinigungen und endliche viele Durchschnittsbildungen entstehen. Die so definierte Topologie ist die schwächste (manchmal auch gröbste genannt, d.h. sie besitzt „am wenigsten“ offene Mengen), für die alle Kartenabbildungen stetig sind. Wir wollen uns im Folgenden eine Mannigfaltigkeit immer auf diese Weise topologisiert vorstellen.

Definition 66. Zwei \mathcal{S} -Atlanten heißen *äquivalent*, wenn ihre Vereinigung wieder ein \mathcal{S} -Atlas ist. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der \mathcal{S} -Atlanten, deren Äquivalenzklassen *\mathcal{S} -Strukturen* genannt werden. Der Atlas, der aus allen Karten einer Äquivalenzklasse besteht, heißt *maximaler Atlas*.

Bemerkung 67. Eine \mathcal{S} -Struktur zu definieren hieße nach dieser Definition also wörtlich, einen maximalen Atlas anzugeben. Das wird in der Regel unmöglich sein. Tatsächlich reicht es jedoch, irgendeinen \mathcal{S} -Atlas A anzugeben, denn dieser ist in genau einem maximalen Atlas enthalten. Addiert man nämlich weitere Karten, die individuell zu A hinzugefügt wieder einen \mathcal{S} -Atlas bilden, so bildet auch die Gesamtmenge einen \mathcal{S} -Atlas; das heißt, die addierten Karten erhalten auch *untereinander* das Strukturmerkmal \mathcal{S} , obwohl anfänglich nur gefordert war, dass dies bezüglich der Karten in A der Fall ist. Zum Beweis betrachte man zwei jeweils zu A kompatible Karten (V_1, ψ_1) und (V_2, ψ_2) . Wir müssen zeigen, dass $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ und $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ das Strukturmerkmal \mathcal{S} erhalten. Wir beschränken uns auf den ersten Fall, da der zweite völlig analog bewiesen wird. Sei $p \in V_1 \cap V_2$, dann existiert eine Karte (U, ϕ) aus A mit $p \in U$ (da die Kartengebiete in A ganz M überdecken), so dass nach Voraussetzung $\psi_1 \circ \phi^{-1}$ und $\phi \circ \psi_2^{-1}$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen, $\phi(U \cap V_1)$ und $\psi_2(U \cap V_2)$, \mathcal{S} erhalten. Also trifft das nach Voraussetzung auch für ihre Komposition $(\psi_1 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi_2^{-1}) = \psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ zu, allerdings zunächst nicht in ganz $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ sondern nur in $\psi_2(U \cap V_1 \cap V_2)$, die der Definitionsbereich der Komposition der beiden Abbildungen

$$\phi \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(U \cap V_2) \rightarrow \phi(U \cap V_2) \quad (4.4a)$$

$$\psi_1 \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V_1) \rightarrow \psi_1(U \cap V_1) \quad (4.4b)$$

ist. Das reicht aber aus, denn durch Variieren von U über alle Kartengebiete in A , die einen nicht trivialen Schnitt mit $V_1 \cap V_2$ besitzen, erhält man die volle Aussage.

Als einfaches Beispiel von Inäquivalenz mag die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}$ dienen. Wir betrachten folgende zwei Atlanten A, A' , deren Kartengebiete jeweils ganz \mathbb{R} ist und deren Kartenabbildungen einmal die Identität ist, $\phi(x) = x$, und einmal die dritte Potenz, $\phi'(x) = x^3$. Dann ist die Übergangsfunktion $\phi \circ (\phi')^{-1}$ der Vereinigung beider Atlanten durch die dritte Wurzel gegeben, die überall stetig aber bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Also definieren die beiden Atlanten A und A' zwar äquivalente C^0 -, aber inäquivalente C^1 -Strukturen. Um nun solche sehr einfach konstruierbaren Inäquivalenzen auszuschließen, führt man zumindest für C^1 -Strukturen (warum nur für diese erhellt aus Satz 69 unten) noch eine Abschwächung des Äquivalenzbegriffs in Sinne echt größerer Äquivalenzklassen ein:

Definition 68. Zwei durch die Atlanten $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ und $A' = \{(U'_\alpha, \phi'_\alpha) \mid \alpha \in I'\}$ definierte C^1 -Strukturen heißen t -äquivalent, (t für topologisch) wenn ein Homöomorphismus (topologische Abbildung) $f : M \rightarrow M$ existiert, so dass A und $f_*A' := \{(f(U'_\alpha), \phi'_\alpha \circ f^{-1}) \mid \alpha \in I'\}$ C^1 -äquivalent (im obigen Sinne) sind.

In unseren Beispiel sind die beiden inäquivalenten C^1 Strukturen klarerweise t -äquivalent, denn mit dem Homöomorphismus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, wird f_*A' sogar identisch zu A .

Da jeder C^l -Atlas auch ein C^k -Atlas ist falls $k < l$, definiert jede C^l Struktur auch eine C^k Struktur für alle $0 \leq k \leq l$. In umgekehrter Richtung scheint es aber zunächst so zu sein, dass sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit verloren gingen, dass also weder die Äquivalenzklasse einer C^k -Struktur einen C^l -Atlas mit $l > k$ enthalten muss, noch dass zwei C^l -Atlanten, die in einer C^k -Struktur enthalten sein mögen, selbst untereinander C^l -äquivalent sein müssten. Für den Fall $k = 0$ kann es sogar passieren, dass zwei in der C^0 -Struktur enthaltene C^1 -Strukturen nicht einmal t -äquivalent sind. Im folgenden Satz seien einige Resultate zusammengefasst:

Satz 69. *Jeder C^1 -Struktur enthält mindestens einen C^k -Atlas für jedes $k > 1$. Für festes k sind je zwei dieser Atlanten sogar C^k -äquivalent, so dass man auch sagen kann, dass jede C^1 -Struktur eine eindeutige C^k -Struktur enthält. Dies gilt für jede Dimension n der Mannigfaltigkeit. Für $n < 4$ bleiben diese Aussagen sogar noch richtig, wenn man C^1 durch C^0 und $k > 1$ durch $k > 0$ ersetzt, und für die „Äquivalenz“ von C^1 -Strukturen die t -Äquivalenz nimmt. Für $n \geq 4$ hingegen ist bekannt, dass eine C^0 -Struktur weder eine C^1 -Struktur enthalten muss,*

und dass möglicherweise enthaltene C^1 Strukturen nicht \mathfrak{t} -äquivalent sein müssen. Man spricht im letzteren Falle von inäquivalenten differenzierbaren Strukturen einer gegebenen topologischen Mannigfaltigkeit. Überraschenderweise hat bereits der \mathbb{R}^4 überabzählbar viele inäquivalente differenzierbare Strukturen, während es für kompakte Mannigfaltigkeit höchstens endlich viele gibt. Die niedrigste Dimension, in der man kompakte Mannigfaltigkeiten mit mehreren inäquivalenten differenzierbaren Strukturen kennt, ist sieben (die S^7 hat 28), während darunter nur in Dimension vier deren Existenz bisher weder bekannt noch ausgeschlossen wurde.

Für das Folgende treffen wir folgende

Definition 70. Eine C^k -differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit M mit C^k -Struktur ($k > 0$). Ist $k = \infty$ so sprechen wir oft einfach von einer differenzierbaren (oder glatten) Mannigfaltigkeit. Um unangenehme (und etwas unerwartete) Pathologien auszuschließen, fordert man üblicherweise noch, dass die Topologie der Mannigfaltigkeit dem 2. Hausdorff'schen Trennungsaxiom genügt (jedes Paar verschiedener Punkte besitzt ein Paar disjunkter offener Umgebungen) und dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt (die Topologie besitzt eine abzählbare Basis, d.h. es existiert eine abzählbare Basismenge offener Mengen, in dem Sinne, dass jede offene Menge Vereinigung von Basismengen ist.)

Bemerkung 71. Man könnte zunächst denken, dass die Forderung der Existenz lokaler Karten bereits die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft impliziert; das ist jedoch nicht der Fall, wie das folgende Standardbeispiel zeigt: Man geht aus von der disjunkten Vereinigung zweier Kopien der reellen Achse, $\tilde{M} = \mathbb{R} \times \{\alpha\} \cup \mathbb{R} \times \{\beta\}$ und betrachte die Quotientenmenge (Menge der Äquivalenzklassen) bezüglich der Äquivalenzrelation $(x, \alpha) \sim (y, \beta) \Leftrightarrow x = y \neq 0$. Die Quotientenmenge $M := \tilde{M}/\sim$ topologisiert man durch die Quotiententopologie, gemäß der genau diejenigen Mengen $U \subset M$ offen sind, deren Urbilder $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{M}$ offen sind, wobei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ die kanonische Projektion ist, die jedem Punkt in \tilde{M} seine Äquivalenzklasse zuweist. Die Menge M kann man sich also vorstellen als Vereinigung aller von Null verschiedenen reellen Zahlen und zwei Kopien der Null, 0_α und 0_β , also $M = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{0_\alpha, 0_\beta\}$. Jede offene Menge die 0_α aber nicht 0_β enthält hat offensichtlich einen nicht leeren Schnitt mit jeder offene Menge die 0_β aber nicht 0_α enthält, so dass also 0_α und 0_β keine disjunkten offenen Umgebungen besitzen. Trotzdem ist M eine Mannigfaltigkeit. Das ist für alle von 0_α und 0_β verschiedenen Punkte sofort klar. Eine zu \mathbb{R} homöomorphe offene Umgebung U_α von 0_α , die 0_β nicht enthält, ist $U_\alpha = (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{0_\alpha\}$. Die Kartenabbildung ist $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi_\alpha(0_\alpha) = 0$ und $\phi_\alpha(x) = x$ für $x \neq 0_\alpha$. Ganz entsprechend existiert eine zu \mathbb{R} homöomorphe offene Umgebung U_β die 0_β aber nicht 0_α enthält. Es ist $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta = \mathbb{R} - \{0\}$ und $\phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) = \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) = \mathbb{R} - \{0\}$. Die

Übergangsfunktion $\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ ist die Identität auf $\mathbb{R} - \{0\}$ und definiert damit eine C^∞ -Struktur.

4.2 Tangentialräume

Wir werden später allgemeine differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten definieren. Hier brauchen wir zunächst zwei Spezialfälle:

Definition 72. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n mit einer C^l -Struktur, die durch einen Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ repräsentiert wird. Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *differenzierbare (reellwertige) Funktion* auf M der Klasse C^k , wobei $k \leq l$, wenn für alle Karten (U_α, ϕ_α) die Funktionen $f \circ \phi_\alpha^{-1} : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar sind, wobei $V_\alpha := \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge dieser Funktionen wird mit $C^k(M)$ bezeichnet. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so heißt für $k \leq l$ eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ eine (*differenzierbare*) *Kurve* auf M der Klasse C^k , wenn für alle Karten (U_α, ϕ_α) des Atlases und $U_\alpha \cap \text{Bild}(\gamma) \neq \emptyset$ die Kurve $\gamma_\alpha := \phi_\alpha \circ \gamma : I_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ im gewöhnlichen Sinne (d.h. komponentenweise) k -mal stetig differenzierbar ist. Hier ist $I_\alpha := \gamma^{-1}(U_\alpha \cap \text{Bild}(\gamma)) \subseteq I$ (was nicht zusammenhängend sein muss). Ist $n = k = \infty$, so spricht man auch von *glatten Funktionen* und *glatten Kurven*. Man beachte, dass diese Definitionen unabhängig von dem Atlas (Repräsentanten) ist, der die C^l -Struktur von M repräsentiert.

Die Menge $C^\infty(M)$ der glatten Funktionen auf M trägt in natürlicher Weise die Struktur einer assoziativen und kommutativen Algebra, in der die Addition (+) und Multiplikation punktweise definiert sind: $(f + g)(p) := f(p) + g(p)$ bzw. $(f \cdot g)(p) := f(p)g(p)$ und Distributivität gilt: $(f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h$. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist die „Nullfunktion“ $N : M \rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}$, das bezüglich der Multiplikation die „Einsfunktion“ $E : M \rightarrow \{1\} \subset \mathbb{R}$.

Tangentenvektoren an Kurven denken wir uns nun als Richtungsableitungen von Funktionen: Sei $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Kurve durch $p \in M$, so dass etwa $p = \gamma(0)$, dann ist die Ableitung von $f \in C^\infty(M)$ in Richtung des Tangentenvektors an γ im Punkte p , den wir $\dot{\gamma}_p$ nennen, gegeben durch

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma(t) =: \dot{\gamma}_p(f). \quad (4.5)$$

Man beachte, dass $\dot{\gamma}_p$ eine Abbildung $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die bezüglich der reellen Vektorraumstrukturen von $C^\infty(M)$ und \mathbb{R} linear und bezüglich der Multiplikation in $C^\infty(M)$ derivativ ist (der Leibniz-Regel genügt). Es gilt also für alle

$f, g \in C^\infty(M)$ und alle $c \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\gamma}_p(f + cg) = \dot{\gamma}_p(f) + c\dot{\gamma}_p(g), \quad (4.6a)$$

$$\dot{\gamma}_p(f \cdot g) = \dot{\gamma}_p(f)g(p) + f(p)\dot{\gamma}_p(g). \quad (4.6b)$$

Definition 73. Eine Abbildung $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ die (4.6) genügt heißt *punktale Derivation* von $C^\infty(M)$ an $p \in M$.

Bemerkung 74. Es ist einfach zu sehen, dass die Anwendung einer punktalen Derivation X_p auf konstante Funktionen verschwindet. Sei nämlich E wieder die Einsfunktion (konstante Funktion zum Funktionswert 1), so ist $E = E \cdot E$ und wegen (4.6b) $X_p(E) = E \cdot X_p(E) + X_p(E) \cdot E = 2X_p(E)$ folgt $X_p(E) = 0$. Die konstante Funktion mit Funktionswert $c \in \mathbb{R}$ ist cE , so dass aus (4.6a) dann allgemein $X_p(cE) = cX_p(E) = 0$ folgt.

Wir wollen nun zeigen, dass punktale Derivationen in $p \in M$ und Richtungsableitungen entlang Kurven durch p wirklich dasselbe sind. So gilt z.B. für Letztere: Stimmen $f, g \in C^\infty(M)$ in einer Umgebung U von p überein, so ist auch jede Richtungsableitung von f in p gleich der entsprechenden Richtungsableitung von g in p . Dasselbe gilt nun auch für punktale Derivationen.

Proposition 75. *Stimmen $f, g \in C^\infty(M)$ in einer Umgebung U von p überein, $f|_U = g|_U$, dann ist $X_p(f) = X_p(g)$ für alle punktalen Derivationen von f und g .*

Der Beweis ist nicht ganz trivial und macht wesentlich von der Tatsache Gebrauch, dass es für C^∞ -Mannigfaltigkeiten (ganz in Gegensatz zum analytischen Fall) „hinreichend viele“ lokalisierende Funktionen gibt, d.h. Funktionen mit kompaktem Träger. Wir erinnern daran, dass man allgemein mit dem *Träger* (englisch: *support*) einer Funktion $f : M \rightarrow V$ von einem topologischen Raum M in einen Vektorraum V den Abschluss derjenigen Teilmenge von M bezeichnet, auf der f nicht den Wert 0 annimmt:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}. \quad (4.7)$$

Die Existenz hinreichend vieler lokalisierender Funktionen wird nun durch das folgende Lemma ausgedrückt, das wir auch später noch mehrfach anwenden werden:

Lemma 76. *Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und $K \subset O \subset M$ mit O offen und K kompakt; dann existiert $f \in C^\infty(M)$, so dass $f|_K = E|_K$ (Einsfunktion) und $\text{supp}(f) \subset O$.*

Beweis. Wir führen zunächst drei nützliche Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R})$ ein:

1.

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \exp(-1/x^2) & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Diese auf der ganzen reellen Achse unendlich oft differenzierbare ($C^\infty(\mathbb{R})$ -) Funktion nimmt den Wert Null auf der negativen x -Achse an und strebt dann streng monoton steigend asymptotisch dem Wert Eins zu.

2.

$$h_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad h_\epsilon(x) := \frac{g(x)}{g(x) + g(\epsilon - x)} \quad (4.9)$$

für positives reelles ϵ . Man beachte, dass der Nenner nie verschwindet, so dass es sich auch hier um eine $C^\infty(\mathbb{R})$ -Funktion handelt. Sie interpoliert zwischen dem Wert Null, den sie für $x \leq 0$ annimmt, und dem Wert Eins, den sie für $x \geq \epsilon$ annimmt. Im Zwischenintervall $(0, \epsilon)$ ist sie streng monoton steigend.

3.

$$\varphi_{(\epsilon, r)} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \quad \varphi_{(\epsilon, r)}(x) := 1 - h_\epsilon(\|x\| - (r - \epsilon)) \quad (4.10)$$

für positive reelle r und ϵ , mit $\epsilon < r$. Diese $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktion nimmt den Wert Eins innerhalb des abgeschlossenen Balls $\bar{B}_{r-\epsilon}(0)$ an, ist streng positiv innerhalb des offenen Balls $B_r(0)$ und nimmt außerhalb letzteren den Wert Null an. Sie fällt im offenen Radiusintervall $(r - \epsilon, r)$ streng monoton von Eins auf Null.

Nun zum eigentlichen Beweis des Lemmas: Um jeden Punkt $p \in K$ wählen wir ein Koordinatensystem (U_p, ϕ_p) mit U_p offen, so dass $\phi_p(p) = 0$ und $\bar{U}_p \subset O$. Klarerweise existiert für jeden Punkt p ein $r_p > 0$, so dass $\phi_p(U_p) \supset B_{r_p}(0)$. Die Funktion $\varphi_{(\epsilon, r_p)} \circ \phi_p$ kann dann außerhalb U_p durch den konstanten Wert Null zu einer Funktion in $C^\infty(M)$ fortgesetzt werden, die wir ψ_p nennen. Auf den offenen Mengen $U'_p := \psi^{-1}(B_{r_p}) \subset U_p$ ist dann ψ_p echt positiv. Da auch die U'_p ganz K überdecken, existieren wegen der Kompaktheit K s endlich viele Punkte p_1, \dots, p_n in K , so dass K bereits von den n offenen Mengen U'_{p_i} ($i = 1 \dots n$) überdeckt wird. Die Funktion $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_{p_i}$ ist dann per Konstruktion echt positiv auf K und hat ihren Träger in O . Wieder wegen der Kompaktheit K s existiert ein $\delta > 0$, so dass $\psi|_K > \delta$. Also ist $f := h_\delta \circ \psi$ die gesuchte Funktion mit Träger in O und die auf K konstant Eins ist. \square

Eine unmittelbare Folge ist

Korollar 77. Sei $U \subset M$ offen und $p \in U$, dann existiert auch eine kompakte Umgebung K von p die in U enthalten ist. (Beachte: Dass K Umgebung ist, heißt, dass in K eine offene Menge V enthalten ist, die wiederum p enthält.) Das folgt sofort daraus, dass die entsprechende Aussage im \mathbb{R}^n gilt und eine Kartenabbildung $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus zwischen U und ihrem Bild $\phi(U)$ vermittelt. (Beachte: Stetige Bilder kompakter Mengen sind stets kompakt.) Also folgt aus Lemma 76, dass es zu jeder offenen Umgebung U von p und jeder echten offenen Teilmenge $V \subset U$ eine reellwertige glatte Funktion f mit Träger in U gibt, die eingeschränkt auf V die Einsfunktion ist.

Daraus folgt insbesondere der

Beweis von Proposition 75. Sei $U \subset M$ Umgebung von p und $h \in C^\infty(M)$ mit $h|_U = 0$. Nach obigem (Korollar 77) ist klar, dass eine Funktion $k \in C^\infty(M)$ existiert mit $k(p) = 1$, deren Träger in U enthalten ist. Also ist $h \cdot k = 0$ (Nullfunktion), da h innerhalb und k außerhalb von U verschwinden. Für eine punktale Derivation X_p an p gilt nach (4.6a) aber, dass $X_p(0) = X_p(0+0) = 2X_p(0)$, also $X_p(0) = 0$. Also gilt nach (4.6b) auch $0 = X_p(h \cdot k) = X_p(h)k(p) + h(p)X_p(k) = X_p(h)$. Setzt man nun noch $h = f - g$ so folgt die Behauptung. \square

Damit wird man auf die begriffliche Fassung des Tangentialvektorraums an einem Punkt geführt, der ja als Elemente die Tangentialvektoren aller Kurven durch p erfassen soll.

Definition 78. Der *Tangentialraum* am Punkte p einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist der $n := \dim(M)$ – dimensionale reelle Vektorraum aller Abbildungen $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ die (4.6) genügen; er wird mit $T_p(M)$ bezeichnet.

Dass es sich bei $T_p(M)$ um einen reellen Vektorraum handelt ist klar. Weiter unten werden wir zeigen, dass dieser auch n Dimensionen hat. Zuerst wollen wir jedoch spezielle, durch die Karten induzierte punktale Derivationen betrachten.

Sei (U, ϕ) ein Karte mit offenem Kartengebiet U um einen Punkt $p \in U$. Dann definiert diese $n = \dim(M)$ punktale Derivationen an p durch die Kurvenstücke $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \phi^{-1}(\phi(p) + te_a) \in M$, wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n ist. Die zugehörige punktale Derivation an p ist dann gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p f := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \phi^{-1}(\phi(p) + te_a) = D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(e_a), \quad (4.11)$$

wobei $D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die gewöhnliche Ableitung der Funktion $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $\phi(p)$ ist. Die spezielle Bezeichnung $\partial/\partial x^a$

soll also andeutet, dass es sich hierbei um die gewöhnliche partiellen Ableitungen bezüglich des durch die Kartenabbildung ϕ in U definierten Koordinatensystems x^a handelt wenn man die Funktion f als Funktion der x^a in $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ auffasst. Die x^a wiederum sind die Komponentenfunktionen der Kartenabbildung, d.h. es ist $\phi = \sum_{a=1}^n x^a e_a$. Setzt man in (4.11) für f die Komponentenfunktion x^b selbst ein, so erhält man sofort das vertraute

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^a} \right|_p x^b = \delta_a^b. \quad (4.12)$$

Proposition 79. *Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset M$ ein stetig differenzierbares Kurvenstück mit $\gamma(0) = p$ und ist $\phi \circ \gamma = \gamma^a e_a$ sein Bild in der Karte (U, ϕ) mit $\gamma^a := x^a \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt*

$$\dot{\gamma}_p = \dot{\gamma}^a(0) \left. \frac{\partial}{\partial x^a} \right|_p, \quad (4.13)$$

wobei $\dot{\gamma}^a(0) = d/dt|_{t=0} \gamma^a(t)$.

Beweis. Mit (4.5) und (4.11) haben wir

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_p(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \gamma(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \phi^{-1})(\gamma^a(t) e_a) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \phi^{-1})(\phi(p) + (\gamma^a(t) - \gamma^a(0)) e_a) \\ &= D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(\dot{\gamma}^a(0) e_a) \\ &= \dot{\gamma}^a(0) D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}(e_a) \\ &= \dot{\gamma}^a(0) \left. \frac{\partial}{\partial x^a} \right|_p f \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei wir am 5. Gleichheitszeichen lediglich ausgenutzt haben, dass die Ableitung $D(f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist und die 6. Gleichheit aus (4.11) folgt. \square

Liegt $p \in M$ im Durchschnitt zweier Kartengebiete U_α und U_β , so existieren in $T_p(M)$ sowohl $\partial/\partial x_\alpha^a$ als auch $\partial/\partial x_\beta^b$. Es ist klar, dass ihr Verhältnis durch die Übergangsfunktion (4.3) bestimmt ist. Wie genau, regelt die folgende

Proposition 80. *Seien (U_α, ϕ_α) und (U_β, ϕ_β) zwei Karten mit offenen Kartengebieten U_α, U_β und $p \in U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$. Dann gilt*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_\alpha^a} \right|_p = \sum_{b=1}^n \left. \frac{\partial x_\beta^b}{\partial x_\alpha^a} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial x_\beta^b} \right|_p. \quad (4.15)$$

Hier ist $\partial x_\beta^b / \partial x_\alpha^a|_p$ gemäß (4.11) (für $f = x_\beta^b$) definiert und bildet gleichzeitig die Komponenten der Jacobi-Matrix der Übergangsfunktion $\phi_{\beta\alpha}$ bezüglich der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n .

Beweis. Gemäß (4.11) und (4.3) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^a} \Big|_p &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(p) + te_a) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_{\beta\alpha}(\phi_\alpha(p) + te_a) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_\beta^b} \Big|_p [D\phi_{\beta\alpha}(x)]_a^b. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hier ist $D\phi_{\beta\alpha}(x)$ wieder die Ableitung der Funktion (4.3b) an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ und hier $x = \phi_\alpha(p)$. Die Ableitung ist eine x -abhängige lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $D\phi_{\beta\alpha}(x)(e_a) = [D\phi_{\beta\alpha}(x)]_a^b e_b$. Nach (4.11) ist nun $[\phi_{\beta\alpha}'(x)]_a^b$ identisch mit $\partial x_\beta^b / \partial x_\alpha^a|_p$. \square

Nun kommen wir zu der oben bereits gemachten Dimensionsaussage. Wir zeigen:

Proposition 81. *Die Dimension der Tangentialräume ist gleich der Dimension n der Mannigfaltigkeit. Ist (U, ϕ) Karte mit U offen und $p \in U$, so bilden die n durch (4.11) definierten punktalen Derivationen $\partial / \partial x^a|_p$ eine Basis von $T_p(M)$ und jede punktale Derivation X_p an p hat die Entwicklung*

$$X_p = \sum_{a=1}^n X_p(x^a) \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p, \quad (4.17)$$

wobei $x^a : U \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von ϕ bezüglich der kanonischen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ sind, d.h. $\phi = \sum_{a=1}^n x^a e_a$.

Dem Beweis schicken wir voraus

Lemma 82. *Sei (U, ϕ) Karte mit $U \subseteq M$ offen, $V := \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex (d.h. jede Gerade, die zwei in V liegende Punkte verbindet, verläuft zwischen diesen Punkten ganz in V) und $f \in C^\infty(U)$. Dann existieren n glatte Funktionen $g_a \in C^\infty(U)$, so dass*

$$f = f(p) + \sum_{a=1}^n (x^a - x^a(p)) \cdot g_a. \quad (4.18)$$

Beweis. Offensichtlich gilt für jeden Punkt $q \in U$

$$f(q) = f(p) + \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f \circ \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi(q) - \phi(p))). \quad (4.19)$$

Schreibt man $\phi = \sum_{a=1}^n x^a e_a$, so kann man mit Hilfe von (4.11) die t -Ableitung unter dem Integral sofort in die Form (4.18) bringen, wobei

$$g_a(q) = \int_0^1 dt \left. \frac{\partial f}{\partial x^a} \right|_{\phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi(q) - \phi(p)))}. \quad (4.20)$$

□

Bemerkung 83. Die Beschränkung auf Karten mit konvexem Kartenbild bedeutet keinen Verlust an Allgemeinheit, da konvexe Umgebungen (wie etwa offene Kugeln) eine Umgebungsbasis der Topologie des \mathbb{R}^n bilden. Ist also zunächst eine Karte (U, ϕ) gegeben mit offenem U aber nicht konvexem $V = \phi(U)$, so existiert immerhin ein offenes konvexes $V' \subset V$ das $\phi(p)$ enthält (für irgend einen gewählten Punkt $p \in U$), so dass dann $(U', \phi|_{U'})$ mit $U' := \phi^{-1}(V')$ eine Karte mit konvexem Kartenbild ist und deren offenes Kartengebiet p enthält.

Beweis von Proposition 81. Wendet man die punktale Derivation X_p auf f an und benutzt für f die Darstellung (4.18), in der $f(p)$ und $x^a(p)$ als konstante Funktionen zu betrachten sind (vgl. Bemerkung 74), so erhält man mit der aus (4.20) folgenden Gleichung $g_a(p) = \partial f / \partial x^a|_p$ gerade

$$X_p(f) = \sum_{a=1}^n X_p(x^a) \left. \frac{\partial f}{\partial x^a} \right|_p. \quad (4.21)$$

Da dies für alle $f \in C^\infty(U)$ gilt folgt die Gültigkeit von (4.17). Damit sind die n punktalen Derivationen $\partial / \partial x^a|_p$ als Erzeugendensystem des Vektorraums $T_p(M)$ erwiesen. Sie sind aber auch linear unabhängig, denn hat man $\sum_{a=1}^n c_a \partial / \partial x^a|_p = 0$, so folgt sofort $c_b = 0$ für alle $1 \leq b \leq n$, etwa durch Anwenden dieser Gleichung auf die Funktion x^b unter Beachtung von (4.12). □

Zu jedem Vektorraum gehört in natürlicher Weise ein Dualraum von gleicher Dimension. Dieser enthält als Elemente die linearen Abbildungen des Vektorraums in den Grundkörper. Entsprechendes gilt hier:

Definition 84. Der *Kotangentenraum* am Punkte p einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist der $n := \dim(M)$ – dimensionale reelle Dualraum zu $T_p(M)$;

er wird mit $T_p^*(M)$ bezeichnet. Ist (U, ϕ) eine Karte mit offenem Kartengebiet U das p enthält, so wird die zu $\{\partial/\partial x^\alpha|_p \mid \alpha = 1, \dots, n\}$ duale Basis von $T_p^*(M)$ mit $\{dx^\alpha|_p \mid \alpha = 1, \dots, n\}$ bezeichnet. Es gilt also die übliche Gleichung zwischen den Vektoren einer Basis und deren Dualbasis (die hier aufgrund der Symbolik eine etwas sperrige Gestalt annimmt):

$$dx^b|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p \right) = \delta_a^b. \quad (4.22)$$

Weiter kann man nun Tensorprodukte unter den Räumen $T_p(M)$ und $T_p^*(M)$ bilden. Man setzt

$$T_{p_m}^\ell(M) := \underbrace{T_p(M) \otimes \dots \otimes T_p(M)}_{\ell \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes \dots \otimes T_p^*(M)}_{m \text{ Faktoren}} \quad (4.23)$$

Eine Basis dieses $n^{\ell+m}$ -dimensionalen Vektorraums ist gegeben durch die Vektoren der Form

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_\ell}} \Big|_p \otimes dx^{b_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{b_m}|_p \quad (4.24)$$

an denen die $\ell + m$ Indizes α_i, b_j unabhängig voneinander die Werte 1 bis n durchlaufen.

Nach der allgemeinen Regel, dass sich unter linearen Abbildungen Basen und Dualbasen relativ zueinander mit der jeweils transponiert-inversen Matrix transformieren, erhält man aus (4.15) sofort

$$dx^\alpha|_p = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial x_\alpha^a}{\partial x_\beta^b} \Big|_p dx^\beta|_p. \quad (4.25)$$

Dass $\partial x_\alpha^a / \partial x_\beta^b$ in der Tat die zu $\partial x_\beta^b / \partial x_\alpha^a$ inverse Matrix ist folgt sofort daraus, dass gemäß (4.3) $\phi_{\alpha\beta}$ die zu $\phi_{\beta\alpha}$ inverse Abbildung ist, so dass auch ihre jeweiligen Ableitungen (Jacobi Matrizen) zueinander invers sind. Die Jacobi Matrizen sind aber gerade durch $\partial x_\alpha^a / \partial x_\beta^b$ bzw. $\partial x_\beta^b / \partial x_\alpha^a$ gegeben, wie am Ende des Beweises von Proposition 80 gezeigt. Im gewissen Sinne wurde dies durch die suggestive Schreibweise ja bereits vorweggenommen.

Das Transformationsverhalten des allgemeinen Tensorprodukts (4.23) ergibt sich dann, indem man jeden $T_p(M)$ -Faktor nach (4.15) und jeden $T_p^*(M)$ -Faktor nach (4.25) transformiert.

4.3 Vektor- und Tensorfelder

Definition 85. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition 70. Ein auf einer Teilmenge $U \subseteq M$ definiertes *Vektorfeld* X ist eine Abbildung, die jedem $p \in U$ ein Element $T_p(M)$ zuordnet. Ist U offen, so heißt X vom Typ C^k (oder einfach C^k), wenn für jedes Kartengebiet U_α der C^∞ -Struktur für das $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ die Koeffizientenfunktionen $X_\alpha^a : U_\alpha \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ der Entwicklung $X_p = \sum_{a=1}^n X_\alpha^a(p) \partial / \partial x_\alpha^a|_p$ im Sinne von Definition 72 vom Typ C^k sind. Ist $k = \infty$, so nennt man das Vektorfeld auch oft *glatt*. Entsprechend definiert man Felder von Kovektoren oder allgemeiner Tensorfelder als Abbildungen, die jedem $p \in U$ ein Element in $T_p^\ell(M)$ zuordnen. Diese heißen dann vom Typ C^k , wenn die Koeffizientenfunktionen bezüglich der Tensorproduktbasis (4.24) im Sinne von Definition 72 vom Typ C^k sind. Wieder heißt das Tensorfeld *glatt* falls $k = \infty$. Felder heißen *lokal* falls $U \neq M$ und *global* falls $U = M$.

Bemerkung 86. Triviale Beispiele für glatte lokale Vektorfelder sind die in Kartengebieten U_α gegebenen Abbildungen $U_\alpha \ni p \rightarrow \partial / \partial x_\alpha^a|_p$, die wegen der konstanten Koeffizientenfunktionen klarerweise glatt sind. Man schreibt für dieses Vektorfeld einfach $\partial / \partial x_\alpha^a$, und genauso dx_α^a für das glatte lokale Kovektorfeld $U_\alpha \ni p \rightarrow dx_\alpha^a$. Man nennt diese auch *Koordinatenbasisfelder*.

Wie bereits gesehen bildet die Menge C^∞ der glatten, reellwertigen Funktionen eine kommutative und assoziative Algebra. Ein globales Vektorfeld X definiert eine Abbildung $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ die für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und alle $c \in \mathbb{R}$ folgenden Bedingungen genügt (vgl. (4.6 und Definition 73)):

$$X(f + cg) = X(f) + cX(g), \quad (4.26a)$$

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g). \quad (4.26b)$$

Definition 87. Eine Abbildung $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, die (4.26) genügt, heißt *Derivation* von $C^\infty(M)$.

Da Derivationen Abbildungen sind können sie hintereinander ausgeführt werden, $X \circ Y(f) := X(Y(f))$. Sie bilden aber keine Algebra (mit \circ als Produkt), denn die Abbildung $X \circ Y : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ genügt nicht (4.26b):

$$\begin{aligned} X \circ Y(f \cdot g) &= X(Y(f) \cdot g + f \cdot Y(g)) \\ &= XY(f) \cdot g + f \cdot XY(g) + X(f) \cdot Y(g) + Y(f) \cdot X(g). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Es sind die letzten beiden Terme, die die Eigenschaft (4.26b) verhindern. Zusammen sind diese beiden Terme symmetrisch unter dem Austausch $X \leftrightarrow Y$, fallen also heraus, wenn man von $X \circ Y$ die umgekehrte Komposition, $Y \circ X$, abzieht.

Definition 88. Der *Kommutator* zweier Vektorfelder ist definiert durch

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X. \quad (4.28)$$

Gilt $[X, Y] = 0$ so sagt man, dass X und Y *kommutieren*.

Definition 89. Eine *Lie Algebra* über dem Körper \mathbb{K} ist ein Vektorraum V über \mathbb{K} zusammen mit einer *Lie-Klammer* genannten Abbildung $V \times V \rightarrow V$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$, die für alle $X, Y, Z \in V$ und alle $c \in \mathbb{K}$ folgenden Bedingungen genügt

$$[X + cY, Z] = [X, Z] + c[Y, Z] \quad \text{Linearität,} \quad (4.29a)$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad \text{Antisymmetrie,} \quad (4.29b)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \text{Jacobi Identität.} \quad (4.29c)$$

Man beachte, dass die Linearität im ersten Argument (4.29a) zusammen mit der Antisymmetrie (4.29b) auch die Linearität im zweiten Argument implizieren. Man kann also sagen, dass die Lie Klammer eine bilineare, antisymmetrische Abbildung $V \times V \rightarrow V$ ist, die der Jacobi Identität genügt. Betrachtet man die Lie Klammer analog einem Produkt in einer gewöhnlichen Algebra, dann ersetzt die Jacobi Identität die Bedingung der Assoziativität.

Proposition 90. *Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit bilden eine reelle Lie Algebra, wenn man die Lie-Klammer durch den Kommutator gemäß (4.28) definiert.*

Beweis. Aus (4.27) und der entsprechenden Gleichung in der X und Y vertauscht sind folgt durch Subtraktion, dass $[X, Y]$ wieder (4.26b) genügt und somit eine Derivation ist. Die Bedingungen (4.29a) und (4.29b) sind klarerweise erfüllt und (4.29c) ergibt sich aus der Assoziativität für die Komposition von Abbildungen ($X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$). \square

Man beachte, dass der Kommutator in jedem Argument linear bezüglich der Multiplikation mit $c \in \mathbb{R}$ ist, nicht jedoch bezüglich der Multiplikation mit Funktionen $f \in C^\infty(M)$. Stattdessen sieht man mit (4.26b) sofort, dass für alle glatten Vektorfelder X, Y und alle glatten Funktionen gilt:

$$[X, f \cdot Y] = f \cdot [X, Y] + X(f) \cdot Y. \quad (4.30)$$

Im allgemeinen wird der Kommutator zweier Vektorfelder nicht verschwinden. Verschwinden die Kommutatoren von X und Y mit Z , dann auch der von $[X, Y]$ mit Z , wie man aus der Jacobi-Identität sofort sieht. Aus der Definition der Koordinatenbasisfelder ist es klar, dass ihr Kommutator stets verschwindet,

$$[\partial/\partial x^a, \partial/\partial x^b] = 0. \quad (4.31)$$

Umgekehrt kann man zeigen: Verschwinden alle Kommutatoren zwischen Basisfeldern $\{e_a\}_{a=1\dots n}$, so existieren lokale Koordinaten $\{x^a\}_{a=1\dots n}$ mit $e_a = \partial/\partial x_a$.

Definition 91. Sei $U \subseteq M$ offen und e_a , $a = 1, \dots, n$, glatte Vektorfelder, so dass die n Vektoren $e_a|_p$ an jedem Punkt $p \in U$ linear unabhängig sind; dann heißen die n Vektorfelder (*Tangential*)*Basisfelder über U* . Glatte Felder θ^a , $a = 1, \dots, n$, von Kovektoren, die an jedem Punkt $p \in U$ linear unabhängig sind, heißen *Kobasisfelder über U* . Sind sie an jedem Punkt dual zur Tangentialbasis, d.h. gilt an jedem Punkt analog zu (4.22)

$$\theta^b|_p(e_a|_p) = \delta_a^b, \quad (4.32)$$

so heißen sie *Dualbasisfelder*. Ist $U = M$, so heißen die Basen *global*, andernfalls *lokal*. Das punktweise Bilden von Tensorprodukten erlaubt dann Basisfelder der entsprechenden Tensorstruktur zu formen, etwa für $T_m^\ell(M)$ analog zu (4.24)

$$(e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_\ell} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_m})|_p := e_{a_1}|_p \otimes \dots \otimes e_{a_\ell}|_p \otimes \theta^{b_1}|_p \otimes \dots \otimes \theta^{b_m}|_p. \quad (4.33)$$

Definition 92. Menge der glatten Tensorfelder vom Typ T_m^ℓ über $U \subseteq M$ wird mit $ST_m^\ell(U)$ bezeichnet. Die Werte $\ell = 1, m = 0$ und $\ell = 0, m = 1$ entsprechen Vektor-, bzw. Kovektorfeldern.

Ein Tensorfeld $T \in ST_M^\ell(M)$ habe bezüglich dualer Basisfelder $\{e_a\}_{a=1\dots n}$ und $\{\theta^a\}_{a=1\dots n}$ die Darstellung (4.25)

$$T = T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_\ell} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_m} \quad (4.34)$$

Bemerkung 93. In (4.34) und im Folgenden verwenden wir die Summenkonvention, gemäß der über doppelt auftretende Indizes automatisch (d.h. ohne explizites Summenzeichen Σ) über ihren Wertebereich zu summieren ist. Diese Konvention tritt außer Kraft wenn eine Summenzeichen Σ explizit erscheint, wie z.B. in (4.15) oder (4.25), wo ein Weglassen des Summenzeichens sinnlos wäre, weil man zwar über b aber nicht über β summieren möchte, aber beide doppelt auftreten.

Ist $\{e'_a\}_{a=1\dots n}$ und $\{\theta'^a\}_{a=1\dots n}$ ein anderes Paar dualer Basisfelder, dann existiert eine glatte $n \times n$ -Matrix wertige, an jedem Punkt invertierbare Funktion f mit Komponenten $f_b^a \in C^\infty(M)$, so dass

$$e'_a = f_b^a e_b, \quad (4.35a)$$

$$\theta'^a = [f^{-1}]_b^a \theta^b. \quad (4.35b)$$

Dabei bezeichnet f^{-1} die Funktion, deren Funktionswert an der Stelle p die inverse Matrix zu $f(p)$ ist und $[f^{-1}]_b^a$ ihre Komponenten. Werden die Komponenten von T bezüglich der gestrichenen Basen ebenfalls mit einem Strich gekennzeichnet, so gilt (die Klammern auf der rechten Seite dienen nur der besseren Lesbarkeit)

$$T'_{b_1 \dots b_m}{}^{a_1 \dots a_\ell} = ([f^{-1}]_{c_1}^{a_1} \dots [f^{-1}]_{c_\ell}^{a_\ell}) T_{d_1 \dots d_m}{}^{c_1 \dots c_\ell} (f_{b_1}^{d_1} \dots f_{b_m}^{d_m}). \quad (4.36)$$

In dem Spezialfall, in dem die Basisfelder e_a von Koordinaten zu Kartenabbildungen $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\phi' : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ herrühren, also gilt $e_a = \partial/\partial x^a$ und $e'_b = \partial/\partial x'^b$, ist klarerweise

$$f_b^a = \frac{\partial x^a}{\partial x'^b}. \quad (4.37)$$

Also ist f die Matrix-wertige Funktion in U , die an jedem Punkt als Wert die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels $\phi \circ \phi'^{-1}$ besitzt, oder, was dasselbe ausdrückt, die inverse Jacobi-Matrix des Kartenwechsels $\phi' \circ \phi^{-1}$.

Zuletzt müssen wir auf eine sehr wichtige charakterisierende Eigenschaft von Tensorfeldern eingehen. Oftmals sind nämlich nicht Tensorfelder direkt gegeben, sondern Funktionen, die einem n -Tupel von *global* auf M definierten Vektorfeldern wieder ein *globales* Tensorfeld in $ST_m^\ell(M)$ zuordnen. Die Frage ist dann, unter welchen Umständen eine solche Zuordnung einem Tensorfeld in $ST_{n+m}^\ell(M)$ entspricht. Eine notwendige Bedingung ist sofort klar: Die Zuordnung $(X_1, \dots, X_n) \mapsto T \in ST_m^\ell(M)$ muss in jedem der n Argumente $C^\infty(M)$ -linear sein, denn das ist bei einem Tensorfeld in $ST_{n+m}^\ell(M)$ auch der Fall, das ja an jedem Punkt $p \in M$ eine n -fach multilineare Abbildung des n -fach Kartesischen Produktes des Tangentialraumes $T_p(M)$ nach $T_{p_m}^\ell(M)$ vermittelt. Der Punkt ist nun, dass diese notwendige Bedingung auch hinreicht. Dies diskutieren wir zunächst für den Fall $\ell = m = 0$ und $n = 1$.

Sei also θ ein glattes globales Kovektorfeld auf M . Dann definiert es eine Abbildung $\bar{\theta} : ST(M) \rightarrow C^\infty(M)$, die jedem glatten globalen Vektorfeld X auf M eine glatte Funktion $\bar{\theta}(X)$ zuordnet, deren Wert an der Stelle p einfach durch $\bar{\theta}(X)(p) := \theta_p(X_p)$ gegeben ist. Diese Funktion ist natürlich insofern speziell, als ihr Wert an jedem Punkt $p \in M$ nur von den Werten der Felder θ und X in p abhängt. Daraus folgt, dass $\bar{\theta}$ nicht nur \mathbb{R} -linear sondern sogar $C^\infty(M)$ -linear ist:

$$\bar{\theta}(f \cdot X) = f \bar{\theta}(X) \quad (4.38)$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ und alle $X \in ST(M)$.

Davon gilt nun auch die Umkehrung:

Proposition 94. *Gegeben eine Funktion $\bar{\theta}$, die jedem glatten globalen Vektorfeld X eine Funktion $\bar{\theta}(X) \in C^\infty(M)$ zuordnet. Diese Funktion sei \mathbb{R} -linear, d.h. $\bar{\theta}(X +$*

$Y) = \bar{\theta}(X) + \bar{\theta}(Y)$ und $\bar{\theta}(cX) = c\bar{\theta}(X)$ für alle globalen glatten Vektorfelder X, Y und alle $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein glattes globales Kovektorfeld $\bar{\theta}$, so dass $\bar{\theta}(X)(p) = \theta_p(X_p)$, genau dann, wenn $\bar{\theta}$ auch $C^\infty(M)$ -linear ist.

Beweis. Die Notwendigkeit der $C^\infty(M)$ -Linearität wurde schon diskutiert und ist klar. Dass diese Bedingung hinreichend wäre ebenfalls sofort klar, wenn M eine globale Karte zuließe, oder etwas allgemeiner, wenn ein globales Basisfeld existierte. Denn dann gälte global $X = X^\alpha e_\alpha$ mit $X^\alpha \in C^\infty(M)$, und deshalb wegen $C^\infty(M)$ -Linearität $\bar{\theta}(X)(p) = X^\alpha(p)\bar{\theta}(e_\alpha)(p)$. Das globale Kovektorfeld ist dann $\bar{\theta} = \bar{\theta}(e_\alpha)\theta^\alpha$, wobei $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ dual zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist. Es ist unabhängig von der Wahl der gewählten Basis. Im Allgemeinen existieren aber weder globale Karten noch – was eine etwas schwächere Bedingung darstellt – globale Basisfelder. In diesem Fall schließt man wie folgt: Sei (U, ϕ) Karte mit $p \in U$ und $f \in C^\infty(M)$ mit Träger in U und $f(p) = 1$. Stimmen die globalen Vektorfelder X und Y in U überein, d.h. gilt $X|_U = Y|_U$, dann gilt global $f \cdot X = f \cdot Y$ und daher auch $\bar{\theta}(f \cdot X) = \bar{\theta}(f \cdot Y)$. Wegen der C^∞ -Linearität und $f(p) = 1$ bekommt man daraus sofort $\bar{\theta}(X)(p) = \bar{\theta}(Y)(p)$. Also hängt der Wert $\bar{\theta}(X)(p)$ nur ab vom Verhalten von X in einer – beliebig kleinen! – Umgebung U von p . Dann können wir bei der Berechnung von $\bar{\theta}(X)(p)$ aber X durch $Y = f^2 X$ ersetzen, wo f gemäß Korollar 77 eine glatte Funktion ist, deren Träger in U enthalten ist und die auf einer offenen Untermenge $V \subset U$ die Einsfunktion ist. Ist $X|_U = X^\alpha \partial/\partial x^\alpha$, wobei die Funktionen X^α und Vektorfelder $\partial/\partial x^\alpha$ in U definiert sind, dann ist $Y = f^2 X = (f \cdot X^\alpha)(f \cdot \partial/\partial x^\alpha)$. Der Punkt ist nun, dass wir $f \cdot X^\alpha$ und $f \cdot \partial/\partial x^\alpha$ als global definierte glatte Funktionen und global definierte glatte Vektorfelder auffassen können, indem wir sie außerhalb U durch die Nullfunktionen und Null-Vektorfelder fortsetzen. Dann dürfen wir $\bar{\theta}$ auf Y anwenden und erhalten nach Auswertung an p

$$\bar{\theta}(Y)(p) = X^\alpha(p)\bar{\theta}(f \cdot \partial/\partial x^\alpha)(p). \quad (4.39)$$

Somit sehen wir: haben zwei Vektorfelder X_1 und X_2 die gleichen Koeffizienten $X_1^\alpha(p)$ und $X_2^\alpha(p)$ bezüglich der Entwicklung ihrer Werte $X_1(p)$ und $X_2(p)$ nach der Basis $\partial/\partial x^\alpha|_p$ von $T_p(M)$, mit anderen Worten, gilt $X_1(p) = X_2(p)$, dann stimmen auch die Werte $\bar{\theta}(X_1)(p)$ und $\bar{\theta}(X_2)(p)$ überein. \square

Genauso beweist man nun das folgende

Proposition 95. Gegeben eine Funktion $\bar{\theta}$, die jedem n -Tupel von glatten globalen Vektorfeldern (X^1, \dots, X^n) ein Feld $\bar{\theta}(X^1, \dots, X^n) \in ST_m^\ell(M)$ zuordnet. Diese Funktion sei \mathbb{R} -multilinear, d.h. in jedem der n Argumente \mathbb{R} -linear (s.o.). Dann existiert ein $\theta \in ST_{m+n}^\ell(M)$, so dass $\bar{\theta}(X^1, \dots, X^n)(p) = \theta_p(X_p^1, \dots, X_p^n)$, genau dann, wenn $\bar{\theta}$ in jedem der n Argumente $C^\infty(M)$ -linear ist.

Wir werden unten Gelegenheit zur wichtigen Anwendung haben, wenn wir die Tensorfelder der *Torsion* und *Krümmung* definieren.

4.4 Differenzierbare Abbildungen

Definition 96. Seien M und M' differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimensionen n bzw. n' . Die Atlanten $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ und $\{(U'_\alpha, \phi'_\alpha) \mid \alpha \in I'\}$ repräsentieren die C^l - und $C^{l'}$ Strukturen von M bzw. M' , wobei $\ell := \min\{l, l'\} \geq 1$. Eine Abbildung $F : M \rightarrow M'$ heißt *differenzierbar* von der Klasse C^k , mit $k \leq \ell$, wenn für alle Karten die Funktionen

$$F_{\alpha\beta} := \phi'_\alpha \circ F \circ \phi_\beta^{-1}, \quad \mathbb{R}^n \supseteq \phi_\beta(U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^{n'} \quad (4.40)$$

im gewöhnlichen Sinne k mal stetig differenzierbar sind, für alle Paare $(\alpha, \beta) \in I' \times I$ für die $f(U_\beta) \cap U'_\alpha \neq \emptyset$. Die Menge solcher Abbildungen wird mit $C^k(M, M')$ bezeichnet. Ist $n = k = \infty$ so spricht man auch oft von *glatten* Abbildungen. Wieder ist zu beachten, dass diese Definition unabhängig von den Atlanten ist, die die C^l -Struktur auf M und die $C^{l'}$ -Struktur auf M' repräsentieren. Ist $F \in C^k(M, M')$ eine Bijektion, so dass $F^{-1} \in C^k(M', M)$, dann nennt man F einen C^k -*Diffeomorphismus*, bzw. einen *glatten Diffeomorphismus* falls $k = \infty$.

Die glatten Abbildungen $F \in C^\infty(M, M')$ definieren Algebren-Homomorphismen

$$F^* : C^\infty(M') \rightarrow C^\infty(M), \quad f \mapsto F^*f := f \circ F. \quad (4.41)$$

Die Homomorphie-Eigenschaft folgt einfach aus $(f + g) \circ F = f \circ F + g \circ F$ und $(f \cdot g) \circ F = (f \circ F) \cdot (g \circ F)$. Damit definiert jedes F aber auch lineare Abbildungen auf den punktalen Derivationen dieser Algebren. Ist nämlich $p \in M$ und $F(p) = p' \in M'$, so sind diese gegeben durch

$$F_{*p} : T_p(M) \rightarrow T_{p'}(M'), \quad F_{*p}X_p := X_p \circ F^*, \quad (4.42a)$$

das heißt, dass für jedes $f \in C^\infty(M')$ gilt:

$$F_{*p}X_p(f) = X_p(F^*(f)) = X_p(f \circ F). \quad (4.42b)$$

Man beachte, dass wir sowohl in (4.41) das Argument von F^* als auch in (4.42) das Argument von F_{*p} absichtlich nicht in Klammern gesetzt haben um die Notation nicht zu überfrachten. In konkreten Fällen wird meist klar sein, welche der rechts von F^* bzw. F_{*p} stehenden Symbolketten das Argument bildet. Nur wenn Zweideutigkeiten zu befürchten sind sollten Klammern gesetzt werden, wobei dann die erste auf F^* bzw. F_{*p} folgende Klammer das Argument enthält.

Sei nun p im Gebiet der Karte (U_β, ϕ_β) von M und $p' = F(p)$ im Gebiet der Karte $(U'_\alpha, \phi'_\alpha)$ von M' , so können wir F_{*p} auf $\partial/\partial x_\beta^b|_p$ anwenden und das Ergebnis nach den Basisvektoren $\partial/\partial x'_\alpha^a|_{p'}$ entwickeln. Dabei sind die Entwicklungskoeffizienten die Spalten der Jacobi-Matrix der Abbildung $F_{\alpha\beta}$, wie man wie folgt sieht (in der folgenden Gleichung ist die Summenkonvention außer Kraft gesetzt):

$$\begin{aligned}
F_{*p} \frac{\partial}{\partial x_\beta^b} \Big|_p (f) &= \frac{\partial}{\partial x_\beta^b} \Big|_p (f \circ F) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ F) \circ \phi_\beta^{-1}(\phi_\beta(p) + t e_b) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \phi'_\alpha^{-1}) \circ F_{\alpha\beta}(\phi_\beta(p) + t e_b) \\
&= D(f \circ \phi'_\alpha^{-1})_{\phi'_\alpha(p')} \circ (DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)}(e_b) \\
&= \sum_{a=1}^{n'} [(DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)}]_b^a D(f \circ \phi'_\alpha^{-1})_{\phi'_\alpha(p')}(e'_a) \\
&= \sum_{a=1}^{n'} [(DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)}]_b^a \frac{\partial}{\partial x'_\alpha^a} \Big|_{p'} f.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Da dies für alle Funktionen f gelten muss, haben wir allgemein

$$F_{*p} \frac{\partial}{\partial x_\beta^b} \Big|_p = \sum_{a=1}^{n'} [(DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)}]_b^a \frac{\partial}{\partial x'_\alpha^a} \Big|_{p'}. \tag{4.44}$$

Dabei bezeichnet $(DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n'})$ die Ableitung von $F_{\alpha\beta}$ (vgl. (4.40), deren Matrixdarstellung bezüglich der Basen $\{e_b\}_{b=1 \dots n}$ von \mathbb{R}^n und $\{e'_a\}_{a=1 \dots n'}$ von $\mathbb{R}^{n'}$ durch $e_b \mapsto J_b^a e'_a$ gegeben ist, wobei $J_b^a := [(DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)}]_b^a$ die Jacobi-Matrix ist.

Für jede lineare Abbildungen $L : V \rightarrow V'$ zwischen Vektorräumen V und V' existiert eine umgekehrt verlaufende lineare Abbildung der Dualräume $L^* : W^* \rightarrow V^*$, definiert durch $L^*(\alpha) := \alpha \circ L$; man nennt L^* die zu L *duale* Abbildung. Entsprechend ist die zu (4.42) duale Abbildung gegeben durch

$$F_p^* : T_{p'}^*(M') \rightarrow T_p^*(M), \quad F_p^* \theta_{p'} := \theta_{p'} \circ F_{*p}. \tag{4.45}$$

Bezüglich der zu $\{\partial/\partial x_\beta^b\}$ und $\{\partial/\partial x'_\alpha^a\}$ dualen Basenfelder $\{dx_\beta^b\}$ und $\{dx'_\alpha^a\}$ hat man dann das transponierte Verhalten zu (4.44)

$$F_p^* dx'_\alpha^a|_{p'} = \sum_{b=1}^n [(DF_{\alpha\beta})_{\phi_\beta(p)}]_b^a dx_\beta^b|_p \tag{4.46}$$

Ist die Abbildung $F : M \rightarrow M'$ injektiv und $X \in ST(M)$ ein Vektorfeld auf M , so ist durch die punktweise Abbildung $X_p \mapsto F_{*p}X_p$ an jedem Punkt p' des Bildes von M in M' ein Vektor definiert, der ein Vektorfeld über $\text{Bild}(F) \subseteq M'$ definiert. Wir wollen uns nun auf den Fall beschränken, wo M und M' von gleicher Dimension sind ($n = n'$) und außerdem F_{*p} für alle $p \in M$ nicht ausgeartet (d.h. vom Rang n) ist. In diesem Fall sind alle F_{*p} und F_p^* Isomorphismen und wir erhalten für jede Abbildung $F \in C^\infty(M, M')$ und jedes Vektorfeld $X \in ST(M)$ ein Vektorfeld $F_*X \in ST(M')$ durch die Vorschrift

$$M' \supset p' \mapsto (F_*X)_{p'} := F_{*p}X_p, \quad \text{für } p' = F(p) \quad (4.47)$$

Ist $f' \in C^\infty(M')$ so kann man das Vektorfeld F_*X auf f' anwenden und erhält wieder ein Element in $C^\infty(M')$, das man mit Hilfe der Abbildung F^* aus (4.41) zu einer Funktion in $C^\infty(M)$ zurückziehen kann. Diese ist gegeben durch $M \ni p \mapsto (F_*X)_{F(p)}(f')$, was wegen (4.47) gleich ist $F_{*p}X_p(f') = X_p(f' \circ F)$, so dass allgemein gilt

$$F^*(F_*X(f')) = F_*X(f') \circ F = X(f' \circ F). \quad (4.48)$$

Haben wir nun zwei Vektorfelder X und Y in $ST(M)$, so können wir beide mit F_* nach $ST(M')$ abbilden, nacheinander auf $f' \in C^\infty(M')$ anwenden und das Ergebnis mit F^* nach $C^\infty(M)$ zurückziehen. Zweimalige Anwendung von (4.48) ergibt

$$F_*X(F_*Y(f')) \circ F = X(F_*Y(f') \circ F) = X(Y(f' \circ F)) \quad (4.49)$$

Man wäre nun geneigt, die rechte Seite als $XY(f' \circ F) = F_*(XY) \circ F$ zu schreiben, was aber nicht definiert ist, da Vektorfelder keine Algebra bilden und somit XY kein Vektorfeld ist, so dass auch die Anwendung von F_* darauf nicht definiert ist. Wie wir aber in Abschnitt 4.3 gesehen haben, bilden Vektorfelder eine Lie-Algebra. Also können die in X und Y antisymmetrische Kombination von (4.49) bilden und schreiben

$$[F_*X, F_*Y](f') \circ F = [X, Y](f' \circ F) = F_*[X, Y](f') \circ F, \quad (4.50)$$

wobei wir in letzten Schritt (4.48) anwenden konnten, da $[X, Y]$ ein Vektorfeld ist. Also gilt allgemein:

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]. \quad (4.51)$$

4.5 Die äußere Ableitung

Unter den Tensorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit nehmen solche, die an jedem Punkt $p \in M$ Werte im antisymmetrischen Tensorprodukt $\bigwedge^l(T_p^*(M))$ annehmen,

eine besondere Stellung ein; sie heißen ℓ -Formen und werden auch einfach mit $S\wedge^\ell(M)$ (statt $S\wedge^\ell(T^*(M))$) bezeichnet.

Definition 97. Die *äußere Ableitung* besteht in einer zu jedem $\ell \in \mathbb{N}$ gehörigen Abbildung

$$d : S\wedge^\ell(M) \rightarrow S\wedge^{\ell+1}(M), \quad (4.52a)$$

die für alle $f \in C^\infty(M)$, $X \in ST(M)$, $\alpha, \alpha' \in S\wedge^\ell(M)$ und $\beta \in S\wedge^m(M)$ ($\ell, m \in \mathbb{N}$) folgenden Bedingungen genügt:

$$df(X) = X(f), \quad (4.52b)$$

$$d(df) = 0, \quad (4.52c)$$

$$d(\alpha + \alpha') = d\alpha + d\alpha', \quad (4.52d)$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^\ell \alpha \wedge d\beta. \quad (4.52e)$$

Proposition 98. *Es existiert genau eine den Bedingungen (4.52) genügende Abbildung.*

Der Beweis dieser Proposition wird sich aus den nachstehenden Betrachtungen ergeben. Zunächst folgern wir aus der Definition folgendes

Korollar 99. *Der Wert von $d\alpha$ an der Stelle $p \in M$ hängt von α nur durch dessen Einschränkung $\alpha|_U$ auf eine beliebig kleinen Umgebung U von p ab.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $d\alpha(p) = d\beta(p)$ wenn α und β in einer offenen Umgebung U von p übereinstimmen. Wegen der Linearität (4.52d) ist $d\alpha(p) = d\beta(p)$ genau dann, wenn $d(\alpha - \beta)(p) = 0$. Also reicht es aus, zu zeigen, dass $d\alpha(p) = 0$ falls α in einer offenen Umgebung U von p verschwindet. Wir nehmen also an, dass $\alpha|_U = 0$. Nach Korollar 77 existiert $g \in C^\infty(M)$ mit Träger in U , so dass g die Einsfunktion auf einer kleineren offenen Umgebung $V \subset U$ von p ist. Dann ist $f := 1 - g$ eine glatte Funktion, die auf dem Komplement von U die Einsfunktion ist und in V die Nullfunktion. Da der Träger von α im Komplement von U liegt, gilt $\alpha = f \cdot \alpha$ und somit wegen (4.52e), dass $d(f \cdot \alpha)(p) = df(p) \wedge \alpha(p) + f(p) \cdot d\alpha(p) = 0$, wegen $\alpha(p) = 0$ und $f(p) = 0$. \square

Für 0-Formen (Funktionen) folgt aus (4.52b) und Proposition 81 sofort der lokale Ausdruck für das Differential der Einschränkung $f|_U$ in lokalen Koordinaten:

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a. \quad (4.53)$$

Für ein allgemeines $\alpha \in S\bigwedge^\ell(M)$ hat man bezüglich der Karte (U, ϕ) den lokalen Ausdruck für die Einschränkung $\alpha|_U$

$$\alpha|_U = \frac{1}{\ell!} \alpha_{a_1 \dots a_\ell} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_\ell} =: \frac{1}{\ell!} \alpha_I dx^I, \quad (4.54)$$

wobei wir abkürzend die Multi-Index Schreibweise $dx^I := dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_\ell}$ und $\alpha_I := \alpha_{a_1 \dots a_\ell}$ eingeführt haben. Nach (4.52c) und (4.52e) gilt $ddx^I = 0$, so dass man wegen (4.53) bekommt

$$d\alpha|_U = \frac{1}{\ell!} d\alpha_I \wedge dx^I = \frac{1}{\ell!} \partial_{a_0} \alpha_{a_1 \dots a_\ell} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_\ell}, \quad (4.55)$$

wobei wir abkürzend $\partial_{a_0} := \partial/\partial x^{a_0}$ geschrieben haben. Insbesondere folgt unter Verwendung der Antisymmetrisierungsklammer (7.14b), dass

$$(d\alpha_U)_{a_0 \dots a_\ell} = (\ell + 1) \partial_{[a_0} \alpha_{a_1 \dots a_\ell]}. \quad (4.56)$$

Somit ist der Ausdruck von $d\alpha|_U$ in lokalen Koordinaten eindeutig durch (4.52) bestimmt. Damit wäre wegen Korollar 99 auch $d\alpha$ eindeutig bestimmt, sofern $d\alpha$ überhaupt existiert. Tatsächlich haben wir ja noch kein Beweis von Proposition 98, denn es wurde ja bisher nicht gezeigt, dass $d\alpha \in S\bigwedge^{\ell+1}(M)$. Somit ist die Existenz der Abbildung d bisher nicht gesichert. Dies kann man z.B. durch den Nachweis zeigen, dass sich die Komponenten $(d\alpha_U)_{a_0 \dots a_\ell}$ gemäß dem Transformationsverhalten (4.36) und (4.37) eines Tensors transformieren. Dies sieht man in der Tat fast ohne Rechnung ein, da die einzigen von diesem Verhalten potentiell abweichenden Terme genau diejenigen sind, in denen die Differentiation $\partial_{a_0} = (\partial x^{b_0}/\partial x^{a_0}) \partial/\partial x^{b_0}$ in Ausdruck für $(d\alpha_U)_{a_0 \dots a_\ell}$ auf der rechten Seite von (4.56) auf die Transformationsmatrizen $\partial x^{a_i}/\partial x^{b_i}$ wirken und jeweils einen Term proportional zu $\partial^2 x^{a_i}/\partial x^{b_0} \partial x^{b_i}$ erzeugen. Wegen der anschließenden Antisymmetrisierung im Indexpaar (b_0, b_i) durch die Multiplikation mit $dx^{b_0} \wedge \dots \wedge dx^{b_i} \wedge \dots \wedge dx^{b_\ell}$ verschwinden diese „potentiell gefährlichen“ Terme jedoch sämtlich (wegen der Symmetrie der 2. partiellen Ableitungen). Aus dieser Betrachtung wird auch sofort klar, dass die vollständige Antisymmetrie wesentlich ist und eine analoge Vorschrift etwa für vollständig symmetrische Tensoren nicht zu einer Abbildung zwischen Tensorfeldern führen würde.

Ein vom geometrischen Standpunkt befriedigenderer Beweis von Proposition 98 wird sich unmittelbar aus folgender Proposition ergeben, die auch für die weiteren Anwendungen sehr nützlich ist.

Proposition 100. *Sei $\alpha \in S\bigwedge^\ell(M)$; dann ist $d\alpha = 0$ falls $\ell = n = \dim(M)$ und*

für $\ell < n$

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_\ell) &= \sum_{0 \leq i \leq \ell} (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_\ell)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq \ell} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Dabei sind die mit einem Hut gekennzeichneten Argumente stets wegzulassen.

Beweis. Der Beweis ist etwas mühsam, aber nicht schwierig. Wir beginnen im ersten Teil des Beweises mit dem Nachweis, dass die rechte Seite von (4.57) in allen $\ell + 1$ Argumenten $X_0, \dots, X_\ell \in C^\infty(M)$ -linear ist. Im zweiten Teil beweisen wir die vollständige Antisymmetrie der rechten Seite von (4.57). Aus diesen beiden Teilen folgt dann gemäß Proposition 95, dass $d\alpha \in S\Lambda^{\ell+1}(M)$. Im dritten und letzten Teil müssen wir dann nur noch nachweisen, dass in lokalen Koordinaten die Einschränkung der rechten Seite von (4.57) auf das Kartengebiet U identisch ist zu (4.55). Zusammen ergibt dies dann auch einen Beweis für Proposition 98.

Erster Teil: Ersetzt man für ein $0 \leq k \leq \ell$ das X_k durch $f \cdot X_k$, wobei $f \in C^\infty(M)$, dann ergeben sich in der ersten Summe auf der rechten Seite von (4.57) folgende zusätzliche Ableitungsterme in f :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ i \neq k}} (-1)^i X_i(f) \alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_\ell). \quad (4.58)$$

In der zweiten Summe auf der rechten Seite von (4.57) ergeben sich ebenfalls zusätzliche Ableitungsterme in f , nämlich genau dann, wenn in der Lie Klammer im ersten Argument von α entweder $X_i = X_k$ (erster Fall) oder $X_j = X_k$ (zweiter Fall). Im ersten Fall verbleibt die Summation über $k < j \leq \ell$, im zweiten Fall die Summation über $0 \leq i < k$. Wegen (4.30) sind die daraus zusammen entstehenden Ableitungsterme in f aus der zweiten Summe gegeben durch

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq i < k} (-1)^{i+k} X_i(f) \alpha(X_k, X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_\ell) \\ &- \sum_{k < j \leq \ell} (-1)^{j+k} X_j(f) \alpha(X_k, X_0, \dots, \hat{X}_k, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ i \neq k}} (-1)^{i-1} X_i(f) \alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_\ell). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dabei haben wir im letzten Schritt das X_k in der ersten Summe durch $(k-1)$ -faches Transponieren, in der zweiten Summe durch k -faches Transponieren mit dem nächsten rechten Nachbarn an die Stelle des ausgelassenen \hat{X}_k gebracht, was im ersten Fall einen Faktor $(-1)^{k-1}$, im zweiten Fall einen Faktor $(-1)^k$ einbringt. Die Anteile (4.58) und (4.59) kompensieren sich offensichtlich, womit die $C^\infty(M)$ -Linearität nachgewiesen ist.

Zweiter Teil: Die vollständige Antisymmetrie des durch die rechte Seite von (4.57) definierten Tensors $d\alpha$ ist äquivalent der Aussage, dass $d\alpha(X_0, \dots, X_\ell) = 0$ wenn zwei der ℓ Einträge gleich sind. Ist also $0 \leq k < k' \leq \ell$ und $X_k = X_{k'}$, dann verschwinden wegen der Antisymmetrie von α zunächst alle Terme der ersten Summe in (4.57) außer zwei:

$$(-1)^k X_k(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_\ell)) + (-1)^{k'} X_{k'}(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_{k'}, \dots, X_\ell)). \quad (4.60)$$

Diese Summe verschwindet aber, da das ℓ -Tupel der Argumente von α im ersten Summanden in das des zweiten Summanden durch Verrücken des Eintrags X_k um $k' - k - 1$ Stellen nach rechts übergeht. Dies bringt einen zusätzlichen Faktor $(-1)^{k'-k-1}$, der zusammen mit $(-1)^k$ gerade $-(-1)^{k'}$ ergibt. In der zweiten Summe verschwindet der Term $(X_i, X_j) = (X_k, X_{k'})$ (wegen $X_k = X_{k'}$ ist $[X_k, X_{k'}] = 0$) sowie alle Terme mit $(X_i, X_j) \neq (X_k, X_{k'})$ (wegen der Antisymmetrie von α). Es bleiben daher nur Terme übrig, für die

- 1) $i = k$ und $k < j < \ell$ mit $j \neq k'$, oder
- 2) $j = k$ und $1 \leq i < k$, oder
- 3) $i = k'$ und $k' < j \leq \ell$, oder
- 4) $j = k'$ und $1 \leq i < k'$ mit $i \neq k$.

Dabei wird es sich als zweckmäßig erweisen, den ersten und letzten dieser vier Fälle noch jeweils in zwei Unterfälle zu unterteilen, je nachdem ob im ersten Fall $j < k'$ oder $j > k'$ und im zweiten Fall $i < k$ oder $i > k$. Danach resultieren die sechs

Summen

$$\sum_{k < j < k'} (-1)^{k+j} \alpha([X_k, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_k, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell) \quad (4.61a)$$

$$+ \sum_{k' < j \leq \ell} (-1)^{k'+j} \alpha([X_k, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_k, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell) \quad (4.61b)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < k} (-1)^{k+i} \alpha([X_i, X_k], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_\ell) \quad (4.61c)$$

$$+ \sum_{k' < j \leq \ell} (-1)^{k'+j} \alpha([X_{k'}, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_{k'}, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell) \quad (4.61d)$$

$$+ \sum_{k < i < k'} (-1)^{k'+i} \alpha([X_i, X_{k'}], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_{k'}, \dots, X_\ell) \quad (4.61e)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < k} (-1)^{k'+i} \alpha([X_i, X_{k'}], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_{k'}, \dots, X_\ell) \quad (4.61f)$$

In dieser heben sich nun paarweise die erste und fünfte, zweite und vierte, sowie die dritte und letzte Summe gegenseitig auf. Dies sieht man wie folgt: Zuerst benennt man den laufenden Index einheitlich, schreibt also etwa in (4.61e) j statt i . Der α -Term in (4.61e) geht dann in den α -Term von (4.61a) über indem man X_k zwischen $X_{k'-1}$ und $X_{k'+1}$ bringt. Dazu muss man X_k um $k' - k - 2$ Stellen nach rechts vorrücken lassen, denn zwischen X_k und $X_{k'+1}$ stehen wegen des fehlenden X_j (es ist ja $k < j < k'$) genau $k' - k - 2$ weitere X . Dieses Vorrücken bringt ein Vorzeichen $(-1)^{k'-k}$ ein. Zusammen mit der Ersetzung des Kommutators $[X_i, X_{k'}] = -[X_{k'}, X_i] = -[X_k, X_i]$ folgt, dass sich (4.61a) und (4.61e) gegenseitig aufheben. Noch einfacher ist die Lage bei den beiden anderen Paaren, denn der α -Term von (4.61d) geht in den von (4.61b) ebenfalls durch Vorrücken von X_k in die Position zwischen $X_{k'-1}$ und $X_{k'+1}$ über, ohne dass dazwischen ein X ausgelassen wäre (denn die Auslassung von X_j betrifft wegen $j > k'$ eine Position rechts von $X_{k'}$), also um $k' - k - 1$ Positionen. Also resultiert ein Vorzeichen $-(-1)^{k'-k}$, das (4.61d) in das Negative von (4.61b) transformiert. Genauso geht man bei (4.61f) vor um es in das Negative von (4.61c) umzuformen (denn hier betrifft die Auslassung von X_i wegen $i < k$ eine Position links von X_k). Somit ist $d\alpha$ als vollständig antisymmetrisch erwiesen.

Dritter Teil: Setzt man im Kartengebiet U für $X_i = \partial/\partial x^i$, dann verschwinden alle Kommutatoren und damit der zweite Term in (4.57). Wegen (7.8b) ist $d\alpha_U(X_{a_0}, \dots, X_{a_\ell}) = \frac{1}{(\ell+1)!} (d\alpha_U)_{a_0 \dots a_\ell}$ und $\alpha(X_{a_0}, \dots, \hat{X}_{a_i}, \dots, X_{a_\ell}) = \frac{1}{\ell!} \alpha_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_\ell}$, so dass die Anwendung von (4.57) auf das $(\ell + 1)$ -Tupel der kom-

mutierenden Vektoren $X_{a_i} = \partial/\partial x^{a_i}$ mit $0 \leq i \leq \ell$ ergibt:

$$\begin{aligned} (d\alpha_U)_{a_0 \dots a_\ell} &= (\ell + 1) \sum_{1 \leq i \leq \ell} (-1)^i \partial_{a_i} (\alpha_U)_{a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_\ell} \\ &= (\ell + 1) \partial_{[a_0} (\alpha_U)_{a_1 \dots a_\ell]} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die rechte Seite stimmt aber gerade mit der von (4.56) überein, womit der gewünschte Beweis erbracht ist. \square

Korollar 101. Für $F \in C^\infty(M, M')$ und $\alpha \in S\Lambda^\ell(M')$ gilt

$$F^* d\alpha = dF^* \alpha. \quad (4.63)$$

Beweis. Dies ist wegen (4.51) unmittelbar klar für den zweiten Term der rechten Seite von (4.57). Für den ersten Term hat man

$$(F_* X_i)(\alpha(F_* X_0, \dots, \widehat{F_* X_i}, \dots, X_\ell)) = X_i(\alpha(F_* X_0, \dots, \widehat{F_* X_i}, \dots, X_\ell) \circ F) = X_i(F^* \alpha(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_\ell)). \quad \square$$

Korollar 102. Die zweifache Anwendung der äußeren Abbildung ist die Nullabbildung:

$$d^2 := d \circ d : S\Lambda^\ell(M) \rightarrow \{0\} \in \Lambda^{\ell+2}(M) \quad (4.64)$$

Beweis. Man beachte, dass in den Ausgangsaxiomen (4.52) diese Eigenschaft gemäß (4.52c) nur für $\ell = 0$ gefordert wurde. Wegen Korollar 99 reicht es aus, diese Eigenschaft für die Einschränkung von Formen Koordinatengebiete U nachzuweisen, in dem die Darstellung (4.54) gilt. Sei also $\alpha \in S\Lambda^\ell(M)$, dann ist

$$dd\alpha|_U = \frac{1}{\ell!} \partial_{a_0} \partial_{a_1} \alpha_{a_2 \dots a_{\ell+1}} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge dx^{a_2} \wedge \dots \wedge dx^{a_{\ell+1}}. \quad (4.65)$$

Da α ein glattes Feld ist vertauschen die partiellen Ableitungen (dafür reicht natürlich C^2), so dass $\partial_{a_0} \partial_{a_1} \alpha_{a_2 \dots a_{\ell+1}}$ im Indexpaar (a_0, a_1) symmetrisch ist, während $dx^{a_0} \wedge dx^{a_1}$ antisymmetrisch ist. Also verschwindet die Doppelsumme der rechten Seite von (4.65) über a_0 und a_1 . \square

Zum Schluss notieren wir noch zwei häufig gebrauchte Spezialfälle von (4.57), nämlich für Eins- und Zwei-Formen. Ist $\alpha \in S\Lambda^1(M)$, dann gilt

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \quad (4.66a)$$

Für $X = e_a$ und $Y = e_b$, mit $[e_a, e_b] = C_{ab}^c e_c$, wird daraus

$$(d\alpha)_{ab} = e_a(\alpha_b) - e_b(\alpha_a) - \alpha_c C_{ab}^c. \quad (4.66b)$$

Ist $\alpha \in S\wedge^2(M)$, dann gilt nach wenigen Umstellungen

$$\begin{aligned} d\alpha(X, Y, Z) &= X(\alpha(Y, Z)) + Y(\alpha(Z, X)) + Z(\alpha(X, Y)) \\ &\quad + \alpha(X, [Y, Z]) + \alpha(Y, [Z, X]) + \alpha(Z, [X, Y]). \end{aligned} \quad (4.67a)$$

Für $X = e_a$, $Y = e_b$ und $Z = e_c$ wird daraus

$$\begin{aligned} (d\alpha)_{abc} &= e_a(\alpha_{bc}) + e_b(\alpha_{ca}) + e_c(\alpha_{ab}) \\ &\quad + \alpha_{an}C_{bc}^n + \alpha_{bn}C_{ca}^n + \alpha_{cn}C_{ab}^n. \end{aligned} \quad (4.67b)$$

Bezeichnen wir die Summe ueber die drei zyklischen Permutationen der a , b und c mit $\sum_{(abc)}$, so bekommt das die später nützliche Form

$$(d\alpha)_{abc} = \sum_{(abc)} \left\{ e_a(\alpha_{bc}) + \alpha_{an}C_{bc}^n \right\}, \quad (4.67c)$$

in der wir unter dem Summenzeichen in jedem Term unabhängig die Indizes abc in einer anderen, zyklisch permutierten Reihenfolge schreiben dürfen.

Für Koordinatenbasisfelder $e_a = \partial/\partial x^a$ fallen die Terme mit den Koeffizienten C_{ab}^c natürlich wieder weg.

4.6 Die Lie Ableitung

Die Lie Ableitung erlaubt, Tensorfelder beliebiger Stufe nach einem gegebenem Vektorfeld abzuleiten. Sind also $T \in ST_m^\ell(M)$ und $X \in ST_0^1(M)$ gegeben, so kann man nach der Lie Ableitung von T nach X fragen. Diese ist dann wieder ein Element in $ST_m^\ell(M)$ und wird mit $L_X T$ bezeichnet. Insgesamt hat man also eine Abbildung

$$\begin{aligned} L : ST_0^1(M) \times ST_m^\ell(M) &\rightarrow ST_m^\ell(M) \\ (X, T) &\mapsto L_X T. \end{aligned} \quad (4.68a)$$

Wir führen nun die Lie Ableitung zuerst axiomatisch ein, indem wir sie auf Funktionen und Vektorfeldern spezifizieren und dann mit geeigneten Regeln eindeutig auf alle Tensorfelder fortsetzen. Diese Prozedur werden wir auch später bei anderen Ableitungsbegriffen (z.B. der kovarianten Ableitung) anwenden. Sodann geben wir aber auch Ihre anschauliche geometrische Definition.

Definition 103. Die Lie-Ableitung ist eine Abbildung (4.68a) die für alle $f \in C^\infty(M) = ST_0^0(M)$, allen $X, Y \in ST_0^1(M)$ und allen $T \in ST_m^\ell(M)$, $T' \in$

$ST_m^{\ell'}(M)$ folgenden Regeln genügt:

$$L_X f = X(f), \quad (4.68b)$$

$$L_X Y = [X, Y], \quad (4.68c)$$

$$T \mapsto L_X T \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}, \quad (4.68d)$$

$$L_X(T \otimes T') = L_X T \otimes T' + T \otimes L_X T', \quad (4.68e)$$

$$C \circ L_X = L_X \circ C. \quad (4.68f)$$

Hier ist C die Kontraktionsabbildung zwischen Vektoren und Kovektoren (natürliche Paarung), d.h. $C(\alpha \otimes X) = i_X \alpha = \alpha(X)$.

Es ist klar, dass dadurch die Lie Ableitung auf Kovektorfeldern festgelegt ist, denn sei $\alpha \in ST_1^0(M)$, dann ist $L_X \alpha$ durch alle Kontraktionen $L_X \alpha(Y)$ mit $Y \in ST_0^1(M)$ festgelegt. Nach Obigem gilt aber

$$\begin{aligned} (L_X \alpha)(Y) &= C(Y \otimes L_X \alpha) \\ &\stackrel{(4.68e)}{=} C(L_X(Y \otimes \alpha) - L_X Y \otimes \alpha) \\ &\stackrel{(4.68f)}{=} L_X(\alpha(Y)) - \alpha(L_X Y) \\ &\stackrel{(4.68a, 4.68b)}{=} X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y]), \end{aligned} \quad (4.69)$$

so dass $(L_X \alpha)(X)$ eindeutig bestimmt ist. Damit sind gemäß (4.68e) aber auch alle Lie Ableitungen von Tensorprodukten festgelegt. Insbesondere ergibt sich für das Produkt einer Funktion f und eines Tensorfeldes T

$$L_X(f \cdot T) = X(f) \cdot T + f \cdot L_X T. \quad (4.70)$$

Im Unterschied zu den später zu besprechenden kovarianten Ableitungsoperationen ist die Lie Ableitung zwar \mathbb{R} -linear im Ableitungseintrag:

$$L_{X+cY} = L_X + cL_Y, \quad (4.71)$$

jedoch nicht $C^\infty(M)$ -linear. Zwar gilt für Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$, dass $L_{f \cdot X} g = (f \cdot X)(g) = f(X(g)) = fL_X g$, aber für Vektorfelder und Kovektorfelder folgt aus (4.68c) bzw. (4.69), dass

$$L_{f \cdot X} Y = f \cdot L_X Y - Y(f) \cdot X, \quad (4.72a)$$

$$L_{f \cdot X} \alpha = f \cdot L_X \alpha + \alpha(X) \cdot df. \quad (4.72b)$$

Das folgende Resultat zeigt, dass die Lie Ableitung $L_X T$ an einem Punkt p definiert ist wenn X und T bereits in einer (beliebig kleinen) Umgebung U von p definiert sind.

Proposition 104. *Der Wert der Lie Ableitung $L_X T$ an der Stelle $p \in M$ hängt von X und T nur durch die Einschränkungen $X|_U$ und $T|_U$ von X und T auf eine beliebig kleine Umgebung U von p ab.*

Beweis. Für den Beweis reicht es wegen der \mathbb{R} -Linearität aus, zu zeigen, dass $L_X T = 0$ wenn T oder X in einer Umgebung U von p verschwinden, denn es ist ja $L_X T = L_X T' \Leftrightarrow L_X(T - T') = 0$ und $L_X T = L_{X'} T \Leftrightarrow L_{X-X'} T = 0$. Sei also U eine Umgebung von p . Gemäß Korollar 77 existiert eine Funktion $g \in C^\infty(M)$ deren Träger in U enthalten ist und für die gilt $g|_V = E|_V$, wobei E die Einsfunktion und $V \subset U$ eine kleinere Umgebung von p ist. Dann ist $f := E - g$ die Einsfunktion im Komplement von U und verschwindet identisch in V . Verschwindet nun T in U , dann ist $T = f \cdot T$ und $L_X T = L_X(f \cdot T) = X(f) \cdot T + f \cdot L_X T$. Ausgewertet bei $p \in V \subset U$ verschwindet dies offensichtlich, da $f(p) = 0$ und $T(p) = 0$. Verschwindet hingegen X in U , so ist $X = f \cdot X$ und es gilt für Vektorfelder $L_X Y = L_{f \cdot X} Y = f \cdot L_X Y - Y(f) \cdot X$ und Kovektorfelder $L_X \alpha = L_{f \cdot X} \alpha = f \cdot L_X \alpha + \alpha(X)$ df. Ausgewertet bei p verschwinden wieder die rechten Seiten. Dies gilt dann auch für beliebige Tensorprodukte zwischen Vektor- und Kovektorfeldern. \square

Eine sehr nützliche Darstellung der Lie Ableitung von Formen ist durch die folgende Proposition gegeben:

Proposition 105. *Sei $\alpha \in S\wedge^\ell(M)$, $\ell \geq 1$, dann gilt*

$$L_X \alpha = (d \circ i_X + i_X \circ d) \alpha. \quad (4.73)$$

Dabei seien Funktionen wieder durch die Festsetzung $S\wedge^0(M) = C^\infty(M)$ eingeschlossen. Außerdem bezeichnet $i_X : S\wedge^\ell(M) \rightarrow S\wedge^{\ell-1}(M)$ die „Einsetzabbildung“ (oder „Kontraktionsabbildung“), die einfach Punktweise den Vektor $X(p)$ in das erste Argument der ℓ -Form α_p einsetzt. Per Definition annulliert diese Abbildung Funktionen, d.h. für $\alpha \in C^\infty(M)$ ist immer $i_X \alpha = 0$.

Beweis. Wir rechnen die rechte Seite von (4.73) unter Verwendung von (4.57) explizit nach und bekommen

$$\begin{aligned} d(i_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_\ell) &= \sum_{1 \leq i \leq \ell} (-1)^{i-1} X_i(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_\ell)) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq \ell} (-1)^{i+j} \alpha(X_0, [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell), \end{aligned} \quad (4.74)$$

sowie

$$\begin{aligned} (i_{X_0} d\alpha)(X_1, \dots, X_\ell) &= \sum_{0 \leq i \leq \ell} (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_\ell)) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq \ell} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Addiert man diese Ausdrücke, so hebt sich die erste Summe der rechten Seite von (4.74) gegen alle Summanden der ersten Summe der rechten Seite von (4.74) mit Ausnahme des einzelnen Summanden für $i = 0$ weg. Genauso hebt sich die zweite Summe der rechten Seite von (4.74) gegen alle Terme der zweiten Summe der rechten Seite von (4.74) mit Ausnahme der ℓ Terme für $i = 0$ weg. Somit ist

$$\begin{aligned} &((d \circ i_{X_0} + i_{X_0} \circ d)\alpha)(X_1, \dots, X_\ell) \\ &= X_0(\alpha(X_1, \dots, X_\ell)) + \sum_{1 \leq j \leq \ell} (-1)^j \alpha([X_0, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_\ell) \\ &= X_0(\alpha(X_1, \dots, X_\ell)) - \alpha([X_0, X_1], X_2, \dots, X_\ell) \\ &\quad - \alpha(X_1, [X_0, X_2], X_3, \dots, X_\ell) - \dots - \alpha(X_1, \dots, X_{\ell-1}, [X_0, X_\ell]) \\ &= (L_{X_0} \alpha)(X_1, \dots, X_\ell). \end{aligned} \quad (4.76)$$

□

Korollar 106. *Eingeschränkt auf Formen verschwindet der Kommutator der äußeren- und der Lie Ableitung. Es gilt also*

$$[d, L_X]\alpha := (d \circ L_X - L_X \circ d)\alpha = 0 \quad (4.77)$$

für alle $\alpha \in S\wedge^\ell(M)$, $\ell \geq 1$, und alle $X \in ST_0^1(M)$.

Beweis. Nach (4.73) und Korollar 102 (d.h. $d^2 = 0$) ist

$$d \circ L_X = d \circ i_X \circ d = L_X \circ d. \quad (4.78)$$

□

Proposition 107. *Für den Kommutator von Lie Ableitungen gilt*

$$[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}. \quad (4.79)$$

Beweis. Für die Lie Ableitung von Funktionen ist Gleichung (4.79) unmittelbar klar. Für Vektorfelder folgt sie aus (4.68c) und der Jacobi Identität (4.29c):

$$[L_X, L_Y]Z = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z] = L_{[X, Y]}Z. \quad (4.80)$$

Für Kovektorfelder folgt (4.79) aus (4.69):

$$\begin{aligned}
([\mathbb{L}_X, \mathbb{L}_Y]\alpha)(Z) &= (\mathbb{L}_X(\mathbb{L}_Y\alpha))(Z) - (X \leftrightarrow Y) \\
&= X(\mathbb{L}_Y\alpha(Z)) - (\mathbb{L}_Y\alpha)([X, Z]) - (X \leftrightarrow Y) \\
&= X \circ Y(\alpha(Z)) - \underbrace{X(\alpha([Y, Z])) - Y(\alpha([X, Z]))}_{\text{symmetrisch unter } X \leftrightarrow Y} + \alpha([Y, [X, Z]]) \\
&\quad - (X \leftrightarrow Y) \\
&= [X, Y](\alpha(Z)) + \alpha([Y, [X, Z]]) - \alpha([X, [Y, Z]]) \\
&= [X, Y](\alpha(Z)) - \alpha([X, Y], Z) \\
&= (\mathbb{L}_{[X, Y]}\alpha)(Z), \tag{4.81}
\end{aligned}$$

wobei von der drittletzten zur vorletzten Zeile wieder die Jacobi Identität (4.29c) benutzt wurde.

Der allgemeine Fall folgt nun aus (4.68e) und der Tatsache, dass jedes Tensorfeld höherer Stufe Tensorprodukt von Vektor- und Kovektorfeldern ist. Denn es gilt nach (4.68e)

$$\begin{aligned}
[\mathbb{L}_X, \mathbb{L}_Y](T \otimes T') &= (\mathbb{L}_X \circ \mathbb{L}_Y T) \otimes T' + T \otimes (\mathbb{L}_X \circ \mathbb{L}_Y T') \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{L}_X T \otimes \mathbb{L}_Y T' + \mathbb{L}_Y T \otimes \mathbb{L}_X T'}_{\text{symmetrisch unter } X \leftrightarrow Y} - (X \leftrightarrow Y) \\
&= \mathbb{L}_{[X, Y]} T \otimes T' + T \otimes \mathbb{L}_{[X, Y]} T' \\
&= \mathbb{L}_{[X, Y]}(T \otimes T'), \tag{4.82}
\end{aligned}$$

so dass (4.79) für ein Tensorprodukt gilt wann immer es für die Faktoren zutrifft. \square

Bevor wir uns der geometrischen Interpretation zuwenden, wollen wir noch die lokal gültigen Koordinatenausdrücke der Lie Ableitung verschaffen. Diese sind recht einfach, wenn wir Koordinatenbasen verwenden. Sei also (U, ϕ) eine Karte mit den dualen Basen $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n\}$ und $\{dx^1, \dots, dx^n\}$. Wir entwickeln die Einschränkungen von $T \in ST_m^\ell(M)$ und $X \in ST_0^1(M)$ nach diesen Basen:

$$T|_U = T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{a_\ell}} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_m}, \tag{4.83}$$

$$X|_U = X^c \frac{\partial}{\partial x^c}. \tag{4.84}$$

Es gilt:

$$L_X \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) \stackrel{(4.68c)}{=} \left[X^c \frac{\partial}{\partial x^c}, \frac{\partial}{\partial x^a} \right] \stackrel{(4.30)}{=} -X^c_{,a} \frac{\partial}{\partial x^c}, \quad (4.85)$$

$$L_X(dx^b) \stackrel{(4.77)}{=} dL_X x^b \stackrel{(4.68b)}{=} d \left(X^c \frac{\partial}{\partial x^c} x^b \right) = dX^b = X^b_{,c} dx^c \quad (4.86)$$

wobei wir hier erstmals der folgende Abkürzung für die partiellen Ableitungen von Komponentenfunktionen von Tensoren bedienen, die auch im Folgenden häufig verwendet werden wird:

$$X^b_{,c} = \partial_c X^b = \frac{\partial X^b}{\partial x^c}. \quad (4.87)$$

Durch wiederholtes Anwenden von (4.68e) erhält man

$$\begin{aligned} (L_X T)_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} := & X^c T_{b_1 \dots b_m, c}^{a_1 \dots a_\ell} - X^c_{,d} T_{b_1 \dots b_m}^{da_2 \dots a_\ell} - \dots - X^c_{,d} T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_{\ell-1} d} \\ & + X^d_{,b_1} T_{db_2 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} + \dots + X^d_{,b_m} T_{b_1 \dots b_{m-1} d}^{a_1 \dots a_\ell}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Für jeden der ℓ oberen Indizes erhält man also einen Term der diesen Index mit der Matrix $-X^c_{,d}$ transformiert und für jeden der m unteren Indizes einen Term, der diesen Index mit der Matrix $+X^c_{,b_k}$ transformiert. Diese Formel macht besonders deutlich, dass die Lie Ableitung eines Tensors nach einem Vektorfeld am Punkt p sowohl von Wert des Vektorfeldes als auch seiner ersten Ableitung am Punkt p abhängt. Nur die Ableitung von Funktionen (Tensoren der Stufe Null) hängt nicht von den Ableitungen ab. Wir werden sehen, dass dies die Lie Ableitung von der noch zu definierenden kovarianten Ableitung unterscheidet. Bei letzterer hängt die Ableitung aller Tensorfelder nur punktal (ultralokal) vom Vektorfeld am betreffenden Punkt ab.

Wir kommen nun zur geometrischen Interpretation der Lie Ableitung. Dazu erklären wir zunächst die Begriffe *Integralkurve* und *Fluss* eines Vektorfeldes.

Definition 108. Sei $X \in ST(M)$ ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit X und $J \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine differenzierbare Kurve $\gamma : J \rightarrow M$ heißt *Integralkurve* von X genau dann, wenn

$$\dot{\gamma} = X \circ \gamma. \quad (4.89)$$

Dabei ist die linke Seite wie in (4.5) definiert. Es gilt also $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Eine Integralkurve heißt *maximal* genau dann, wenn ihr Definitionsbereich $J \subset \mathbb{R}$ nicht erweitert werden kann, wenn es also keine Integralkurve $\gamma' : J' \rightarrow M$ von X gibt mit $\gamma'|_J = \gamma|_J$, wobei J in J' echt enthalten ist. Man sagt dann auch oft vereinfachend, dass das Intervall J maximal sei.

Lemma 109. Sei $X \in ST(M)$, dann existiert für jeden Punkt $p \in M$ ein offenes Intervall $J_p \in \mathbb{R}$ mit $0 \in J_p$ und eine Integralkurve $\gamma_{(p)}$ durch p , wobei $\gamma_{(p)}(0) = p$. Ist J_p maximal so ist $\gamma^{(p)}$ eindeutig.

Beweis. In einer Karte (U, ϕ) um p wird aus (4.89) das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen für die n Funktionen $\gamma^\alpha := x^\alpha \circ \gamma : J_p \rightarrow \mathbb{R}$

$$\dot{\gamma}^\alpha(t) = X^\alpha \circ \gamma, \quad (4.90)$$

wobei $X^\alpha : \mathbb{R}^n \supseteq \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen des Vektorfeldes $X|_U = X^\alpha \partial/\partial x^\alpha$ sind. Sind letztere zumindest lokal Lipschitz stetig (für jedes $\alpha \in \{1, \dots, n\}$) und jedes $y \in \mathbb{R}^n$ im Definitionsbereich von X^α existiert eine Konstante $C^\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung V_y von y , so dass für alle $x \in V_y$ gilt: $|X^\alpha(\vec{x}) - X^\alpha(\vec{y})| < C^\alpha \|\vec{x} - \vec{y}\|$ was wir hier annehmen und was sicher der Fall ist wenn X stetig differenzierbar ist, so gilt nach dem Satz von Picard-Lindelöf, dass lokal eine eindeutige Lösung existiert und dass diese stetig von den Anfangsbedingungen abhängt (sogar glatt, falls X glatt ist). Ist $J_p = (a, b)$ und existiert $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma_{(p)}(t)$ in M so kann demnach die Integralkurve für ein $b' > b$ eindeutig auf $t \in (a, b')$ fortgesetzt werden. So verfährt man weiter bis entweder $\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma_{(p)}(t)$ nicht mehr existiert oder $b = \infty$. Entsprechend mit der unteren Grenze a des Intervalls. Als Resultat erhält man für jeden Punkt p ein maximales Intervall $\hat{J}_p \subseteq \mathbb{R}$. \square

Definition 110. Sei X ein glattes Vektorfeld auf M und \hat{J}_p das gemäß Lemma 109 existierende maximale Intervall der eindeutigen maximalen Integralkurve $\gamma_{(p)}$ durch p . Dann bezeichnet man mit dem *Definitionsbereich des Flusses von X* die Menge

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{p \in M} \hat{J}_p \times p \quad (4.91)$$

und mit dem *Fluss von X* die Abbildung

$$\text{Fl}^X : \mathcal{D}(X) \rightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \text{Fl}^X(t, p) := \gamma_{(p)}(t). \quad (4.92)$$

Proposition 111. Sei X , $\mathcal{D}(X)$ und Fl^X wie oben. Dann ist $\mathcal{D}(X)$ ist eine offene Umgebung von $0 \times M$ in $\mathbb{R} \times M$, Fl ist glatt und es gilt für jedes $p \in M$:

$$\text{Fl}^X(t + s, p) = \text{Fl}^X(t, \text{Fl}^X(s, p)). \quad (4.93)$$

Diese Gleichung ist wie folgt zu verstehen: Existiert die rechte Seite (d.h. ist $s \in \hat{J}_p$ und $t \in \hat{J}_{\text{Fl}^X(s, p)}$) dann existiert auch die linke Seite (d.h. ist $t + s \in \hat{J}_p$) und es besteht Gleichheit. Umgekehrt, sind entweder t und s beide positiv oder beide

negativ, und existiert die linke Seite (d.h. ist $t + s \in \hat{J}_p$), dann existiert auch die rechte Seite (d.h. es ist $t \in \hat{J}_{\mathbb{F}^X(s,p)}$, denn $s \in \hat{J}_p$ ist dann sowieso erfüllt) und es besteht Gleichheit. Wir bemerken noch, dass man auch oft schreibt $\text{Fl}^X(t, p) =: \text{Fl}_t^X(p)$, so dass (4.93) die einfachere Form annimmt

$$\text{Fl}_{t+s}^X = \text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_s^X, \quad (4.94)$$

die jedoch wie angegeben interpretiert werden muss, da ja für gegebene t, s die Existenz jeder Seite vom Auswertungspunkt p abhängt.

Beweis. Da der Beweis etwas länger ist, verweisen wir auf [1] Seite 18-19. \square

Im Folgenden wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass der Fluss Fl^X der betrachteten Vektorfelder X für ein endliches Parameterintervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ global, d.h. auf ganz M , existiert. Mit anderen Worten, wir nehmen an es gäbe ein $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$, so dass $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \hat{J}_p$ für alle $p \in M$. Hat X einen nicht kompakten Träger so muss dies i. A. nicht zutreffen. Da die Lie Ableitung L_X an einem Punkt p jedoch nur vom Verhalten des Vektorfeldes X in einer beliebig kleinen Umgebung V des Punktes p abhängt, können wir V so wählen, dass V einen kompakten Abschluss hat und dann mit Hilfe der in Korollar 64 beschriebenen Funktion ein neues Vektorfeld $\hat{X} = f \cdot X$ bilden, das in V mit X übereinstimmt aber einen kompakten Träger auf M hat. Die Lie Ableitung am Punkt p können wir dann mit \hat{X} statt X berechnen. Für \hat{X} ist es aber sicher richtig, dass sein Fluss an jedem Punkt mindestens ein Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ enthält (sogar ganz \mathbb{R} !).

Die Lie Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ nach einem Vektorfeld X kann wegen (4.68b) und (4.5) nun geschrieben werden als

$$L_X f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \text{Fl}_t^X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)^* f. \quad (4.95)$$

Die Lie Ableitung eines Vektorfeldes Y nach einem Vektorfeld X ist gegeben durch

$$L_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_{-t}^X)_* Y. \quad (4.96)$$

Denn wenn wir danach $L_X Y$ am Punkte $p \in M$ auf $f \in C^\infty(M)$ anwenden erhalten

wir

$$\begin{aligned}
(L_X Y)_p(f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[(Fl_{-t}^X)_* Y \right]_p(f) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{Fl_t^X(p)}(f \circ Fl_{-t}^X) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(f \circ Fl_{-t}^X \circ Fl_s^Y \circ Fl_t^X(p) \right) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f \circ Fl_s^Y \circ Fl_t^X(p) + \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ Fl_{-t}^X \circ Fl_s^Y(p) \\
&= [X, Y]_p(f),
\end{aligned} \tag{4.97}$$

was gerade (4.68c) entspricht.

Die Lie Ableitung eines Kovektorfeldes $\alpha \in ST^*(M)$ ist gegeben durch

$$L_X \alpha = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Fl_t^X)^* \alpha. \tag{4.98}$$

Dies sieht man wieder ein durch Anwenden auf einen Vektor $Y_p \in T_p(M)$:

$$\begin{aligned}
(L_X \alpha)_p(Y_p) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[(Fl_t^X)^* \alpha \right]_p(Y_p) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[\alpha_{Fl_t^X(p)} \left((Fl_t^X)_* Y_p \right) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[\alpha_{Fl_t^X(p)} \left(Y_{Fl_t^X(p)} + (Fl_t^X)_* Y_p - Y_{Fl_t^X(p)} \right) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\alpha(Y) \circ F_t^X(p) - \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[\alpha_{Fl_t^X(p)} \left((Fl_t^X)_* Y_p - Y_{Fl_t^X(p)} \right) \right] \right) \\
&= X_p(\alpha(Y)) - \alpha_p([X, Y]_p).
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[\alpha_{\text{Fl}_t^X(p)} \left((\text{Fl}_t^X)_* Y_p - Y_{\text{Fl}_t^X(p)} \right) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\alpha_{\text{Fl}_h^X(p)} \left((\text{Fl}_h^X)_* Y_p - Y_{\text{Fl}_h^X(p)} \right) - \alpha_{\text{Fl}_0^X(p)} \left((\text{Fl}_0^X)_* Y_p - Y_{\text{Fl}_0^X(p)} \right)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\alpha_{\text{Fl}_h^X(p)} \left((\text{Fl}_h^X)_* Y_p - Y_{\text{Fl}_h^X(p)} \right)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\alpha_p \left((\text{Fl}_h^X)_* Y_p - Y_{\text{Fl}_h^X(p)} \right)}{h} \right\} \\
&= \alpha_p \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{Fl}_h^X)_* Y_p - Y_{\text{Fl}_h^X(p)}}{h} \right) \\
&= -\alpha_p(L_X Y|_p) = -\alpha_p([X, Y]_p)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Die Lie Ableitung eines allgemeinen Tensorfeldes $T \in ST_m^\ell(M)$ ist nun dadurch bestimmt, dass man die einzelnen Tensorfaktoren so wie auf den rechten Seiten von (4.96) und (4.98), und die Koeffizientenfunktionen wie auf der rechten Seite von (4.95) behandelt. Wegen der Produktregel, erhält man dann genau das derivative Verhalten (4.68e). Es reicht, dies am Beispiel $T = \alpha \otimes Y$, mit $\alpha \in ST_1^0(M)$ und $Y \in ST_0^1(M)$, zu demonstrieren:

$$\begin{aligned}
L_X(\alpha \otimes Y) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left((\text{Fl}_t^X)_* \alpha \otimes (\text{Fl}_{-t}^X)_* Y \right) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)_* \alpha \otimes Y + \alpha \otimes \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_{-t}^X)_* Y \\
&= L_X \alpha \otimes Y + \alpha \otimes L_X Y.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Daraus ersieht man auch die Vertauschbarkeit mit der Kontraktion, d.h. die Regel (4.68f). Es gilt ja

$$\begin{aligned}
((\text{Fl}_t^X)_* \alpha)_p \left((\text{Fl}_{-t}^X)_* Y \right)_p &= \alpha_{\text{Fl}_t^X(p)} \left((\text{Fl}_t^X)_* \circ (\text{Fl}_{-t}^X)_* Y_{\text{Fl}_t^X(p)} \right) \\
&= (\alpha(Y))_{\text{Fl}_t^X(p)},
\end{aligned} \tag{4.102}$$

da $\text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_{-t}^X = \text{id}_M$ und somit $(\text{Fl}_t^X)_* \circ (\text{Fl}_{-t}^X)_* = \text{id}_{TM}$. Dies kann man ohne Erwähnung des Punktes p auch so schreiben:

$$((\text{Fl}_t^X)_* \alpha) \left((\text{Fl}_{-t}^X)_* Y \right) = (\alpha(Y)) \circ \text{Fl}_t^X. \tag{4.103}$$

Also gilt, da die Kontraktion eine lineare Abbildung ist,

$$\begin{aligned}
L_X(C(\alpha \otimes Y)) &= X(\alpha(Y)) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[(F_t^X)^* \alpha((Fl_{-t}^X)_* Y) \right] \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} C \left[(F_t^X)^* \alpha \otimes (Fl_{-t}^X)_* Y \right] \\
&= C \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left[(F_t^X)^* \alpha \otimes (Fl_{-t}^X)_* Y \right] \\
&= CL_X(\alpha \otimes Y).
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Somit ist klar, dass die durch den Fluss Fl^X definierte Lie Ableitung allen Ausgangsaxiomen (4.68) genügt, die ihrerseits die Lie Ableitung eindeutig bestimmen.

Ist $F : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus dann definieren wir F^* wie üblich auf Kovektorfeldern und auf Vektorfeldern als

$$F^*X := F_*^{-1}X. \tag{4.105}$$

Wir können dann die ‘Pull-Back’ Abbildung eines beliebigen Tensorfeldes T definieren, indem wir in seiner Tensorproduktzerlegung jedes Kovektorfeld und jedes Vektorfeld entsprechend abbilden. Also z.B. für $T = \alpha \otimes X$ setzen:

$$F^*T := F^* \alpha \otimes F_*^{-1}X. \tag{4.106}$$

Wegen $Fl_{-t}^X = (Fl_t^X)^{-1}$ können wir dann also allgemein schreiben:

$$L_X T = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Fl_t^X)^* T. \tag{4.107}$$

Ist $F : J \times M \rightarrow M$ eine einparametrische Schar von Diffeomorphismen, wobei $0 \in J \subset \mathbb{R}$ mit $F_0 = id_M$, die auch differenzierbar von $t \in J$ abhängt (d.h. $F \in C^k(J \times M, M)$), so definieren diese ein Vektorfeld X , dessen Wert am Punkte p durch folgende punktale Derivation gegeben ist:

$$X_p(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(F_t(p)). \tag{4.108}$$

Definition 112. Ist F ein Diffeomorphismus und $T \in ST_m^\ell(M)$, dann sagt man T sein *invariant* unter F falls $F^*T = T$.

Ist $F : J \times M \rightarrow M$ eine einparametrische differenzierbare Schar von Diffeomorphismen mit $F_{t=0} = id_M$ und T invariant unter jedem F_t , $t \in J$, dann folgt aus $F_t^*T = T$

durch Differentiation nach t bei $t = 0$ sofort $L_X T = 0$. Die Umkehrung, dass aus $L_X T = 0$ auch $F_t^* T = T$ für alle $t \in J$ folgt, wird im Allgemeinen nicht gelten. Dazu ist aber hinreichend, dass die Abbildung $F : J \rightarrow \text{Diff}(M)$ die zu (4.94) analoge Bedingung

$$F_{t+s} = F_t \circ F_s \quad (4.109)$$

erfüllt, die wieder so zu interpretieren ist, dass Gleichheit dann gilt, wenn beide Seiten der Gleichung sinnvoll sind. Denn dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \Big|_{t'=t} F_{t'}^* T &= \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} F_{h+t}^* T \\ &= \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} (F_h \circ F_t)^* T \\ &= F_t^* \circ \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} F_h^* T = F_t^* L_X T = 0. \end{aligned} \quad (4.110)$$

In diesem Fall ist aber $F_t = F_t^X$, denn beide Flüsse erfüllen dieselbe Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt'} \Big|_{t'=t} F_{t'}(p) = \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} F_h \circ F_t(p) = X_{F_t(p)} = (F_t)_* X_p. \quad (4.111)$$

Kapitel 5

Zusatzstrukturen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

5.1 Kovariante Ableitungen

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff der kovarianten Ableitung. Ähnlich der Lie Ableitung ist auch diese eine Abbildung $ST_0^1(\mathcal{U}) \times ST_m^\ell(\mathcal{U}) \rightarrow ST_m^\ell(\mathcal{U})$ die bestimmte, von der Lie Ableitung leicht abweichende Eigenschaften erfüllt. Man spricht dann von der kovarianten Ableitung eines Tensorfeldes vom Typ T_m^ℓ nach einem Vektorfeld, wobei das Ergebnis wieder ein Tensorfeld des Typs T_m^ℓ ist. Im Unterschied zur Lie Ableitung soll die Abhängigkeit vom Vektorfeld, nach dem die Ableitung gebildet wird, punktal (oder ultralokal) sein. Das bedeutet folgendes: Ist das Vektorfeld X , so soll gelten, dass das resultierende Tensorfeld am Punkt p von X nur über dessen Wert $X(p)$ am Punkte p abhängt und nicht etwa noch von dessen Ableitungen, wie bei der Lie Ableitung. Wir formulieren die allgemeinen Axiome in Stufen, angefangen von

Definition 113. Die kovariante Ableitung für Vektorfelder ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla : ST_0^1(M) \times ST_0^1(M) &\rightarrow ST_0^1(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned} \tag{5.1a}$$

die für alle $X_{1,2}, Y_{1,2} \in ST_0^1(M)$ und alle $f \in C^\infty(M)$ folgenden Bedingungen

genügt:

$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad (5.1b)$$

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \quad (5.1c)$$

$$\nabla_{f \cdot X} Y = f \cdot \nabla_X Y, \quad (5.1d)$$

$$\nabla_X (f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + X(f)Y. \quad (5.1e)$$

Die Abbildung ist also \mathbb{R} -linear in beiden Argumenten, im ersten nach (5.1b) aber zusätzlich auch $C^\infty(M)$ -linear, während (5.1d) besagt, dass sie im 2. Argument $C^\infty(M)$ -derivativ ist. Dies hat folgende Konsequenz:

Korollar 114. *Der Wert von $\nabla_X Y$ an der Stelle $p \in M$ hängt von X nur durch den Wert $X(p)$ ab und von Y nur durch die Einschränkung $Y|_U$ von Y auf eine beliebig kleinen Umgebung U von p .*

Beweis. Die erste Aussage folgt wie im Beweis von Proposition 94. Um die zweite Aussage einzusehen, reicht es aus, zu zeigen, dass $\nabla_X Y(p) = 0$ falls Y in einer Umgebung U von p verschwindet. Das wiederum sieht man so: Nach Korollar 77 existiert $g \in C^\infty(M)$ mit Träger in U , so dass g die Einsfunktion auf einer kleineren offenen Umgebung $V \subset U$ von p ist. Dann ist $f := 1 - g$ eine glatte Funktion die auf dem Komplement von U die Einsfunktion ist und in V die Nullfunktion. Da der Träger von Y im Komplement von U liegt, gilt $Y = f \cdot Y$ und somit wegen (5.1e), dass $\nabla_X Y(p) = \nabla_X (f \cdot Y)(p) = X_p(f)Y(p) + f(p)\nabla_X Y(p) = 0$, wegen $Y(p) = 0$ und $f(p) = 0$. \square

Als direkte Folge von Korollar 114 stellen wir fest, dass die kovariante Ableitung bereits für lokale Vektorfelder definiert ist, also für jedes $ST_0^1(U)$ mit $U \subset M$ offen. Weiter gilt, dass unter gewissen Voraussetzungen jede kovariante Ableitung für Vektorfelder eindeutig eine kovariante Ableitung für alle Tensorfelder impliziert. Die genauen Bedingungen ergeben sich aus folgender

Proposition 115. *Sei ∇ eine kovariante Ableitung gemäß Definition (5.1); dann Existiert eine eindeutige Abbildung*

$$D : ST_0^1 \times ST_m^\ell(M) \rightarrow ST_m^\ell(M) \quad (5.2a)$$

$$(X, T) \mapsto D_X T,$$

für alle nicht-negativen ganzen Zahlen ℓ, m , wobei $ST_0^0(M) = C^\infty(M)$, die für alle $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in ST_0^1(M)$ und alle $A \in ST_m^\ell(M)$, $B \in ST_m^{\ell'}$ folgenden

Bedingungen genügt:

$$D_X f = X(f), \quad (5.2b)$$

$$D_X Y = \nabla_X Y, \quad (5.2c)$$

$$A \mapsto D_X A \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}, \quad (5.2d)$$

$$D_X(A \otimes B) = D_X A \otimes B + A \otimes D_X B, \quad (5.2e)$$

$$C \circ D_X = D_X \circ C. \quad (5.2f)$$

Hier ist C die Kontraktionsabbildung zwischen Vektoren und Kovektoren (natürliche Paarung). Als Folge dieser Bedingungen ergibt sich automatisch, dass D im ersten Argument $C^\infty(M)$ -linear ist.

Beweis. Durch (5.2b) und (5.2c) ist D auf Funktionen und Vektorfeldern eindeutig festgelegt. Wegen (5.2e) und (5.2f) ist es dann auch auf Kovektorfeldern bestimmt; denn seien X, Y Vektorfelder und θ ein Kovektorfeld, dann gilt

$$\begin{aligned} X(\theta(Y)) &\stackrel{(5.2b)}{=} D_X(\theta(Y)) = D_X(C(\theta \otimes Y)) \\ &\stackrel{(5.2f)}{=} C(D_X(\theta \otimes Y)) \\ &\stackrel{(5.2e)}{=} C(D_X \theta \otimes Y + \theta \otimes D_X Y) \\ &\stackrel{(5.2f)}{=} (D_X \theta)(Y) + \theta(D_X Y). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Auflösen nach $D_X \theta(Y)$ und Benutzen von (5.2f) liefert

$$(D_X \theta)(Y) = X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y). \quad (5.4)$$

Da alle Ausdrücke auf der rechten Seite bekannt sind und diese Gleichheit für alle Y gilt, ist damit $D_X \theta$ eindeutig bestimmt. Man beachte, dass die rechte Seite von (5.4) $C^\infty(M)$ -linear in X und derivativ in θ ist. Also gilt auch für Kovektorfelder

$$D_{f \cdot X} \theta = f \cdot D_X \theta, \quad (5.5a)$$

$$D_X(f \cdot \theta) = f \cdot D_X \theta + X(f) \cdot \theta. \quad (5.5b)$$

Da nun jedes Tensorfeld als Summe von Tensorprodukten von Vektor- und Kovektorfeldern mit Koeffizienten in $C^\infty(M)$ geschrieben werden kann, ist seine kovariante Ableitung mit Hilfe von (5.2e) eindeutig bestimmt. \square

Bemerkung 116. Wir wollen von nun an die kovariante Ableitung eines Tensorfeldes T nach einem Vektorfeld X , genauso wie im Falle eines Vektorfeldes Y , mit $\nabla_X T$ bezeichnen, also $D_X \rightarrow \nabla_X$ setzen.

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein Basisfeld über einer offenen Menge U . Diese können, müssen aber nicht von Karten herrühren, also mit irgendwelchen $\partial/\partial x^a$ identisch sein. Wir setzen also nicht voraus, dass die Felder e_a kommutieren. Da die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes nach einem Vektorfeld wieder ein Vektorfeld ist, und somit eine Entwicklung nach den Basisvektoren zulässt, gibt es glatte Koeffizientenfunktionen $\omega_{ab}^c \in C^\infty(M)$, so dass

$$\nabla_{e_a} e_b = \omega_{ab}^c e_c. \quad (5.6)$$

Die kovariante Ableitung des zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ dualen Kobasisfeldes $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ ergibt sich dann wie folgt: Zunächst ist $\theta^b(e_a) = \delta_a^b$. Da die Anwendung eines glatten Kovektorfeldes auf ein glattes Vektorfeld aber eine glatte Funktion ist, ist die linke Seite dieser Gleichung als Element in $C^\infty(U)$ zu interpretieren, wobei die rechte Seite besagt, dass es sich entweder um die Einsfunktion oder die Nullfunktion in U handelt. Also gilt $X(\theta^b(e_a)) = 0$ für alle Vektorfelder in U . Damit folgt aus (5.4) für $X = e_a$, $Y = e_c$ und $\theta = \theta^b$ unter Benutzung von (5.6) sofort

$$(\nabla_{e_a} \theta^b)(e_c) = -\theta^b(\nabla_{e_a} e_c) = -\theta^b(\omega_{ac}^d e_d) = -\omega_{ac}^b, \quad (5.7)$$

so dass

$$\nabla_{e_a} \theta^b = -\omega_{ac}^b \theta^c. \quad (5.8)$$

Wir machen uns nun mit den Ausdrücken der kovarianten Ableitung in Komponenten vertraut. Zunächst ist für $Y = Y^a e_a$ wegen $\nabla_Y = Y^a \nabla_{e_a}$ klar, dass es ausreicht die kovarianten Ableitungen nach den Basisfeldern zu kennen. Für Vektorfelder $V = V^a e_a$ bzw. Kovektorfelder $K = K_a \theta^a$ hat man dann:

$$\nabla_{e_a} V = \nabla_a V^b e_b \quad \text{mit} \quad \nabla_a V^b := \partial_a V^b + \omega_{ac}^b V^c, \quad (5.9a)$$

$$\nabla_{e_a} K = \nabla_a K_b \theta^b \quad \text{mit} \quad \nabla_a K_b := \partial_a K_b - \omega_{ab}^c K_c. \quad (5.9b)$$

Für ein allgemeines Tensorfeld in $ST_m^\ell(U)$ mit Komponenten wie in (4.34) gilt dann:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_c} T &= \nabla_{e_c} (T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_\ell} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_m}) \\ &=: (\nabla_c T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell}) e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_\ell} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_m} \end{aligned} \quad (5.10a)$$

mit

$$\begin{aligned} \nabla_c T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} &:= \partial_c T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} + \omega_{cd}^{a_1} T_{b_1 \dots b_m}^{da_2 \dots a_\ell} + \dots + \omega_{cd}^{a_\ell} T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_{\ell-1} d} \\ &\quad - \omega_{cb_1}^d T_{db_2 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} - \dots - \omega_{cb_m}^d T_{b_1 \dots b_{m-1} d}^{a_1 \dots a_\ell}. \end{aligned} \quad (5.10b)$$

Jeder der ℓ oberen (kontravarianten) Indizes wird also gemäß (5.9a) und jeder der unteren (kovarianten) Indizes gemäß (5.9b) versorgt.

Wegen der $C^\infty(M)$ -Linearität der Abbildung $X \rightarrow \nabla_X$ kann man die kovariante Ableitung ∇ unter Freilassung des Ableitungsarguments als Abbildung

$$\nabla : ST_m^\ell(M) \rightarrow ST_{m+1}^\ell(M) \quad (5.11)$$

verstehen, wobei der zusätzliche Kovektor-Tensorfaktor gerade dem freien Ableitungsargument entspricht. In der Komponentenschreibweise (5.10b) ist dies bereits klar angedeutet: Die Komponenten des Tensors $\nabla T \in S_{m+1}^\ell(M)$ sind $\nabla_c T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell}$.

Ist $\{e'_a\}_{a=1 \dots n}$ ein anderes Basisfeld gemäß (4.35a), so gilt (5.6) analog für die gestrichenen Größen, und man rechnet mit Hilfe der $C^\infty(M)$ -Linearität und Derivationseigenschaft der kovarianten Ableitung im ersten bzw. zweiten Argument sofort nach, dass

$$\omega'^c_{ab} = [f^{-1}]^c_k \omega^k_{ij} f^i_a f^j_b + [f^{-1}]^c_k e'_a(f^k_b). \quad (5.12)$$

Der Vergleich mit (4.36) zeigt, dass der erste Term auf der rechten Seite die Struktur eines tensoriellen Transformationsverhaltens zeigt, aber davon eben durch den zweiten, von ω unabhängigen Term, abweicht. Die ω^c_{ab} sind eben nicht die Komponenten eines Tensors.

Bemerkung 117. In der Literatur werden die ω^c_{ab} die *Zusammenhangskomponenten* genannt, denn kovariante Ableitung sind äquivalent dem differentialgeometrischen Konzept eines Zusammenhangs, auf das wir noch eingehen. Werden die Zusammenhangskomponenten auf eine Koordinatenbasis bezogen, so bezeichnet man sie oft mit einem großen Gamma, also Γ^c_{ab} , statt einem kleinen Omega. Diesem Gebrauch schließen wir uns im Folgenden an.

Für die Zusammenhangskomponenten bezüglich zweier Koordinatenbasen ist (5.12) dann gemäß (4.37) äquivalent zu

$$\Gamma'^c_{ab} = \frac{\partial x'^c}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} + \frac{\partial x'^c}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^a \partial x'^b}. \quad (5.13)$$

An dieser Stelle können wir eine Definition einfügen, die den Differenziationstyp einer kovarianten Ableitung festlegt:

Definition 118. Eine kovariante Ableitung ∇ (ein Zusammenhang) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißt *vom Typ C^k* (oder einfach C^k), wenn seine Koeffizientenfunktionen Γ^c_{ab} in jeder Karte vom Typ C^k sind. Da in (5.13)

2. Ableitungen der Funktionen des Kartenwechsels auftreten, ist diese Definition nur sinnvoll, falls M eine C^{k+2} -Struktur besitzt. Besitzt M eine C^∞ -Struktur, so heißt ∇ glatt falls die Koeffizientenfunktionen Γ_{ab}^c in einer (und wegen (5.13) damit in jeder) Karte glatt sind.

Hat man zwei kovariante Ableitungen, so kann ihre Differenz durch ein Tensorfeld charakterisiert werden, wie die folgende Proposition zeigt:

Proposition 119. *Seien ∇ und $\tilde{\nabla}$ zwei kovariante Ableitungen, dann existiert ein Tensorfeld $D \in ST_2^1(M)$, hier Punktweise aufgefasst als bilineare Abbildung $T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow T_p(M)$, so dass*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X, Y) \quad (5.14)$$

Man bezeichnet D auch als die Differenz der Zusammenhänge und schreibt

$$D := \tilde{\nabla} - \nabla \quad (5.15)$$

Ist umgekehrt ∇ eine kovariante Ableitung und A ein Tensor des genannten Typs, so definiert (5.14) eine kovariante Ableitung.

Beweis. Die Abbildung $ST(M) \times ST(M) \rightarrow ST(M)$,

$$(X, Y) \mapsto \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad (5.16)$$

ist in beiden Argumenten $C^\infty(M)$ -linear. Definiert man also D durch (5.15), d.h. $D(X, Y) := \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, so definiert dies nach Proposition 95 ein Tensorfeld des genannten Typs. Umgekehrt ist klar, dass durch (5.14) eine kovariante Ableitung auf Vektorfeldern und durch die übliche derivative Fortsetzung dann auf allen Tensorfeldern definiert wird. \square

Bemerkung 120. Die Aussage von Proposition 119 ist äquivalent der Aussage, dass die Menge der kovarianten Ableitungen ein affiner Raum über dem reellen Vektorraum $ST_2^1(M)$ ist. Dies wird auch durch das affine Transformationsgesetz (5.12) bzw. (5.13) gezeigt, in dem der zweite, inhomogene Teil durch Differenzbildung herausfällt und dann tensoriellen Transformationscharakter zeigt.

5.2 Kovariante Ableitungen entlang von Kurven

Definition 121. Unter einer *Kurve* verstehen wir (wenn keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen explizit genannt werden) eine mindestens einmal stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(s)$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall oder

ganz \mathbb{R} ist. Die *Spur* der Kurve ist das Bild der Abbildung γ in M , was wir auch mit $\text{Bild}(\gamma)$ bezeichnen. Man beachte, dass hier „Kurve“ sowohl die Information ihrer Spur als auch ihrer Parametrisierung umfasst.

Die Bedingung der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit sichert, dass in jedem Tangentialraum $T_{\gamma(t)}(M)$, der über einem Punkt der Spur von γ in M liegt, ein eindeutiger Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$ definiert ist.

Sei nun $U \subseteq M$ eine offene Menge, die die Spur von γ enthält, und $T \in ST_m^l(U)$ ein Tensorfeld in U , so können wir die kovariante Ableitung von T nach $\dot{\gamma}$ an allen Punkten der Spur nehmen.

Definition 122. Unter der *kovarianten Ableitung eines Tensorfeldes auf M entlang einer Kurve γ* verstehen wir die kovariante Ableitung des Tensorfeldes nach den Geschwindigkeitsvektoren der Kurve an den Punkten der Spur von γ .

Sei nun (U, ϕ) eine Karte mit Komponentenfunktionen x^a , $a = 1 \cdots n$, so ist

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^a(t) \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_{\gamma(t)}, \quad \text{mit } \gamma^a := x^a \circ \gamma. \quad (5.17)$$

Die Komponenten der kovarianten Ableitung von T nach $\dot{\gamma}$ an der Stelle $\gamma(s)$ sind wegen der für jede in U definierte Funktion geltenden Beziehung (vgl. (4.5))

$$\dot{\gamma}_{\gamma(t)} f = \frac{d}{dt'} \Big|_{t'=t} f \circ \gamma(t') = \dot{\gamma}^a(t) \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_{\gamma(t)} (f) \quad (5.18)$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{\gamma}} T)_{b_1 \cdots b_m}^{a_1 \cdots a_\ell} (\gamma(t)) &= \frac{d}{dt'} \Big|_{t'=t} T_{b_1 \cdots b_m}^{a_1 \cdots a_\ell} (\gamma(t')) \\ &+ \text{Terme der Form } \dot{\gamma}^c(t) \Gamma_{c \cdot}^{\cdot} (\gamma(t)) T_{\cdot \cdot \cdot} (\gamma(t)) \end{aligned} \quad (5.19)$$

gemäß dem Schema (5.10b).

Aus der offensichtlichen Beobachtung, dass die rechte Seite von (5.19) nur von der Einschränkung der Komponentenfunktionen auf das Bild von γ , d.h. von der Einschränkung des Tensorfeldes T auf dieses Bild, abhängt, erhalten wir sofort

Lemma 123. *Stimmen zwei Tensorfelder auf dem Bild einer Kurve überein, so stimmen auch ihre kovarianten Ableitungen entlang dieser Kurve überein.*

Das bedeutet, dass wir die kovariante Ableitung eines Tensorfeldes T nach $\dot{\gamma}$ auch dann noch definieren können, wenn T lediglich auf der Spur von γ (also einer

nicht offenen Menge) definiert ist. Man muss nur T auf eine offene Umgebung U der Spur fortsetzen (was mit Hilfe der Abschneidefunktionen immer möglich ist) und dann die Ableitung wie oben gesehen bilden. Lemma 123 sichert dann, dass das Ergebnis von der Wahl der Fortsetzung unabhängig ist. Tatsächlich ist die Ableitung aber auch *ohne* die explizite Fortsetzung berechenbar, wenn man dazu den Ausdruck (5.19) als *Definition* benutzt. Denn die Aussage, T sei auf der Spur von γ definiert, bedeutet ja, dass eine Funktion $T : p \mapsto T_p^\ell(M)$ für alle p der Spur existiert. Also ist die Abbildung, die wir oben mit $T \circ \gamma$ bezeichnet haben auch hier gegeben, und das reicht um (5.19) anzuwenden. Man darf nur nicht die Ableitung dT_{\dots}/dt durch $\dot{\gamma}^a \partial_a T_{\dots}$ ersetzen, denn die partiellen Ableitungen $\partial_a T_{\dots}$ in den zu γ transversalen Richtungen sind nicht definiert.

Das fassen wir nun genauer:

Definition 124. Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve. Eine Abbildung T , die jedem $t \in I$ einen Tensor in $T \in T_{\gamma(t)}^\ell(M)$ zuordnet heißt *Tensorfeld über γ* . Es heißt *glatt*, wenn für alle Karten (ϕ, U) mit $U \cap \text{Bild}(\gamma) \neq \emptyset$ die Komponentenfunktionen

$$T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} : \gamma^{-1}(U \cap \text{Bild}(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.20)$$

der für alle $t \in I$ mit $\gamma(t) \in U$ existierenden Entwicklung

$$T(t) = T_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell}(t) \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \Big|_{\gamma(t)} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{a_\ell}} \Big|_{\gamma(t)} \otimes dx^{b_1} \Big|_{\gamma(t)} \otimes \dots \otimes dx^{b_m} \Big|_{\gamma(t)} \quad (5.21)$$

glatte Funktionen sind. Die Menge der glatten Tensorfelder vom Typ T_M^ℓ über γ wird mit $ST_m^\ell(\gamma)$ bezeichnet.

Definition 125. Sei $\gamma : I \rightarrow M$ glatte Kurve. Eine *kovariante Ableitung von Tensorfeldern über γ* besteht aus Abbildungen, eine für jedes Paar (ℓ, m) :

$$D_\gamma : ST_m^\ell(\gamma) \rightarrow ST_m^\ell(\gamma), \quad (5.22a)$$

die für alle $f \in C^\infty(I) \equiv ST_0^0(\gamma)$, $A \in ST_m^\ell(\gamma)$ und $B \in ST_{m'}^{\ell'}(\gamma)$ folgenden Bedingungen genügt (vgl. (5.2)):

$$D_\gamma f = \dot{f} \quad \text{gewöhnliche Ableitung}, \quad (5.22b)$$

$$A \mapsto D_\gamma A \quad \text{ist } \mathbb{R}\text{-linear}, \quad (5.22c)$$

$$D_\gamma(A \otimes B) = D_\gamma A \otimes B + A \otimes D_\gamma B, \quad (5.22d)$$

$$C \circ D_\gamma = D_\gamma \circ C, \quad (5.22e)$$

wobei C wieder die Kontraktionsabbildung zwischen Vektoren und Kovektoren ist.

In dieser Definition haben wir absichtlich nicht ∇ als Ableitungssymbol gewählt, um nicht zu suggerieren, dass eine kovariante Ableitung für Tensorfelder über γ notwendig von einer herkömmlichen kovarianten Ableitung induziert ist. Tatsächlich wird es sich als sinnvoll erweisen, bei gegebener kovarianten Ableitung ∇ *verschiedene* kovariante Ableitung für Tensorfelder über Kurven einzuführen, von denen eine die durch γ induzierte ist, eine andere, die wir weiter unten noch definieren werden (siehe Abschnitt, 5.8), bezeichnet man meist unter dem Namen *Fermi Ableitung* (manchmal auch ‘Fermi-Walker Ableitung’). Sie ist durch physikalischen Anwendungen motiviert.

Korollar 126. *Zu jeder kovarianten Ableitung ∇ und jeder Kurve γ existiert eine eindeutige kovariante Ableitung D_γ für Tensorfelder über γ , die folgender Bedingung genügt: Ist T Tensorfeld in einer offenen Umgebung der Spur von γ und $T \circ \gamma$ das davon induzierte Tensorfeld über γ , so soll für alle T gelten*

$$D_\gamma(T \circ \gamma) = (\nabla_{\dot{\gamma}} T) \circ \gamma. \quad (5.23)$$

Das so definierte D_γ wird mit ∇_γ bezeichnet.

Beweis. Der Beweis ist nach obiger Diskussion eigentlich klar; denn ist ein Tensorfeld T' über γ gegeben und T irgendeine Fortsetzung, so dass also $T \circ \gamma = T'$, so können wir die rechte Seite von (5.23) genau wie in (5.19) berechnen und argumentieren, dass das Ergebnis nur von T abhängt. In diesen Koordinaten sind dann die Koeffizientenfunktionen $\Gamma_{ab}^c \circ \gamma$ aber gerade die Koeffizientenfunktionen für D_γ , also in jedem Koordinatensystem eindeutig bestimmt, so dass auch D_γ eindeutig bestimmt ist. \square

Bemerkung 127. Der allgemeine Zusammenhang D_γ für Tensorfelder über γ hat als Ableitungsargument absichtlich γ und *nicht* $\dot{\gamma}$, denn es wird im Allgemeinen nicht richtig sein, dass der Wert von $D_\gamma T$ in $t \in I$ nur von $\dot{\gamma}(t)$ abhängt, wie bei $\nabla_{\dot{\gamma}}$. Bei der Fermi Ableitung (siehe Abschnitt 5.8) hängt er z.B. noch von $\ddot{\gamma}(t)$ ab. Mit $\nabla_{\dot{\gamma}}$ werden wir also immer nur die zu einer gegebenen kovarianten Ableitung ∇ gehörige kovariante Ableitung für Tensorfelder über γ bezeichnen.

Analog zu Proposition (95) sind auch Tensorfelder über γ charakterisiert:

Proposition 128. *Gegeben eine Funktion $\bar{\theta}$, die jedem n -Tupel von glatten globalen Vektorfeldern (X^1, \dots, X^n) über γ ein Feld $\bar{\theta}(X^1, \dots, X^n) \in ST_m^\ell(\gamma)$ zuordnet. Diese Funktion sei \mathbb{R} -multilinear, d.h. in jedem der n Argumente \mathbb{R} -linear. Dann existiert ein $\theta \in ST_{m+n}^\ell(\gamma)$, so dass $\bar{\theta}(X^1, \dots, X^n)(p) = \theta_p(X_p^1, \dots, X_p^n)$, genau dann, wenn $\bar{\theta}$ in jedem der n Argumente $C^\infty(\gamma)$ -linear ist.*

Ebenso gilt analog zu (119)

Proposition 129. Seien D_γ und \tilde{D}_γ zwei kovariante Ableitungen entlang γ , dann existiert ein Tensorfeld $d \in ST_1^1(\gamma)$, hier Punktweise aufgefasst als Endomorphismus $T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ für $p \in \text{Bild}(\gamma)$, so dass

$$\tilde{D}_\gamma X = D_\gamma X + d_\gamma(X). \quad (5.24)$$

Man bezeichnet d auch als die Differenz der kovarianten Ableitungen und schreibt

$$d_\gamma := \tilde{D}_\gamma - D_\gamma. \quad (5.25)$$

Ist umgekehrt D_γ eine kovariante Ableitung entlang γ und $d_\gamma \in ST_1^1(\gamma)$, so definiert (5.24) eine kovariante Ableitung entlang γ . Die kovarianten Ableitungen über γ bilden also einen reellen affinen Raum über dem reellen Vektorraum $ST_1^1(\gamma)$.

Definition 130. Ist D_γ eine kovariante Ableitung entlang γ und $T \in ST_m^\ell(\gamma)$. Dann heißt T entlang γ parallel verschoben (bezüglich D_γ) genau dann wenn

$$D_\gamma T = 0. \quad (5.26)$$

Seien $p, q \in M$ Anfangs- bzw. Endpunkt der Kurve γ . Da Gleichung (5.26) eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung erster Ordnung für T ist, besitzt sie für jeden Anfangswert $T_i \in T_m^\ell(p)$ eine eindeutige Lösung. Der Lösungsraum ist ein $(\dim(M))^{\ell+m}$ -dimensionaler reeller Vektorraum und die Abbildung, die jedem Anfangswert $T_i \in T_m^\ell(p)$ seine Lösung zuordnet ist ein linearer Isomorphismus. Somit ist auch die Abbildung $P_m^\ell(\gamma) : T_m^\ell(p) \rightarrow T_m^\ell(q)$, die jedem Anfangswert seinen Endwert zuordnet, ein linearer Isomorphismus zwischen $T_m^\ell(p)$ und $T_m^\ell(q)$: Die Linearität ist klar.

5.3 Geodätische und Autoparallele

Ein wichtiges Beispiel für eine Vektorfeld über γ ist das Geschwindigkeitsfeld der Kurve selbst: $\dot{\gamma} \in ST_0^1(\gamma) \equiv ST(\gamma)$. Seine kovariante Ableitung entlang γ durch einen Zusammenhang ∇ ist das Beschleunigungsfeld $\ddot{\gamma} \in ST(\gamma)$ der Kurve:

$$\ddot{\gamma} := \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \left(\ddot{\gamma}^c + (\Gamma_{ab}^c \circ \gamma) \dot{\gamma}^a \dot{\gamma}^b \right) \frac{\partial}{\partial x^c} \Big|_\gamma, \quad (5.27)$$

wobei hier $\dot{\gamma}^a$ und $\ddot{\gamma}^a$ die gewöhnliche erste und zweite Ableitung der Funktion $x^a \circ \gamma \equiv \gamma^a : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen.

Definition 131. Ist $\dot{\gamma} = 0$ so heißt γ *geodätisch* bzw. eine *Geodätische*. Existiert eine Funktion $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\dot{\gamma} = k\dot{\gamma}$, so heißt γ *autoparallel* bzw. eine *Autoparallele*.

Klarerweise sind Geodätische auch Autoparallele (für $k \equiv 0$). Umgekehrt gilt die folgende

Proposition 132. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ zweimal stetig differenzierbare Kurve mit $\dot{\gamma} = k\dot{\gamma}$ (Autoparallele), wobei $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist; dann existiert ein zweimal stetig differenzierbarer Diffeomorphismus $f : I \rightarrow I'$ (d.h. f ist eine Bijektion von I und I' und sowohl f als auch f^{-1} sind zweimal stetig differenzierbar), so dass die reparametrisierte Kurve $\gamma' = \gamma \circ f^{-1}$ eine Geodätische ist. Ist $t_0 \in I$, so sind das Bildintervall I' und die Funktion f eindeutig durch die Vorgaben $f(t_0) = a \in \mathbb{R}$ und $\dot{f}(t_0) = b \in \mathbb{R} - \{0\}$ festgelegt, wobei

$$f(t) = a + b \int_{t_0}^t dt' \exp \left\{ \int_{t_0}^{t'} dt'' k(t'') \right\}. \quad (5.28)$$

Beweis. Es ist $\gamma^c = \gamma'^c \circ f$ und somit nach der Kettenregel $\dot{\gamma}^c = (\dot{\gamma}'^c \circ f)\dot{f}$ und $\ddot{\gamma}^c = \dot{f}^2(\dot{\gamma}'^c \circ f) + (\ddot{\gamma}'^c \circ f)\dot{f}$. Trägt man dies in den Klammerausdruck von (5.27) ein, so wird dieser zu

$$\dot{f}^2(\dot{\gamma}'^c \circ f + (\Gamma_{ab}^c \circ \gamma' \circ f)(\dot{\gamma}'^a \circ f)(\dot{\gamma}'^b \circ f)) + \ddot{f}(\dot{\gamma}'^c \circ f). \quad (5.29)$$

Nach Voraussetzung ist dies gleich $k\dot{\gamma}^c = k\dot{f}(\dot{\gamma}'^c \circ f)$. Wählt man also f so, dass es der Differentialgleichung $\ddot{f} = kf\dot{f}$ genügt, deren eindeutige Lösung mit nirgends verschwindendem \dot{f} und den gegebenen Anfangsbedingungen durch (5.28) gegeben ist, so muss im Intervall I gelten

$$\dot{f}^2(\dot{\gamma}'^c \circ f + (\Gamma_{ab}^c \circ \gamma' \circ f)(\dot{\gamma}'^a \circ f)(\dot{\gamma}'^b \circ f)) = 0, \quad (5.30a)$$

was wegen $\dot{f}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gleichbedeutend ist mit der Gültigkeit von

$$\dot{\gamma}'^c + (\Gamma_{ab}^c \circ \gamma')\dot{\gamma}'^a\dot{\gamma}'^b = 0 \quad (5.30b)$$

im Intervall I' . □

Bemerkung 133. Aus dem Beweis ist ersichtlich, dass die Menge der Reparametrisierungsfunktionen f , die eine Geodätische wieder in eine Geodätische überführen, gegeben ist durch Funktionen für die \ddot{f} identisch aber \dot{f} nirgends verschwindet; also $f(t) = a + bt$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Diese bilden gerade die affine Gruppe der reellen Zahlen, weshalb man die Untermenge der Parametrisierungen, die Autoparallele zu Geodätischen machen auch *affinen Parametrisierungen* nennt.

5.4 Torsion und Krümmung

Ist eine kovariante Ableitung ∇ in Sinne der Definition 113 gegeben, so kann man mit ihrer Hilfe weitere Tensorfelder definieren, die gewisse Eigenschaften von ∇ charakterisieren. Zu diesen gehören insbesondere die Torsion und die Krümmung, die wir nun vorstellen wollen.

Torsion

Definition 134. Die *Torsion* ist ein Tensorfeld $T \in ST_2^1(M)$, was gemäß Proposition 95 durch eine Abbildung

$$T : ST(M) \times ST(M) \rightarrow ST(M) \quad (5.31a)$$

definiert wird. Dies ist gegeben durch

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (5.31b)$$

so dass

$$T(X, Y) = -T(Y, X). \quad (5.31c)$$

Durch Anwendung von Proposition 95 ist es wirklich leicht zu sehen, dass (5.31b) ein Tensorfeld in $ST_2^1(M)$ definiert. Dazu reicht es wegen der Antisymmetrie (5.31c) nämlich aus, die C^∞ -Linearität im ersten Argument zu beweisen. Das ist aber mit (5.1d, 5.1e) und (4.30) sofort zu sehen.

Ist $\{e_a\}_{a=1 \dots n}$ ein lokales Basisfeld mit Dualbasisfeld $\{\theta^a\}_{a=1 \dots n}$, so schreiben wir

$$\begin{aligned} T &= T_{bc}^a e_a \otimes \theta^b \otimes \theta^c, \\ &= \frac{1}{2} T_{bc}^a e_a \otimes \underbrace{(\theta^b \otimes \theta^c - \theta^c \otimes \theta^b)}_{=: \theta^b \wedge \theta^c}, \end{aligned} \quad (5.32a)$$

wobei \wedge das antisymmetrisierte Tensorprodukt bezeichnet. Wegen der Antisymmetrie (5.31b) gilt ja

$$T_{bc}^a = -T_{cb}^a. \quad (5.32b)$$

Da $[e_b, e_c]$ wieder ein lokales Vektorfeld ist, gibt es lokal glatte Koeffizientenfunktionen C_{bc}^a , so dass

$$[e_b, e_c] = C_{bc}^a e_a. \quad (5.32c)$$

Die Torsionskomponenten setzen sich dann diesen und den Zusammenhangskomponenten (5.6) wie folgt zusammen:

$$T_{bc}^a = \omega_{bc}^a - \omega_{cb}^a - C_{bc}^a. \quad (5.32d)$$

Ist das Basisfeld von den Koordinaten induziert, d.h. gilt $e_a = \partial/\partial x^a$, dann ist

$$T_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a. \quad (5.32e)$$

Bemerkung 135. Bezüglich einer fest gewählten Metrik g kann man die Krümmung auch durch ein Element $\Theta \in ST_3^0(M)$ charakterisieren, nämlich

$$\Theta(X, Y, Z) := g(X, T(Y, Z)), \quad (5.33a)$$

so dass

$$\Theta(X, Y, Z) := -\Theta(X, Z, Y). \quad (5.33b)$$

Es gilt dann in Komponenten

$$\Theta_{abc} = g_{an} T_{bc}^n \quad \text{und} \quad g^{an} \Theta_{nbc} = T_{bc}^a. \quad (5.33c)$$

Man beachte, dass der obere Index beim Herunterziehen an die erste Stelle gesetzt wird. Diese Konvention wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet; manchmal stellt man ihn auch an die zweite Stelle. Zu merken ist, dass sich bei der hier verwendeten Konvention die Antisymmetrie (5.31c) auf den zweiten und dritten Eintrag von Θ überträgt, wie in (5.33b) angegeben.

Krümmung

Wir kommen nun zur Krümmung.

Definition 136. Die *Krümmung* ist ein Tensorfeld $R \in ST_3^1(M)$, was gemäß Proposition 95 durch eine Abbildung

$$R : ST(M) \times ST(M) \times ST(M) \rightarrow ST(M) \quad (5.34a)$$

definiert wird. Dies ist gegeben durch

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (5.34b)$$

so dass

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z. \quad (5.34c)$$

Durch Anwendung von Proposition 95 weist man wieder leicht nach, dass (5.34b) ein Tensorfeld in $ST_3^1(M)$ definiert. Dazu reicht es aus, die C^∞ -Linearität im X - und Z -Argument zu zeigen, was anhand der Regeln (5.1d, 5.1e) und (4.30) leicht geschieht.

Bemerkung 137. Die Krümmung kann alternativ auch aufgefasst werden als Abbildung $R : ST(M) \times ST(M) \rightarrow ST(M) \otimes ST^*(M)$, $(X, Y) \mapsto R(X, Y) = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$, oder, wegen der für jeden Vektorraum V gültigen Beziehung $\text{End}(V) \cong V \otimes V^*$, als Feld von Abbildungen, das an jedem Punkt $p \in M$ einem Paar von Vektoren $(X, Y) \in T_p(M) \times T_p(M)$ eine Abbildung $\text{End}(T_p(M))$ zuordnet. Diese Zuordnung ist nach (5.34c) anti-symmetrisch in (X, Y) , so dass also dem vertauschten Paar (Y, X) die negative Abbildung zugeordnet wird. So aufgefasst ist der Krümmungstensor eine *endomorphismenwertige 2-Form*.

Bezüglich lokaler und dualer Basisfelder $\{e_a\}_{a=1 \dots n}$ und $\{\theta^a\}_{a=1 \dots n}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} R &= R^a{}_{bcd} e_a \otimes \theta^b \otimes \theta^c \otimes \theta^d \\ &= \frac{1}{2} R^a{}_{bcd} e_a \otimes \theta^b \otimes \underbrace{(\theta^c \otimes \theta^d - \theta^d \otimes \theta^c)}_{\theta^c \wedge \theta^d}, \end{aligned} \quad (5.35a)$$

oder

$$R(e_c, e_d) e_b = R^a{}_{bcd} e_a. \quad (5.35b)$$

Daraus folgt mit (5.6) und (5.32c)

$$R^a{}_{bcd} = e_c(\omega_{db}^a) - e_d(\omega_{cb}^a) + \omega_{cn}^a \omega_{db}^n - \omega_{dn}^a \omega_{cb}^n - C_{cd}^n \omega_{nb}^a. \quad (5.35c)$$

Im Falle von Koordinaten-Basisfeldern fällt der letzte Term wieder weg:

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{cn}^a \Gamma_{db}^n - \Gamma_{dn}^a \Gamma_{cb}^n. \quad (5.35d)$$

Gemäß der verabredeten Schreibweise (5.10) ist $\nabla_{e_b} Z = (\nabla_b Z^c) e_c$ und $\nabla_{e_a} \nabla_{e_b} Z = (\nabla_a \nabla_b Z^c) e_c$ etc, so dass wir $R(e_a, e_b)Z$ auch so schreiben können:

$$\nabla_a \nabla_b Z^c - \nabla_b \nabla_a Z^c - C_{ab}^d \nabla_d Z^c = R^c{}_{dab} Z^d, \quad (5.35e)$$

was sich durch Wegfall des 3. Terms vereinfacht, wenn sich die Komponenten auf Koordinaten-Basisfelder beziehen.

Bemerkung 138. Bezüglich einer fest gewählten Metrik g kann man die Krümmung auch durch ein Element $\text{Riem} \in ST_4^0(M)$ charakterisieren, nämlich

$$\text{Riem}(W, X, Y, Z) := g(W, R(X, Y)Z), \quad (5.36a)$$

so dass

$$\text{Riem}(W, X, Y, Z) = -\text{Riem}(W, X, Z, Y). \quad (5.36b)$$

Es gilt dann in Komponenten

$$(\text{Riem})_{abcd} = g_{an} R^n{}_{bcd} = R_{abcd} \quad \text{und} \quad g^{an} (\text{Riem})_{nbcd} = R^a{}_{bcd}. \quad (5.36c)$$

5.5 Torsion, Krümmung und die Nicht-Vertauschbarkeit kovarianter Ableitungen

Ist $f \in C^\infty(M)$, dann ist $\nabla\nabla f \in ST_2^0(M)$. Wir interessieren uns für den antisymmetrischen Anteil dieses Tensorfeldes. Verschwindet dieser nicht, so sagen wir, dass die zweiten kovarianten Ableitungen von Skalarfeldern nicht vertauschen.

Nun gilt, falls C wieder die Kontraktion zwischen Vektor- und Kovektorfeldern bezeichnet,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y f &= \nabla_X C(Y \otimes df) = C(\nabla_X Y \otimes df + Y \otimes \nabla_X df) \\ &= \nabla_{\nabla_X Y} f + \nabla \nabla f(X, Y).\end{aligned}\quad (5.37)$$

Also ergibt sich die Auswertung des Tensorfeldes $\nabla\nabla f$ auf $X, Y \in ST(M)$:

$$\nabla \nabla f(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f. \quad (5.38)$$

Differenzbildung unter Berücksichtigung von $\nabla_X \nabla_Y f = X(Yf)$ und der Definition der Torsion (5.31b) liefert

$$\nabla \nabla f(X, Y) - \nabla \nabla f(Y, X) = -\nabla_{T(X, Y)} f = -T(X, Y)f, \quad (5.39)$$

wobei $T(X, Y)f$ die Ableitung von f nach dem Vektorfeld $T(X, Y)$ bezeichnet.

Dieselbe Überlegung führen wir nun für Vektorfelder durch. Ist also $Z \in ST_0^1(M)$ dann ist $\nabla\nabla Z \in ST_2^1(M)$. Analog zu (5.40) gilt nun

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X C(Y \otimes \nabla Z) = C(\nabla_X Y \otimes \nabla Z + Y \otimes \nabla_X \nabla Z) \\ &= \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla \nabla Z(X, Y),\end{aligned}\quad (5.40)$$

so dass ganz analog zu (5.38) gilt:

$$\nabla \nabla Z(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z. \quad (5.41)$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichungen (5.31b) und (5.34b) für Torsion und Krümmung berechnet man leicht den in X, Y antisymmetrische Anteil zu

$$\nabla \nabla Z(X, Y) - \nabla \nabla Z(Y, X) = R(X, Y)Z - \nabla_{T(X, Y)} Z. \quad (5.42)$$

Als nächstes betrachten wir Kovektorfelder. Ist $\alpha \in ST_1^0(M)$ dann ist $\nabla\nabla\alpha \in ST_3^0(M)$ und man hat wieder

$$\nabla \nabla \alpha(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y \alpha - \nabla_{\nabla_X Y} \alpha, \quad (5.43)$$

so dass

$$\nabla\nabla\alpha(X, Y) - \nabla\nabla\alpha(Y, X) = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\alpha - \nabla_{T(X, Y)}\alpha. \quad (5.44)$$

Benutzt man

$$(\nabla_X\nabla_Y\alpha)(Z) = XY(\alpha(Z)) - X(\alpha(\nabla_Y Z)) - Y(\alpha(\nabla_X Z)) + \alpha(\nabla_Y\nabla_X Z) \quad (5.45)$$

und die entsprechende mit X, Y vertauschte Gleichung, so wird daraus

$$\nabla\nabla\alpha(X, Y) - \nabla\nabla\alpha(Y, X) = -\alpha \circ R(X, Y) - \nabla_{T(X, Y)}\alpha. \quad (5.46)$$

Der allgemeine Fall für eine Tensorfeld $F \in ST_m^\ell(M)$ ergibt sich aus

$$\nabla\nabla F(X, Y) - \nabla\nabla F(Y, X) = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]})F - \nabla_{T(X, Y)}F \quad (5.47)$$

und der Beobachtung, dass die Kombination $\nabla_{XY}^2 := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ derivativ bezüglich des Tensorprodukts ist. Das heißt Folgendes: Sind $F \in ST_m^\ell(M)$ und $F' \in ST_m^{\ell'}(M)$, dann rechnet man mit Hilfe von (5.2e) leicht nach

$$\nabla_{XY}^2(F \otimes F') = (\nabla_{XY}^2 F) \otimes F' + F \otimes (\nabla_{XY}^2 F'). \quad (5.48)$$

Da jedes Tensorfeld Tensorprodukt von Vektor- und Kovektorfeldern ist, bestimmt (5.47) mit Hilfe von (5.42) und (5.46) die rechte Seite von (5.47). Die Komponentenversion von (5.48) ist wie folgt:

$$\begin{aligned} (\nabla_a\nabla_b - \nabla_a\nabla_b) F_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} &= \sum_{k=1}^{\ell} R_{s ab}^{a_k} F_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_{k-1} s a_{k+1} \dots a_\ell} \\ &- \sum_{k=1}^m R_{b_k ab}^s F_{b_1 \dots b_{k-1} s b_{k+1} \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell} \\ &- T_{ab}^c \nabla_c F_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_\ell}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Die Systematik dieses Ausdrucks sollte klar sein: Jeder obere Index wird mit der zu $R(e_a, e_b)$ gehörigen Matrix transformiert, jeder untere Index mit dem Negativen der dazu Transponierten.

5.6 Metrik und metrischer Defekt

Definition 139. Eine *Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Tensorfeld $g \in ST_2^0(M)$, so dass für alle $p \in M$ $g(p)$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $T_p(M)$ ist. Jedes $g(p)$ ist durch seine Signatur (s_+, s_-) charakterisiert,

wobei s_{\pm} die maximalen Dimensionen der linearen Unterräume von $T_p(M)$ sind, auf die eingeschränkt $g(p)$ positiv/negativ definit ist. Da g überall stetig und nicht ausgeartet ist, ist die Signatur von p unabhängig. Ist $s_- = 0$ (also $s_+ = \dim(M)$) so nennt man g eine *Riemannsche Metrik*; ist $s_- = 1$ (also $s_+ = \dim(M) - 1$) oder umgekehrt $s_- = \dim(M) - 1$ (also $s_+ = 1$), so nennt man g eine *Lorentz'sche Metrik*. Allgemein nennen wir das Paar (M, g) eine *metrische Mannigfaltigkeit*.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie hat man es mit Lorentz'schen Mannigfaltigkeiten zu tun, also Paaren (M, g) , wo M eine (mindestens stückweise C^2 , aber oft als C^∞ vorausgesetzte) Mannigfaltigkeit ist und g eine Lorentz'sche Metrik. Wenn im Folgenden weder explizit auf den Riemannschen noch den Lorentz'schen Charakter der Metrik hingewiesen wird, so bedeutet dies, dass die getroffene Aussage von der Signatur unabhängig ist.

Definition 140. Sei (M, ∇, g) eine Mannigfaltigkeit M mit kovarianter Ableitung ∇ und Metrik g ; dann ist der *metrische Defekt* ein Tensorfeld $Q \in ST_3^0(M)$, was gemäß Proposition 95 durch eine Abbildung

$$Q : ST(M) \times ST(M) \times ST(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad (5.50a)$$

definiert wird. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Q(X, Y, Z) &:= (\nabla_X g)(Y, Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z), \end{aligned} \quad (5.50b)$$

so dass

$$Q(X, Y, Z) = Q(X, Z, Y). \quad (5.50c)$$

5.7 Die Levi-Civita kovariante Ableitung

Sei (M, g, ∇) eine metrische Mannigfaltigkeit mit Torsion, dann lässt sich die kovariante Ableitung durch den Torsionstensor und den Tensor des metrischen Defektes auf eine nützliche Weise charakterisieren, die wir nun vorstellen wollen.

Dazu schreiben wir die Definitionsgleichung (5.50b) des metrischen Defektes dreimal auf, wobei die zweite und dritte durch zyklische Permutation der Einträge (X, Y, Z) aus der ersten entstehen:

$$\begin{aligned} Q(X, Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ Q(Y, Z, X) &= Y(g(Z, X)) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) \\ Q(Z, X, Y) &= Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Addieren wir die ersten beiden Gleichungen und subtrahieren die dritte, so können wir unter Benutzung von (5.33a) nach $g(\nabla_X Y, Z)$ auflösen:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = +X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \quad (5.52a)$$

$$-g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (5.52b)$$

$$-Q(X, Y, Z) - Q(Y, Z, X) + Q(Z, X, Y) \quad (5.52c)$$

$$-\Theta(X, Y, Z) + \Theta(Y, Z, X) + \Theta(Z, X, Y). \quad (5.52d)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

Proposition 141. *Auf einer Mannigfaltigkeit mit Metrik bestimmen die Tensoren der Torsion und des metrischen Defekts einer kovarianten Ableitung diese eindeutig. Umgekehrt kann man beliebige Tensoren der Torsion und des metrischen Defekts vorschreiben und dann durch (5.52) eine kovariante Abbildung eindeutig definieren.*

Beweis. Der erste Teil der Aussage, die Eindeutigkeit, ist klar. Für den zweiten Teil, die Existenz, müssen wir nachweisen, dass die durch (5.52) definierte Abbildung ∇ die Axiome (5.1) erfüllt. Das aber prüft man leicht nach. \square

Definition 142. Ein Zusammenhang heißt *metrisch* genau dann, wenn $Q = 0$ ($\Leftrightarrow \nabla_X g = 0 \forall X$) und *torsionsfrei* genau dann, wenn $T = 0$ ($\Leftrightarrow \Theta = 0$).

Korollar 143. *Auf einer Mannigfaltigkeit mit Metrik gibt es genau eine metrische und torsionsfreie kovariante Ableitung. Diese heißt Levi-Civita kovariante Ableitung und entsteht aus (5.52) durch streichen der dritten und vierten Zeile:*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = +X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \quad (5.53a)$$

Bezüglich eines lokal definierten Paares dualer Basisfelder $\{e_a\}_{a=1\dots m}$ und $\{\theta^a\}_{a=1\dots m}$ ist (5.53a) für $X = e_a$, $Y = e_b$ und $Z = e_c$ äquivalent zu folgender Komponentenform, in der $g_{ab} := g(e_a, e_b)$ ist und $e_a g_{bc} = e_a(g_{bc})$ die Ableitung der lokalen Funktion g_{bc} nach dem lokalen Vektorfeld e_a bezeichnet:

$$2g_{cn} \omega_{ab}^n = -e_c g_{ab} + e_a g_{bc} + e_b g_{ca} + g_{cn} C_{ab}^n - g_{an} C_{bc}^n + g_{bn} C_{ca}^n. \quad (5.54)$$

Mit Hilfe der inversen Matrix g^{ab} zu g_{ab} kann man dies dann wie folgt nach den Zusammenhangskomponenten ω_{ab}^c auflösen:

$$\omega_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cn} (-e_n g_{ab} + e_a g_{bn} + e_b g_{an}) + \frac{1}{2} (C_{ab}^c + g^{cn} C_{na}^m g_{bm} + g^{cn} C_{nb}^m g_{am}) \quad (5.55)$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile noch die Antisymmetrie von C_{ab}^c im unteren Indexpaar ausgenutzt. Somit sind bei gegebener Basis $\{e_a\}_{a=1\dots n}$ (und damit bekannten Koeffizientenfunktionen C_{ab}^c) und gegebener Metrik (und damit bekannten Koeffizientenfunktionen g_{ab}) die Koeffizientenfunktionen ω_{ab}^c berechenbar. Man beachte die Symmetrieeigenschaften im Indexpaar (a, b) auf der rechten Seite von (5.55): Die Klammer mit den drei Termen ∂g ist symmetrisch, der Term C_{ab}^c ist antisymmetrisch und die verbleibenden zwei Terme zusammengenommen wieder symmetrisch. Der in (a, b) symmetrische Anteil von ω_{ab}^c besteht also nicht nur aus den ∂g – Anteilen, sondern zusätzlich aus den beiden letzten Termen mit den Koeffizienten C .

Für Koordinatenbasisfelder $e_a = \partial/\partial x^a =: \partial_a$ hat man

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cn} (-\partial_n g_{ab} + \partial_a g_{bn} + \partial_b g_{na}). \quad (5.56)$$

In diesem Falle nenne man die Koeffizientenfunktionen Γ_{ab}^c auch die *Christoffel Symbole*. Zwischen ihnen und den partiellen Ableitungen der Metrik besteht eine lineare Bijektion, denn aus (5.56) folgt auch umgekehrt

$$\partial_c g_{ab} = g_{an} \Gamma_{bc}^n + g_{bn} \Gamma_{ac}^n. \quad (5.57)$$

Allgemein gilt: Ist ∇ metrisch und $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein lokales Basisfeld in $U \subset M$, bezüglich dem die Koeffizienten $g_{ab} := g(e_a, e_b)$ konstant sind, dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{e_a} (g(e_b, e_c)) = g(\nabla_{e_a} e_b, e_c) + g(e_b, \nabla_{e_a} e_c) \\ &= g_{cn} \omega_{ab}^n + g_{bn} \omega_{ac}^n. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Das bedeutet, dass alle durch $\alpha \in \{1, \dots, \dim(M)\}$ nummerierten Endomorphismen $e_b \mapsto \omega_{ab}^c e_c$ eines jeden Tangentialraumes $T_p(M)$ mit $p \in U$ bezüglich g_p antisymmetrisch sind. Setzt man (Achtung: Der runtergezogene Index steht unter in der Mitte):

$$\omega_{abc} := g_{bn} \omega_{ac}^n. \quad (5.59)$$

dann gilt also

$$\omega_{abc} = -\omega_{acb}. \quad (5.60)$$

Sei ∇ die Levi-Civita kovariante Ableitung einer metrischen Mannigfaltigkeit und $\hat{\nabla}$ eine weitere metrische, aber nicht notwendigerweise torsionsfreie kovariante Ableitung. Zweimalige Anwendung der allgemeine Formel (5.52) auf $\hat{\nabla}$ und ∇ und Subtraktion der 2. von der ersten Formel ergibt dann

$$g(\hat{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z) =: K(X, Y, Z), \quad (5.61)$$

wobei K gleich einen eigenen Namen erhält:

Definition 144. Der Tensor $K \in ST_3^0(M)$, mit

$$K(X, Y, Z) := \frac{1}{2}(-\Theta(X, Y, Z) + \Theta(Y, Z, X) + \Theta(Z, X, Y)) \quad (5.62)$$

heißt *Kontorsion*.

Dann kann man sich nun fragen, unter welchen Bedingungen an die Torsion von $\hat{\nabla}$ beide Zusammenhänge die gleichen Geodätischen besitzen. Ist also γ Geodätische von ∇ , so dass $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, so soll auch $\hat{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ gelten und umgekehrt. Dies muss für jede Startrichtung $\dot{\gamma}$ gelten, was gemäß (5.61) genau dann der Fall ist, wenn $K(X, X, Y)$ für alle $X, Y \in TM$ verschwindet, also die Kontorsion im ersten Eintragspaar antisymmetrisch ist:

$$K(X, Y, Z) + K(Y, X, Z) = 0. \quad (5.63a)$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= -\Theta(X, Y, Z) + \Theta(Y, Z, X) + \Theta(Z, X, Y) \\ &\quad - \Theta(Y, X, Z) + \Theta(X, Z, Y) + \Theta(Z, Y, X) \\ &= -2(\Theta(X, Y, Z) + \Theta(Y, X, Z)), \end{aligned} \quad (5.63b)$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit von (5.63a) die Antisymmetrie (5.33b) von Θ unter Vertauschen des zweiten und dritten Eintrags benutzt haben. Aus (5.63b) folgt also, dass die Antisymmetrie der Kontorsion in den ersten beiden Einträgen äquivalent ist der Antisymmetrie von Θ ebenfalls in den ersten beiden Einträgen. Wegen der sowieso bestehenden Antisymmetrie von Θ im 2. und 3. Eintrag ist das aber äquivalent der vollständigen Antisymmetrie der kovarianten Torsion Θ .

Eine offensichtliche, leichte Verallgemeinerung ist nun gegeben durch

Proposition 145. *Zwei bezüglich der gleichen Metrik metrische Zusammenhänge ∇ und $\hat{\nabla}$ haben genau dann die gleichen Geodätischen, wenn die Differenz $\Theta - \hat{\Theta}$ ihrer kovarianten Torsionstensoren vollständig antisymmetrisch ist.*

Allgemein gilt zunächst ohne Bezug auf eine metrische Struktur, dass ein Zusammenhang unter Festlassung seiner Geodätischen immer so abgeändert werden kann, dass seine Torsion einen beliebigen vorgegebenen Werte annimmt. Existiert eine Metrik g , so wird durch diese Abänderung der metrische Defekt i.A. ebenfalls verändert. Insbesondere wird ein ehemals metrischer Zusammenhang i.A. in einen mit nicht-verschwindenden metrischen Defekt übergehen, es sei denn, die Differenz der kovarianten Torsionstensoren ist wieder vollständig antisymmetrisch.

Proposition 146. Sei ∇ ein Zusammenhang mit Torsion T . Sei ferner $\hat{T} \in ST_2^1(M)$ ein in den kovarianten Einträgen antisymmetrisches Tensorfeld. Dann hat

$$\hat{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2}(\hat{T} - T) \quad (5.64)$$

die gleichen Geodätischen wie ∇ aber die Torsion \hat{T} . Ist g eine Metrik, dann unterscheiden sich die metrischen Defekte von $\hat{\nabla}$ und ∇ durch

$$\Delta Q(X, Y, Z) = -\frac{1}{2}[\Delta\Theta(Y, X, Z) + \Delta\Theta(Z, X, Y)], \quad (5.65)$$

wobei $\Delta Q := \hat{Q} - Q$ und $\Delta\Theta := \hat{\Theta} - \Theta$. Der metrische Defekt bleibt also genau dann ungeändert, wenn $\Delta\Theta$ total antisymmetrisch ist.

Beweis. Aus der Definition (5.31b) der Torsion, angewandt auf den durch (5.64) definierten Zusammenhang $\hat{\nabla}$, folgt sofort, dass \hat{T} die Torsion von $\hat{\nabla}$ ist. Genauso folgt aus der Definition (5.50b) des metrischen Defekts, angewandt auf den durch (5.64) definierten Zusammenhang $\hat{\nabla}$, sofort die Beziehung (5.65). \square

5.8 Die Fermi kovariante Ableitung entlang von Kurven

Sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit mit Metrik und ∇ die zugehörige Levi Civita kovariante Ableitung. Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben definiert diese eine kovariante Ableitung entlang von Kurven, die wir mit $\nabla_{\dot{\gamma}}$ bezeichnen, da sie nur von $\dot{\gamma}$ abhängt. Mit ihrer Hilfe definieren wir nun eine neue kovariante Ableitung entlang γ , die sowohl von $\dot{\gamma}$ als auch von $\ddot{\gamma}$ abhängt und die wir mit dem Symbol F_{γ} bezeichnen. Dabei erinnert F an den Namen Fermi und als Index ist γ statt $\dot{\gamma}$ gewählt, da die Ableitung eben nicht nur von $\dot{\gamma}$ abhängt.

Wir setzen γ als mindestens zweimal stetig differenzierbar voraus. Für den Fall, dass g nicht positiv definit ist, nehmen wir an, dass $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ nirgends entlang der Kurve verschwindet. Dadurch ist gewährleistet, dass an jedem Punkt $p \in \text{Bild}(\gamma) \subset M$ der Vektor $\dot{\gamma}_p$ den Tangentialraum $T_p(M)$ in eine direkte g -orthogonale Summe zerlegt:

$$T_p(M) = T_p^{\parallel}(M) \oplus T_p^{\perp}(M) \quad (5.66)$$

wobei $T_p^{\parallel}(M) := \text{Span}\{\dot{\gamma}_p\}$, also eindimensional ist, und $T_p^{\perp}(M)$ definiert ist als g -orthogonales Komplement. Die Bedingung $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \neq 0$ sichert gerade, dass $T_p^{\parallel}(M) \cap T_p^{\perp}(M) = \{0\}$, die Summe also direkt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Parametrisierung von γ durch die Bogenlänge

(bezüglich g) gegeben sei, also gilt

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \epsilon, \quad (5.67)$$

wobei $\epsilon = \pm 1$. Eine unmittelbare Folge davon ist

$$g(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0. \quad (5.68)$$

Die zu (5.66) gehörigen, für jeden Punkt $p \in \text{Bild}(\gamma)$ gültigen Projektionsabbildungen sind dann durch folgende Ausdrücke gegeben durch

$$P_{\dot{\gamma}}^{\parallel} : T(M) \rightarrow T^{\parallel}(M), \quad X \mapsto \epsilon g(X, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (5.69a)$$

$$P_{\dot{\gamma}}^{\perp} : T(M) \rightarrow T^{\perp}(M), \quad X \mapsto X - \epsilon g(X, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (5.69b)$$

Man beachte, dass die Projektoren an jedem Punkt p folgende Eigenschaften besitzen:

$$P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel} + P_{\dot{\gamma}_p}^{\perp} = \text{id}_{T_p(M)}, \quad (5.70a)$$

$$P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel} \circ P_{\dot{\gamma}_p}^{\perp} = P_{\dot{\gamma}_p}^{\perp} \circ P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel} = 0, \quad (5.70b)$$

$$(P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel})^{\dagger} = P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel} \quad \text{und} \quad (P_{\dot{\gamma}_p}^{\perp})^{\dagger} = P_{\dot{\gamma}_p}^{\perp}. \quad (5.70c)$$

Dabei haben wir die Definition 180 der adjungierten Abbildung aus Abschnitt 7.2 verwendet, so dass (5.70c) die Selbstadjungiertheit bezüglich g_p der Projektoren ausdrückt, also die Tatsache, dass $g_p(P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel} X_p, Y_p) = g_p(X_p, P_{\dot{\gamma}_p}^{\parallel} Y_p)$ und ebenso für $P_{\dot{\gamma}_p}^{\perp}$.

Definition 147. Die Fermi-Ableitung ist eine kovariante Ableitung entlang von Kurven im Sinne der Definition 122, wobei im Falle nicht positiv-definiter Metriken g die Kurven auf solche mit $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \neq 0$ eingeschränkt werden. Sie ist auf Vektorfeldern über $\text{Bild}(\gamma)$ definiert durch

$$F_{\gamma} := P_{\dot{\gamma}}^{\parallel} \circ \nabla_{\dot{\gamma}} \circ P_{\dot{\gamma}}^{\parallel} + P_{\dot{\gamma}}^{\perp} \circ \nabla_{\dot{\gamma}} \circ P_{\dot{\gamma}}^{\perp}, \quad (5.71)$$

wobei $\nabla_{\dot{\gamma}}$ die Levi-Civita kovariante Ableitung von Vektorfeldern über γ ist. Man zeigt nun analog zu (5.4), dass die Bedingungen (5.22b), (5.22d) und (5.22e) die Ableitungen F_{γ} zunächst auf Dual-Vektorfeldern und dann über allen Tensorfeldern über γ definierten.

Die Notation auf der rechten Seite von (5.71) ist insofern irreführend, als die Abhängigkeit von γ nur durch die Indizierungen der Projektoren und der kovarianten Ableitung ∇ durch $\dot{\gamma}$ erfolgt. Zwar hängen diese Einzeloperatoren individuell

tatsächlich nur von $\dot{\gamma}$ ab, ihre Komposition hängt dann aber auch vom Beschleunigungsfeld $\ddot{\gamma} := \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ ab, da die Differentiation $\nabla_{\dot{\gamma}}$ auch auf das rechts von ihr stehende $\dot{\gamma}$ in $P_{\dot{\gamma}}^{\parallel}$ bzw. $P_{\dot{\gamma}}^{\perp}$ wirkt. Dies wird durch die weitere Auswertung von (5.71) (siehe (5.77) unten) explizit werden.

Zunächst stellen wir fest, dass wegen (5.70a) gilt $\nabla_{\dot{\gamma}} = (P_{\dot{\gamma}}^{\parallel} + P_{\dot{\gamma}}^{\perp}) \circ \nabla_{\dot{\gamma}} \circ (P_{\dot{\gamma}}^{\parallel} + P_{\dot{\gamma}}^{\perp})$ und somit (5.71) äquivalent ist zu

$$F_{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} - (D_1 + D_2), \quad (5.72)$$

wobei

$$D_1 := P_{\dot{\gamma}}^{\parallel} \circ \nabla_{\dot{\gamma}} \circ P_{\dot{\gamma}}^{\perp}, \quad (5.73a)$$

$$D_2 := P_{\dot{\gamma}}^{\perp} \circ \nabla_{\dot{\gamma}} \circ P_{\dot{\gamma}}^{\parallel}. \quad (5.73b)$$

Gemäß Proposition 119 ist die Differenz zweier kovarianter Ableitungen über γ ein Tensorfeld über γ , so dass die Summe $D_1 + D_2$ ein Element in $ST_1^1(\gamma)$ ist. Tatsächlich trifft dies aber schon für D_1 und D_2 einzeln zu, denn die Abbildungen $ST_1^1(\gamma) \ni X \mapsto D_1(X)$ und $X \mapsto D_2(X)$ sind $C^\infty(\gamma)$ -linear, d.h. es gilt z.B. $D_1(f \cdot X) = f \cdot D_1(X)$ für alle Funktionen f und Vektorfelder X über γ , was sofort aus den Definitionen (5.73) und (5.70b) folgt. Proposition 128 impliziert dann die gemachte Aussage. Darüber hinaus rechnet man aus den Definitionen (5.73) unter Benutzung von (5.70b) und (5.70c) leicht nach, dass an jedem Punkt p die Abbildungen D_{1p} und D_{2p} zueinander anti-selbstadjungiert bezüglich g_p sind:

$$D_{1p}^\dagger = -D_{2p} \quad \text{and} \quad D_{2p}^\dagger = -D_{1p}. \quad (5.74)$$

Die Tensorfelder $D_{1,2}$ kann man nun durch die Kurve γ und ihre Ableitungen ausdrücken. Mit $X \in ST(\gamma)$, ist etwa nach (5.69a)

$$\begin{aligned} D_2(X) &= P_{\dot{\gamma}}^{\perp} \circ \nabla_{\dot{\gamma}} \circ P_{\dot{\gamma}}^{\parallel}(X) \\ &= \epsilon P_{\dot{\gamma}}^{\perp}(g(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma} + \text{Terme} \propto \dot{\gamma}) \\ &= \epsilon g(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (5.75)$$

wobei wir $\nabla_{\dot{\gamma}}g = 0$, $P_{\dot{\gamma}}^{\perp}\dot{\gamma} = 0$ und $P_{\dot{\gamma}}^{\perp}\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}$ benutzt haben. Aus (5.74) folgt dann sofort der Ausdruck für D_1 (oder ebenso leicht durch nachrechnen). Schreibt man $g(Z, \cdot) = Z^b$ für das zum Vektorfeld Z mittels der Metrik g gehörige Dual-Vektorfeld (dies ist genauer in Abschnitt 7.2 erklärt; vgl. auch Bemerkung 178 für die Bezeichnung) so erhält man

$$D_1 = -\epsilon \dot{\gamma} \otimes \ddot{\gamma}^b, \quad (5.76a)$$

$$D_2 = +\epsilon \ddot{\gamma} \otimes \dot{\gamma}^b, \quad (5.76b)$$

und

$$F_\gamma = \nabla_{\dot{\gamma}} + \underbrace{\epsilon(\dot{\gamma} \otimes \dot{\gamma}^b - \dot{\gamma} \otimes \dot{\gamma}^b)}_{\in \mathcal{ST}_1^1(\gamma)}. \quad (5.77)$$

Einige charakteristische Eigenschaften der Fermi Ableitung seien zusammengefasst in folgender

Proposition 148.

$$F_\gamma = \nabla_{\dot{\gamma}} \Leftrightarrow \gamma \text{ ist Geodätische,} \quad (5.78a)$$

$$F_\gamma \dot{\gamma} = 0, \quad (5.78b)$$

$$F_\gamma g = 0. \quad (5.78c)$$

Beweis. (5.78a) ist nicht unmittelbar aus der Anfangsdefinition (5.71) ersichtlich, folgt aber sofort aus (5.77). (5.78a) ist hingegen folgt sofort aus (5.71) ersichtlich wegen (5.68), d.h. $P_{\dot{\gamma}}^l \dot{\gamma} = 0$, folgt aber ebenfalls auch sofort aus (5.77). Um (5.78c) zu beweisen berechnen wir mit Hilfe der Regeln (5.22b), (5.22d) und (5.22e), sowie $\nabla_{\dot{\gamma}} g = 0$:

$$\begin{aligned} (F_\gamma g)(X, Y) &= \dot{\gamma}(g(X, Y)) - g(F_\gamma X, Y) - g(X, F_\gamma Y) \\ &= g(\nabla_{\dot{\gamma}} X - F_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}} Y - F_\gamma Y) \\ &= g((D_1 + D_2)X, Y) + g(X, (D_1 + D_2)Y) = 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

wobei die letzte Gleichung aus (5.74), d.h. $(D_1 + D_2)^\dagger = -(D_1 + D_2)$ folgt. \square

5.9 Die Cartanschen Strukturgleichungen

Bezüglich lokaler dualer Basisfelder $\{e_a\}_{a=1\dots n}$ $\{\theta^a\}_{a=1\dots n}$ in $U \subset M$ schreiben wir die Tensoren der Torsion und Krümmung in Komponentenform:

$$T = T_{ab}^c e_c \otimes \theta^a \otimes \theta^b = \frac{1}{2} T_{ab}^c e_c \otimes (\theta^a \wedge \theta^b), \quad (5.80a)$$

$$R = R_{cab}^d e_d \otimes \theta^c \otimes \theta^a \otimes \theta^b = \frac{1}{2} R_{cab}^d \underbrace{(e_d \otimes \theta^c)}_{\in \text{End}(T(M)|_U)} \otimes \underbrace{(\theta^a \wedge \theta^b)}_{\in \wedge^2 T(M)|_U}. \quad (5.80b)$$

Die Torsion T ließt man so als eine $T(M)$ -wertige 2-Form, die Krümmung als eine $\text{End}(T(M))$ -wertige 2-Form. Entsprechend ließt man ω als eine $\text{End}(T(M))$ -wertige 1-Form:

$$\omega = \omega_{ab}^c \theta^a \otimes \underbrace{(e_c \otimes \theta^b)}_{\text{End}(T(M)|_U)}. \quad (5.81)$$

Wir schreiben auch $\omega_b^a := \omega_{cb}^a \theta^c$. Metrizität bedeutet nach (5.58) nun gerade, dass der Wertebereich in $\text{End}(T_p(M))$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(g_p)$ der orthogonalen Gruppe $O(g_p)$ des Paares $(T_p(M), g_p)$ liegt, wobei

$$O(g_p) := \{A \in \text{GL}(T_p(M)) \mid g_p(A(X), A(Y)) = g_p(X, Y) \forall X, Y \in T_p(M)\} \quad (5.82)$$

$$\mathfrak{o}(g_p) := \{A \in \text{End}(T_p(M)) \mid g_p(A(X), Y) = -g_p(X, A(Y)) \forall X, Y \in T_p(M)\} \quad (5.83)$$

Man beachte noch einen wichtigen Unterschied zwischen (5.80) und (5.81): Die Interpretation der Torsion und Krümmung in der angegebenen Weise ist unabhängig von der gewählten Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Das ist gerade äquivalent der Aussage, dass T und R Tensorfelder auf M sind. Im Falle des Zusammenhangs ist das anders: Erst durch Wahl einer Basis kann dem Zusammenhang lokal, d.h. in $U \subset M$, ein Tensorfeld (5.81) mit der Interpretation einer $\text{End}(T(M))$ -wertige 1-Form zugeordnet werden. Bezüglich einer anderen Basis $e'_a := f^b_a e_b$ erhält man einen *verschiedenen* Tensor, der sich direkt aus (5.12) ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \omega'^c_{ab} \theta'^a \otimes (e'_c \otimes \theta'^b) \\ &= \omega + [f^{-1}]^c_k e'_a(f^k_b) \theta'^a \otimes (e'_c \otimes \theta'^b) \\ &= \omega + df^k_b \otimes (e_k \otimes \theta'^b) \\ &= \omega + df \cdot f^{-1}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

wobei $df = \theta^a e_a(f) = \theta'^a e'_a(f)$ das äußere Differential einer (lokal definierten) Funktion f ist und wir im letzten Schritt f als lokale, $\text{End}(T(M))$ -wertige Funktion auffassen.

Wir kommen nun zu den Cartanschen Strukturgleichungen. Die *erste Strukturgleichung* bezieht sich auf die Torsion und ergibt sich direkt durch Umschreiben von (5.31b)

$$\begin{aligned} T^c(X, Y) e_c &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X(\theta^a(Y) e_a) - \nabla_Y(\theta^a(X) e_a) - \theta^a([X, Y]) e_a \\ &= \{X(\theta^c(Y)) - Y(\theta^c(X)) - \theta^c([X, Y])\} e_c \\ &\quad + (\omega^c_a(X) \theta^a(Y) - \omega^c_a(Y) \theta^a(X)) e_c \\ &= (d\theta^c(X, Y) + \omega^c_b \wedge \theta^b(X, Y)) e_c. \end{aligned} \quad (5.85a)$$

Dabei haben wir (4.57) benutzt, wonach $d\theta^c(X, Y) = X(\theta^c(Y)) - Y(\theta^c(X)) - \theta^c([X, Y])$. Gleichung (5.85a) schreiben wir auch kurz (Unterdrückung der Matrixindizes)

$$T = d\theta + \omega \wedge \theta. \quad (5.85b)$$

Analog gilt für die Krümmung nach (5.34b):

$$\begin{aligned}
R^c_d(X, Y)e_c &= \nabla_X \nabla_Y e_d - \nabla_Y \nabla_X e_d - \nabla_{[X, Y]} e_d \\
&= \nabla_X(\omega^c_d(Y)e_c) - \nabla_Y(\omega^c_d(X)e_c) - \omega^c_d([X, Y])e_c \\
&= \left\{ X(\omega^c_d(Y)) - Y(\omega^c_d(X)) - \omega^c_d([X, Y]) \right\} e_c \\
&\quad + (\omega^b_c(X)\omega^c_d(Y) - \omega^b_c(Y)\omega^c_d(X)) e_b \\
&= (d\omega^c_d(X, Y) + \omega^c_b \wedge \omega^b_d(X, Y)) e_c.
\end{aligned} \tag{5.86a}$$

Wieder haben wir (5.85a) für $d\omega^c_d(X, Y)$ benutzt. Gleichung (5.86a) Das schreiben wir wieder abkürzend als (Unterdrückung der Matrixindizes)

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega, \tag{5.86b}$$

wobei wir hier für die Matrixwertige 2-Form der Krümmung nicht R sondern Ω geschrieben haben, um nicht mit weiteren Verwendungen desselben Buchstabens (Krümmungstensor, Skalare Krümmung, etc.) in Konflikt zu geraten. Es gilt also

$$\Omega^a_b := \frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d. \tag{5.87}$$

Gleichung (5.85) bezeichnet man als *erste*, Gleichung (5.86) als *zweite Cartansche Strukturgleichung*. Sie gelten bezüglich *jedes* Paares lokaler dualer Basenfelder $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$, insbesondere auch fuer Koordinatenbasen $e_a = \partial/\partial x^a$ bzw. $\theta^a = dx^a$. Wirklich nützlich als effektives Hilfsmittel zur Berechnung der Zusammenhangskomponenten ω^c_{ab} und der Krümmung werden sie aber vor Allem für orthonormierte Basisfelder. Für solche besitzt die Metrik in einem Gebiet $U \subset M$ die Entwicklung

$$g|_U = g_{ab} \theta^a \otimes \theta^b = \sum_{a=1}^{s_+} \theta^a \otimes \theta^a - \sum_{a=s_++1}^{s_++s_-} \theta^a \otimes \theta^a, \tag{5.88}$$

wobei (s_+, s_-) die Signatur von g ist. Dann gilt $\omega_{abc} := g_{ad} \omega^d_{bc} = \pm \omega^c_{ab}$ (vgl. (5.59)). Die Antisymmetrie (5.60) der kovarianten Komponenten ω_{abc} im letzten Indexpaar übersetzt sich dann in die folgende Relation fuer die Komponenten ω^c_{ab} (hier keine Summenkonvention):

$$\omega^c_{ab} = \epsilon_c \omega_{acb} = -\epsilon_c \omega_{abc} = -\epsilon_b \epsilon_c \omega^b_{ac}, \tag{5.89}$$

wobei $\epsilon_a = \pm 1$ den Wert von $g_{aa} = g^{aa}$ bezeichnet.

Gilt die Antisymmetrie $\omega_{abc} = -\omega_{acb}$, dann läßt sich die erste Cartansche Strukturformel wie folgt nach den Komponenten ω_{abc} auflösen: Es ist $d\theta^c(e_a, e_b) =$

$-\theta([e_a, e_b])$ (vgl. (4.57)) und $[e_a, e_b] = C_{ab}^c e_c$ (vgl. (5.32c)), also $d\theta^c(e_a, e_b) = -C_{ab}^c$. Die erste Strukturgleichung (5.85b) ist dann im torsionsfreien Fall ($T = 0$) äquivalent zu

$$d\theta = -\omega \wedge \theta \Leftrightarrow C_{ab}^c = \omega_{ab}^c - \omega_{ba}^c. \quad (5.90)$$

Oder mit den Bezeichnungen (5.59) und $C_{abc} := g_{bd} C_{ac}^d$

$$\begin{aligned} C_{abc} &= \omega_{abc} - \omega_{cba}, \\ C_{bca} &= \omega_{bca} - \omega_{acb}, \\ C_{cab} &= \omega_{cab} - \omega_{bac}, \end{aligned} \quad (5.91)$$

wobei die zweite und dritte Gleichung aus der ersten durch zyklische Vertauschung der Indizes (abc) hervorgehen. Addieren wir nun die erste und zweite Zeile und subtrahieren die dritte, so erhalten wir, unter Benutzung der Antisymmetrie der ω im letzten Indexpaar,

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2}(C_{abc} + C_{bca} - C_{cab}), \quad (5.92)$$

was äquivalent ist zu

$$\omega_{ab}^c = \frac{1}{2}(C_{ab}^c + g^{cn} C_{na}^m g_{bm} + g^{cn} C_{nb}^m g_{am}), \quad (5.93)$$

Dies entspricht gerade (5.55) für den (hier vorliegenden) Fall konstanter Koeffizienten g_{ab} .

Für die explizite Berechnung ist Folgendes wichtig: Oft ist die Metrik in der Form (5.88) gegeben, wobei die θ^a ihrerseits in einer Koordinatenbasis dx^k vorliegen: $\theta^a = \theta_k^a dx^k$. Es ist dann *nicht* nötig, erst umständlich die zu den θ^a duale Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ zu berechnen um durch Kommutatorbildung an die Koeffizienten C_{ab}^c zu kommen. Viel einfacher ist es, die äußeren Ableitungen $d\theta^c$ zu bilden und das Ergebnis (eine 2-Form) in die Basis $\theta^a \wedge \theta^b$ zu entwickeln; denn es gilt

$$d\theta^c = -\frac{1}{2} C_{ab}^c \theta^a \wedge \theta^b \quad (5.94)$$

wie man durch Auswerten beider Seiten auf (e_a, e_b) unter Ausnutzung von (4.57) sofort sieht (vgl. das oberhalb von Gleichung (5.90) Gesagte).

Meist wird man es aber nicht einmal nötig haben, tatsächlich auf diese Weise alle Koeffizienten C_{ab}^c zu bestimmen um mit diesen dann gemäß (5.92) die ω_{ab}^c zu berechnen. In vielen Fällen gelingt es, direkt die 1-Formen $\omega_b^c = \omega_{ab}^c \theta^a$ aus $d\theta^c = -\omega_b^c \wedge \theta^b$ abzulesen, wobei zu beachten ist, dass (5.89) gelten muss.

5.10 Die Bianchi Identitäten

Es gibt zwei Identitäten für die Tensorfelder der Torsion und der Krümmung und deren erste Ableitungen, die für allgemeine Zusammenhänge gelten und in Anwendungen extrem nützlich sind. Am einfachsten sind diese aus den Cartan'schen Strukturgleichungen abzuleiten, wobei ihre Rückübersetzung in die Sprache der kovarianten Ableitung ∇ dann etwas Mühe macht.

Nimmt man die äußere Ableitung der ersten Cartan'schen Strukturgleichung (5.85b), so folgt wegen (4.64), d.h. $d^2 = 0$, und (4.52e) (diese Gleichungen gelten natürlich weiterhin für mehrkomponentige Formen)

$$\begin{aligned} dT &= d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta \\ &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \theta - \omega \wedge (T - \omega \wedge \theta) \\ &= \Omega \wedge \theta - \omega \wedge T, \end{aligned} \quad (5.95)$$

wobei wir die Assoziativität des \wedge -Produktes benutzt haben und beide Cartan'schen Strukturgleichungen um $d\theta$ und $d\omega$ zu eliminieren. Somit erhält man die *erste Bianchi Identität*:

$$dT + \omega \wedge T = \Omega \wedge \theta. \quad (5.96)$$

Die oft nützlichere Komponentenform ergibt sich daraus wie folgt: Wir benutzen (4.67c) und haben

$$\sum_{(bcd)} \left\{ e_b T_{cd}^a + T_{bn}^a C_{cd}^n + \omega_{bn}^a T_{cd}^n \right\} = \sum_{(bcd)} R^a{}_{bcd}. \quad (5.97)$$

Ersetzt man darin gemäß (5.10b) die Ableitung nach e_b durch die kovariante Ableitung, so ist dies (5.97) äquivalent zu

$$\sum_{(bcd)} \left\{ \nabla_b T_{cd}^a + T_{bn}^a C_{cd}^n + T_{nd}^a \omega_{bc}^n + T_{cn}^a \omega_{bd}^n \right\} = \sum_{(bcd)} R^a{}_{bcd}, \quad (5.98)$$

was wegen der Möglichkeit, in jedem Term unter den Summenzeichende Indizes bcd unabhängig zyklisch zu permutieren, äquivalent ist zu

$$\sum_{(bcd)} \left\{ \nabla_b T_{cd}^a + T_{bn}^a (\omega_{dc}^n - \omega_{cd}^n + C_{cd}^n) \right\} = \sum_{(bcd)} R^a{}_{bcd}, \quad (5.99)$$

Mit (5.32d) ist dies wiederum äquivalent zu

$$\sum_{(bcd)} \left\{ \nabla_b T_{cd}^a - T_{bn}^a T_{cd}^n \right\} = \sum_{(bcd)} R^a{}_{bcd}. \quad (5.100)$$

Oder mit allgemeinen Vektorfeldern X, Y, Z geschrieben

$$\sum_{(XYZ)} \left\{ (\nabla_X T)(Y, Z) - T(X, T(Y, Z)) \right\} = \sum_{(XYZ)} R(X, Y)Z. \quad (5.101)$$

Wir kommen nun zur zweiten Identität. Dazu nimmt man die äußere Ableitung der zweiten Cartan'schen Strukturgleichung (5.86b) und erhält

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) \\ &= \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega, \end{aligned} \quad (5.102)$$

und das ist die *zweite Bianchi Identität*:

$$d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = 0. \quad (5.103)$$

Benutzen wir wieder (4.67c), so hat die Komponentenform die Gestalt

$$\sum_{(cde)} \left\{ e_c(R^a_{bde}) + R^a_{bcn} C^n_{de} + \omega_{cn}^a R^n_{bde} - R^a_{nde} \omega_{cb}^n \right\} = 0. \quad (5.104)$$

Mit (5.10b) folgt

$$\sum_{(cde)} \left\{ \nabla_c R^a_{bde} + R^a_{bcn} C^n_{de} + R^a_{bne} \omega_{cd}^n + R^a_{bdn} \omega_{ce}^n \right\} = 0, \quad (5.105)$$

was wegen der Antisymmetrie des Krümmungstensors in zweiten Indexpaar äquivalent ist zu

$$\sum_{(cde)} \left\{ \nabla_c R^a_{bde} + R^a_{bcn} (\omega_{ed}^n - \omega_{de}^n + C^n_{de}) \right\} = 0. \quad (5.106)$$

Mit (5.32d) ist dies wiederum äquivalent zu

$$\sum_{(cde)} \left\{ \nabla_c R^a_{bde} - R^a_{bcn} T^n_{de} \right\} = 0. \quad (5.107)$$

Oder mit allgemeinen Vektorfeldern geschrieben

$$\sum_{(XYZ)} \left\{ (\nabla_X R)(Y, Z) - R((X, T(Y, Z))) \right\} = 0. \quad (5.108)$$

5.11 Symmetrien des Krümmungstensors

Aus der Definition (5.34c) des Krümmungstensors folgt sofort seine Antisymmetrie unter Austausch von X und Y . Für die Komponenten $R^a{}_{bcd}$ bedeutet dies

$$R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bdc} \quad (\text{gilt immer}). \quad (5.109)$$

Mit „gilt immer“ ist gemeint, dass diese Symmetrie für alle Zusammenhänge gilt, also unabhängig davon, ob diese Torsion besitzen oder metrisch sind.

Für torsionsfreie Zusammenhänge ist die erste Bianchi-Identität wegen (5.100) äquivalent zu

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{dbc} + R^a{}_{cdb} = 0 \quad (\text{falls torsionsfrei}). \quad (5.110)$$

Ist nun der Zusammenhang hingegen metrisch (aber nicht notwendig torsionsfrei), so folgt aus (5.58) die Antisymmetrie von ω_{ab} , das heisst

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}, \quad (5.111)$$

wobei $\omega_{ab} := g_{ac}\omega_b^c$. Für die Komponenten R_{abcd} von Riem (vgl. (5.36)) so ergibt sich daraus und (5.86b)

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad ((\text{falls metrisch})). \quad (5.112)$$

Der erste Term der rechten Seite von (5.86b), $d\omega_{ab}$, ist klarerweise antisymmetrisch, und für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega)_{ab} &= \omega_{ac} \wedge \omega_b^c = g^{cd} \omega_{ac} \wedge \omega_{db} \stackrel{(7.6b)}{=} -g^{cd} \omega_{db} \wedge \omega_{ac} \\ &\stackrel{(5.111)}{=} -g^{dc} \omega_{bd} \wedge \omega_{ca} = -(\omega \wedge \omega)_{ba}. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Für den Levi-Civita Zusammenhang gelten somit (5.109,5.110,5.112) gleichzeitig.

Proposition 149. *Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} und $T \in V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ Multiminearform $T \in T_4^0(V)$ mit folgenden Symmetrien (geltend für alle $W, X, Y, Z \in V$)*

$$T(W, X, Y, Z) = T(X, W, Z, Y), \quad (5.114a)$$

$$T(W, X, Y, Z) + T(W, Y, Z, X) + T(W, Z, X, Y) = 0, \quad (5.114b)$$

dann gilt auch

$$T(W, X, Y, Z) = T(Y, Z, W, X). \quad (5.115)$$

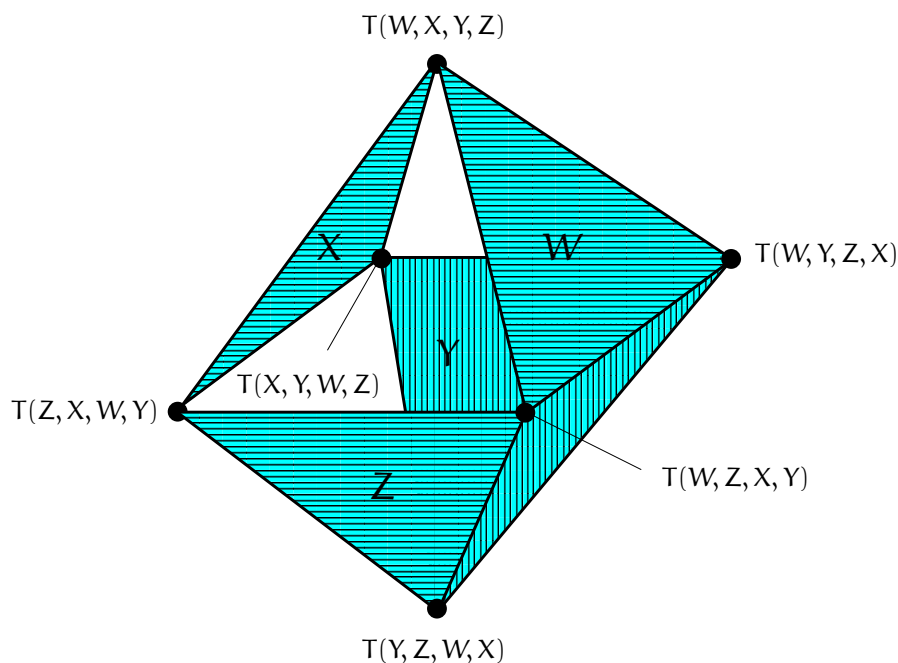


Abbildung 5.1: Zum Beweis von Proposition 149

In Worten: Gilt Symmetrie unter gleichzeitigem Vertauschen des ersten mit dem zweiten und dritten mit dem vierten Eintrags (5.114a), und außerdem das Verschwinden aller zyklischen Summen in den letzten drei Einträgen (5.114b), so folgt die Symmetrie unter eintragsweisen Vertauschen des ersten Paares (W, X) mit dem zweiten (Y, Z) , also (5.115).

Beweis. Man betrachte die Abbildung 5.1. In dieser ist eine Doppelpyramide gezeichnet, deren sechs Ecken jeweils Komponenten von T zugeordnet sind die durch Auswertung von T auf dem 4-Tupel (W, X, Y, Z) und gewissen Permutationen davon entstehen. Von den acht Dreiecksflächen sind vier schraffiert gezeichnet und mit W, X, Y und Z bezeichnet. Für diese gilt, dass die Summe der Komponenten an ihren Ecken gemäß (5.114b) verschwinden, wobei bei den mit X, Y und Z bezeichneten Dreiecken gegebenenfalls noch die Transformationen (5.114a) anzuwenden sind um beziehungsweise die Einträge X, Y und Z an die erste Stelle zu bringen. Die Summe erstreckt sich dann jeweils durch zyklisches Permutieren der komplementären Einträge 2,3 und 4. Bildet man nun die Summe aller Eckkomponenten der oberen Dreiecke W und X und setzt dies gleich der Summe aller

Eckkomponenten der unteren Dreiecke Y und Z (beide Sumen verschwinden ja), so heben sich die vier gemeinsam auftretenden Komponenten weg und man erhält sofort $2T(W, X, Y, Z) = 2T(Y, Z, W, X)$. \square

Diese Proposition kann nun unmittelbar auf den Krümmungstensor Riem des Levi-Civita Zusammenhangs angewendet werden, den für ihn gilt insbesondere (5.114a) wegen der separaten Antisymmetrien (5.109) und (5.112), und (5.114b) ist identisch zu (5.110). Es folgt

Korollar 150. *Der Riemann-Tensor $\text{Riem} \in ST_4^0(M)$ des Levi-Civita Zusammenhangs genügt folgenden Identitäten:*

$$\text{Riem}(W, X, Y, Z) = -\text{Riem}(W, X, Z, Y), \quad (5.116a)$$

$$\text{Riem}(W, X, Y, Z) = -\text{Riem}(X, W, Y, Z), \quad (5.116b)$$

$$\text{Riem}(W, X, Y, Z) = \text{Riem}(Y, Z, W, X), \quad (5.116c)$$

$$\text{Riem}(W, X, Y, Z) + \text{Riem}(W, Y, Z, X) + \text{Riem}(W, Z, X, Y) = 0. \quad (5.116d)$$

Die ersten drei Symmetrien erlauben, für jeden Punkt $p \in M$ den dortigen Tensor Riem_p als symmetrische Bilinearform B_p auf $T_p(M) \wedge T_p(M)$ aufzufassen (vgl. (7.5) für die Definition des \wedge -Produktes). Seien W_p, X_p, Y_p, Z_p in $T_p(M)$, dann ist diese definiert durch

$$K_p(W_p \wedge X_p, Y_p \wedge Z_p) := \text{Riem}_p(W_p, X_p, Y_p, Z_p) \quad (5.117)$$

und bilineare Fortsetzung auf Summen von reinen \wedge -Produkten. Ist n die Dimension der Mannigfaltigkeit, d.h. $\dim(T_p(M)) = n$, so ist (vgl. (7.10b))

$$\dim(T_p(M) \wedge T_p(M)) =: N = \frac{1}{2}n(n-1). \quad (5.118)$$

Auf der anderen Seite ist die Dimension des Vektorraums der symmetrischen Bilinearformen auf einem Vektorraum der Dimension N

$$\dim(\text{symmetrische Bilinearformen}) = \frac{1}{2}N(N+1). \quad (5.119)$$

Die Dimension D des Vektorraums der symmetrischen Bilinearformen auf $T_p(M) \wedge T_p(M)$ ist daher

$$D = \frac{1}{8}n(n-1)[n(n-1)+2]. \quad (5.120)$$

Das ist also die Dimension des Untervektorraums aller Tensoren in $T_{p4}^0(M)$, die den ersten drei Symmetriebedingungen (5.116a-5.116c) genügen. Die Bianchi-Identität (5.116d) führt aber zu einer weiteren Reduktion der Dimensionsanzahl.

Dazu beobachten wir, dass (5.116d) aufgrund von (5.116a-5.116c) identisch erfüllt ist, wenn zwei der Einträge W, X, Y, Z übereinstimmen. Auf dem Raum der Tensoren die (5.116a-5.116c) erfüllen gibt also $\binom{n}{4}$ unabhängige Bedingungen (5.116d) falls $n \geq 4$, und keine weitere Bedingung falls $n < 4$. Im ersten Fall ist mit (5.120) und $\binom{n}{4} = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$

$$D - \binom{n}{4} = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \quad (5.121)$$

Diese Formel bleibt für $n = 2$ und $n = 3$ gültig, da dann der gerade gegebene Ausdruck für $\binom{n}{4}$ einfach Null ist. Also ist für $n \geq 2$ die richtige Formel für die Anzahl der Dimensionen des Raumes von Tensoren, die allen Bedingungen (5.116) genügen. Insbesondere gilt für die Anzahl der unabhängigen Komponenten von Riem.

$$\dim(\text{Riem}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 2 \\ 6 & \text{falls } n = 3 \\ 20 & \text{falls } n = 4 \\ 50 & \text{falls } n = 5. \end{cases} \quad (5.122)$$

5.12 Exponentialabbildung und Riemann'sche Normalkoordinaten

Wir wählen einen Punkt $p \in M$ und betrachten die Menge der Geodätischen durch p . Verlangt man, dass $\gamma(t=0) = p$ so ist die Geodätische samt Parametrisierung durch den Anfangspunkt p und die Anfangsgeschwindigkeit $v := \dot{\gamma}(0) \in T_p(M)$ eindeutig bestimmt; wir nennen sie $\gamma_{(p,v)}$. Nach dem Satz von Picard Lindelöf existiert ein maximales Intervall $\hat{J}_{(p,v)} \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in \hat{J}_{(p,v)}$, so dass $\gamma : J_{(p,v)} \rightarrow M$ nicht fortsetzbare (maximale) Geodätische ist die durch p geht und dort die Geschwindigkeit v besitzt.

Ist $\mathbb{R} \ni s > 0$, so geht die Geodätische $\gamma' : s^{-1}J_{(p,v)} \rightarrow M$, $\gamma'(t) := \gamma_{(p,v)}(st)$ ebenfalls durch p und hat dort die Geschwindigkeit sv . Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Geodätengleichung (Picard Lindelöf) gilt also $\gamma' = \gamma_{(p,sv)}$ mit Definitionsbereich $s^{-1}J_{(p,v)}$. Indem wir also s hinreichend klein wählen können wir stets erreichen, dass $1 \in s^{-1}J_{(p,v)}$. Mit anderen Worten, für jedes p existiert eine Umgebung $V_p \subset T_p(M)$ des Nullvektors im Tangentialraum, so dass eine Geodätische durch p mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v \in V_p$ (wodurch der affine Parameter eindeutig festgelegt ist) die 1 in ihrem Parameterintervall $\hat{J}_{(p,v)}$ hat.

Definition 151. Die *Exponentialabbildung* am Punkte $p \in M$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p(M) \supseteq V_p &\rightarrow U_p \subseteq M \\ v &\mapsto \exp_p(v) := \gamma_{(p,v)}(1). \end{aligned} \quad (5.123a)$$

Insbesondere gilt also für die Geodätische durch p :

$$\gamma_{(p,v)}(t) = \exp_p(vt), \quad t \in [0, 1]. \quad (5.123b)$$

Wieder folgt nach dem Satz von Picard Lindelöf für hinreichend oft differenzierbare Zusammenhänge (vgl. Definition 118), insbesondere für glatte, dass \exp_p differenzierbar bzw. glatt ist. Nun ist $T_p(M)$ als Vektorraum selbst eine Mannigfaltigkeit, deren Tangentialraum an der Stelle $v \in T_p(M)$ mit $T_p(M)$ identifiziert werden kann. Das Differential der Exponentialabbildung an der Stelle $0 \in T_p(M)$ berechnet man dann so. Sei $c(t)$ eine Kurve in $T_p(M)$ mit $c(t=0) = 0$ und $\dot{c}(t=0) = v \in T_0(T_p(M)) \cong T_p(M)$, dann ist mit den Bezeichnungen von Abschnitt 4.4

$$(\exp_p)_{*0}(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(c(t)). \quad (5.124)$$

Um dies zu berechnen, kann man irgendeine differenzierbare Kurve $c(t)$ mit $\dot{c}(0) = v$ wählen, z.B. $c(t) = vt$. Dann folgt nach (5.123b) wegen $\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v$ sofort $(\exp_p)_{*0}(v) = v$. Da dies für alle $v \in T_p(M)$ gilt, folgt:

$$(\exp_p)_{*0}(v) = \text{id}_{T_p(M)}. \quad (5.125)$$

Nach dem Satz über inverse Funktionen folgt dann die Existenz von offenen Umgebungen $W_p \subset V_p$ von $0 \in T_p(M)$ und U_p von p in M , so dass $\exp_p|_{U_p} : W_p \rightarrow U_p$ ein Diffeomorphismus (vgl. Definition 96) ist.

Führt man in $T_p(M)$ eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein, so definiert diese eine Abbildung $b : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die jedem Vektor $v \in T_p(M)$ seine Komponenten bezüglich dieser Basis zuweist. Die Abbildung $\phi := b \circ \exp_p^{-1}$ von U_p nach \mathbb{R}^n nehmen wir dann als Karte um p .

Definition 152. Karten der Form

$$\phi := b \circ \exp_p^{-1} \quad (5.126a)$$

heißen *Riemann'sche Karten*, die zugehörigen Komponentenfunktionen

$$x^a := b^a \circ \exp_p^{-1} \quad (5.126b)$$

Riemann'sche Koordinaten. Hier ist b^a die a -te Komponentenfunktion von b . Wählt man die Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $T_p(M)$ so, dass $g_{ab}(p) = \pm \delta_{ab}$, dann spricht man von *Riemann'schen Normalkarten* und *Riemann'schen Normalkoordinaten*.

In Riemann'schen Koordinaten hat die Geodätische $\gamma_{(p,v)}$ demnach die Gestalt

$$\gamma^a(t) := x^a \circ \gamma_{(p,v)} = b^a \circ \exp_p^{-1} \circ \gamma_{(p,v)}(t) \stackrel{(5.123b)}{=} b^a(vt) = v^a t, \quad (5.127)$$

ist also ein Geradenstück (im Kartengebiet $b(W_p) \subseteq \mathbb{R}^n$). Somit ist die Geodäten-gleichung (5.27) in diesen Koordinaten gegeben durch

$$\Gamma_{ab}^c(\vec{v}t)v^a v^b = 0, \quad (5.128)$$

wobei $\vec{v} := (v^1, \dots, v^n) = b(v)$. Diese Gleichung gilt für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{v}t \in W_p$. Insbesondere gilt sie für hinreichend kleine t für alle \vec{v} aus einer offenen Umgebung des Nullvektors in \mathbb{R}^n . Daraus folgt für $t = 0$, dass

$$\Gamma_{(ab)}^c(0) = 0. \quad (5.129)$$

Durch n -malige Differentiation nach t bei $t = 0$ folgen ebenfalls die Bedingungen

$$\Gamma_{(ab,d_1 \dots d_n)}^c(0) = 0. \quad (5.130)$$

Dabei bezeichnen die runden Klammern wie immer die vollständige Symmetrisierung in den eingeklammerten Indizes und das Komma gefolgt von n indizes die n -fache partielle Ableitung nach den entsprechenden Koordinaten.

Aus (5.32e) folgt

Proposition 153. *Am Ursprung eines Riemannschen Koordinatensystems sind die Zusammenhangskomponenten gleich den Komponenten der Torsion,*

$$\Gamma_{ab}^c(0) = T_{ab}^c. \quad (5.131)$$

Für einen torsionsfreien Zusammenhang verschwinden diese also.

Verschwindet die Torsion an einem Punkte $p \in M$ nicht, so ist klar, dass die Zusammenhangskoeffizienten in *keiner* Karte verschwinden; denn der antisymmetrische Anteil, also die Torsion am Punkte p , ist ja der nicht-verschwindende Wert eines Tensorfeldes dessen Komponenten in keiner Karte verschwinden können.

Im Folgenden schränken wir uns auf den Levi-Civita Zusammenhang ein. Für diesen gilt natürlich in Riemann'schen Normalkoordinaten $\Gamma_{ab}^c(0) = 0$, was wegen (5.57) gleichbedeutend ist mit dem Verschwinden aller ersten partiellen Ableitungen des metrischen Tensors: $\partial_c g_{ab}(0) = 0$. Die Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensor sind durch (5.35d) gegeben. Am Ursprung des Riemann'schen

Normalkoordinatensystems verschwinden alle nicht abgeleiteten Γ s und alle partiellen Ableitungen von g_{ab} und g^{ab} (letzteres wegen $\partial_c g^{ab} = -g^{an} g^{bm} \partial_c g_{nm}$), so dass man nach kurzer Rechnung folgenden Ausdruck erhält:

$$R_{abcd}(0) = -\frac{1}{2}(g_{ac,bd} + g_{bd,ac} - g_{ad,bc} - g_{bc,ad}), \quad (5.132)$$

wobei wir hier und im Folgenden $g_{ab,cd} := \partial_{cd}^2 g_{ab}(0)$ setzen und häufig benutzen werden, dass Symmetrie sowohl unter Vertauschen von a mit b als auch von c mit d herrscht.

Wir zeigen nun, dass unter Analytizitätsvoraussetzungen diese Beziehung invertiert werden kann, man also die zweiten Ableitungen des metrischen Tensors am Ursprung des Riemann'schen Normalkoordinatensystems durch die dortigen Komponenten des Riemann'schen Tensors ausdrücken kann. Genauer gilt:

Lemma 154. *Seien die Koeffizienten g_{ab} des metrischen Tensors bezüglich Riemann'scher Normalkoordinaten analytisch am Ursprung, dann gilt*

$$g_{ab,cd} = -\frac{1}{3}(R_{acbd}(0) + R_{adbc}(0)) \quad (5.133)$$

Beweis. Nach Voraussetzung können wir g_{cd} in einer Umgebung des Ursprungs Taylor entwickeln. Da die ersten Ableitungen am Ursprung verschwinden folgt

$$g_{ab}(\vec{v}) = g_{ab}(0) + \frac{1}{2}g_{ab,cd}v^c v^d + O(3). \quad (5.134)$$

Daraus folgt also etwa $\partial_c g_{ab} = g_{ab,cd}v^d$. Trägt man dies Entwicklung in (5.128) ein, wobei die Koeffizienten Γ_{ab}^c durch die g_{ab} und deren Ableitungen wie in (5.56) auszudrücken sind, so folgt

$$(-g_{ab,cd} + g_{ca,bd} + g_{bc,ad})v^a v^b v^d = 0. \quad (5.135)$$

Da dies für alle \vec{v} einer offenen Umgebung des Nullvektors gilt, muss der in (abd) vollständig symmetrische Anteil der Klammer verschwinden, was wegen der bereits vorhandenen Symmetrie in (ab) gleichbedeutend mit dem Verschwinden der in (abd) zyklischen Summe ist. Das ergibt

$$2(g_{ca,bd} + g_{cb,da} + g_{cd,ab}) - (g_{bd,ca} + g_{da,cb} + g_{ab,cd}) = 0. \quad (5.136a)$$

Die Terme mit negativen Vorzeichen entstehen aus den mit positiven Vorzeichen durch eintragsweises Vertauschen der Indexpaare vor und nach dem Komma. Wegen der Symmetrien $g_{ab,cd} = g_{ba,cd} = g_{ab,dc}$ besagt (5.136a), dass die zweifache zyklische Summe über drei Indizes bei festgehaltenem Index aus dem ersten Paar gleich ist der zyklischen Summe bei festgehaltenem Index aus dem zweiten Paar.

Wir zeigen nun, dass dies das Verschwinden jeder der beiden möglichen zyklischen Summen impliziert. Dazu schreiben wir (5.136a) noch zweimal an, das erste Mal mit den Indizes c und a vertauscht, das zweite Mal mit den Indizes c und b vertauscht:

$$2(g_{ac,bd} + g_{ab,dc} + g_{ad,cb}) - (g_{bd,ac} + g_{dc,ab} + g_{cb,ad}) = 0, \quad (5.136b)$$

$$2(g_{ba,cd} + g_{bc,da} + g_{bd,ac}) - (g_{cd,ba} + g_{da,bc} + g_{ac,bd}) = 0. \quad (5.136c)$$

Addition aller drei Gleichungen liefert

$$g_{ab,cd} + g_{bc,ad} + g_{ca,bd} = 0. \quad (5.137a)$$

also das Verschwinden der zyklischen Summe bei festgehaltenem Index aus dem zweiten Paar. Einsetzen in (5.136a) liefert dann das Verschwinden der zyklischen Summe bei festgehaltenem Index aus dem ersten Paar:

$$g_{ab,cd} + g_{ac,da} + g_{ad,bc} = 0. \quad (5.137b)$$

Subtraktion der beiden Gleichungen (5.137) voneinander ergibt schließlich

$$g_{ab,cd} = g_{cd,ab}. \quad (5.138)$$

Benutzt man diese Symmetrie in (5.132) so folgt

$$R_{abcd}(0) = -(g_{ac,bd} - g_{ad,bc}), \quad (5.139)$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} R_{acbd}(0) + R_{adb c}(0) &= -(g_{ab,cd} - g_{ad,cb}) - (g_{ab,dc} - g_{ac,db}) \\ &= -2g_{ab,cd} + (g_{ad,cb} + g_{ac,db}) \\ &= -3g_{ab,cd}, \end{aligned} \quad (5.140)$$

wobei wir im letzten Schritt (5.137b) verwendet haben um den Term in Klammern zu $-g_{ab,cd}$ umzuformen. \square

Als unmittelbare Folge von (5.134) und (5.133) haben wir

Proposition 155. *Seien die Koeffizienten g_{ab} des metrischen Tensors bezüglich Riemann'scher Normalkoordinaten $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ analytisch am Ursprung, dann gilt*

$$g_{ab}(\vec{v}) = g_{ab}(0) - \frac{1}{3}R_{acbd}(0)v^c v^d + O(3). \quad (5.141)$$

Mit Hilfe der Riemann'schen Koordinaten erhält der Krümmungstensor des Levi-Civita Zusammenhangs an einem Punkt die anschauliche Bedeutung der Abweichung der metrischen Koeffizienten in führender (quadratischer) Ordnung.

Bemerkung 156. Die Metrik in Riemann'schen Koordinaten kann auch in folgender (ursprünglich von Riemann angegebener) Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} g &= g_{ab}(0) dv^a \otimes dv^b + \frac{1}{2} g_{ab,cd} v^c v^d dv^a \otimes dv^b \\ &= g_{ab}(0) dv^a \otimes dv^b + \frac{1}{6} g_{ab,cd} (v^a dv^c - v^c dv^a) \otimes (v^b dv^d - v^d dv^b) \end{aligned} \quad (5.142)$$

Das ist eine direkte Folge der Symmetrien von $g_{ab,cd}$; denn einerseits gilt für beliebige X^a, Y^b wegen (5.137a) und der Symmetrie im 2. Indexpaar

$$\begin{aligned} g(X, X, Y, Y) &:= g_{ab,cd} X^a X^b Y^c Y^d \\ &= -g(X, Y, X, Y) - g(X, Y, Y, X) \\ &= -2g(X, Y, X, Y). \end{aligned} \quad (5.143)$$

Auf den anderen Seite ist

$$\begin{aligned} g_{ab,cd} (X^a Y^c - X^c Y^a) (X^b Y^d - X^d Y^b) \\ &= g(X, X, Y, Y) - g(X, Y, Y, X) - g(Y, X, X, Y) + g(Y, Y, X, X) \\ &= 3g(X, X, Y, Y), \end{aligned} \quad (5.144)$$

wobei wir sowohl (5.143) benutzt haben als auch (5.138) und die Symmetrie im ersten und zweiten Indexpaar. Somit gilt allgemein

$$g_{ab,cd} X^a X^b Y^c Y^d = \frac{1}{3} g_{ab,cd} (X^a Y^c - X^c Y^a) (X^b Y^d - X^d Y^b). \quad (5.145)$$

5.13 Die Schnittkrümmung

In Abschnitt 5.11 haben wir gesehen, dass der Krümmungstensor des Levi-Civita Zusammenhangs eine symmetrische Bilinearform auf dem Raum der 2-Formen definiert. Natürlich ist diese – wie jede symmetrische Bilinearform – durch ihre zugehörige quadratische Form eindeutig charakterisiert. Tatsächlich gilt aber ein weit stärkeres Resultat, nämlich dass die Bilinearform durch die Einschränkung der zugehörigen quadratischen Form auf reine \wedge -Produkte bestimmt ist. Dies ist eine Folge der Bianchi-Identität (5.116d). Es gilt allgemein

Lemma 157. Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} und $T \in V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ Multilinearform $T \in T_4^0(V)$ mit den Symmetrien (5.116). Dann ist T durch die Komponenten

$$T(X, Y, X, Y) \quad \text{für alle } X, Y \in V \quad (5.146)$$

eindeutig festgelegt.

Beweis. Wir müssen zeigen: Existieren zwei Tensoren $T_1, T_2 \in T_4^0(V)$, so dass $T_1(X, Y, X, Y) = T_2(X, Y, X, Y)$ für alle $X, Y \in V$, dann $T_1 = T_2$. Dies ist äquivalent des Aussage: Ist $T(X, Y, X, Y) = 0$ für alle $X, Y \in V$, dann $T = 0$ (man setze $T = T_1 - T_2$). Sei also nun T so, dass $T(X, Y, X, Y) = 0$ für alle $X, Y \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= T(X, Y + Z, X, Y + Z) \\ &= T(X, Y, X, Y) + T(X, Z, X, Z) + T(X, Y, X, Z) + T(X, Z, X, Y) \\ &= T(X, Y, X, Z) + T(X, Z, X, Y) \\ &= T(X, Y, X, Z) - T(X, Y, Z, X) - T(X, X, Y, Z) \\ &= 2T(X, Y, X, Z), \end{aligned} \quad (5.147)$$

wobei wir (5.116d) im vorletzten und (5.116a, 5.116b) im letzten Schritt verwendet haben. Das Verschwinden von $T(X, Y, X, Z)$ für alle $X, Y, Z \in V$ ist äquivalent der Aussage, dass T antisymmetrisch bezüglich Austausch des 1. und 3. Eintrags ist. Mit (5.116a, 5.116b) folgt daraus die vollständige Antisymmetrie von T . Dann folgt aber aus (5.116d) $T(W, X, Y, Z) + T(W, Y, Z, X) + T(W, Z, X, Y) = 3T(W, X, Y, Z) = 0$ für alle $W, X, Y, Z \in V$, also $T = 0$. \square

Somit ist Riem_p durch alle $\text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$ mit $X_p, Y_p \in T_p(M)$ bestimmt. In $T_p(M)$ ist die nicht-entartete symmetrische Bilinearform g_p definiert. Wir nehmen an, dass ihre Einschränkung auf die Ebene $\text{Span}\{X_p, Y_p\} \subset T_p(M)$ ebenfalls nicht entartet ist. In der Sprechweise der Relativitätstheorie heißt dies, dass die Ebene $\text{Span}\{X_p, Y_p\}$ nicht „lichtartig“ ist, also keinen Vektor Z_p mit $g_p(Z_p, Z_p) = 0$ enthält. Dies ist äquivalent der Bedingung

$$\det(M) := g_p(X_p, X_p) g_p(Y_p, Y_p) - [g(X_p, Y_p)]^2 \neq 0. \quad (5.148)$$

Dabei hat die 2×2 - Matrix M die Komponenten $M_{11} = g_p(X_p, X_p)$, $M_{22} = g_p(Y_p, Y_p)$ und $M_{12} = M_{21} = g_p(X_p, Y_p)$. Sind $X'_p, Y'_p \in T_p(M)$ zwei andere Vektoren mit der gleichen linearen Hülle, d.h. $\text{Span}\{X_p, Y_p\} = \text{Span}\{X'_p, Y'_p\}$, dann gibt es reelle Zahlen a, b, c, d , so dass

$$\begin{aligned} X'_p &= aX_p + bY_p, \\ Y'_p &= cX_p + dY_p, \end{aligned} \quad (5.149)$$

mit

$$\det(A) \neq 0, \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (5.150)$$

Bildet man die Matrix M' mit Komponenten $M'_{11} = g_p(X'_p, X'_p)$, $M'_{22} = g_p(Y'_p, Y'_p)$ und $M'_{12} = M'_{21} = g_p(X'_p, Y'_p)$, dann gilt natürlich $M' = A \cdot M \cdot A^T$ und deshalb

$$\det(M') = (\det(A))^2 \det(M). \quad (5.151)$$

Dies zeigt insbesondere, dass die Bedingung (5.148) in jeder Basis gilt, also eine Eigenschaft der durch X_p und Y_p aufgespannten Ebene ist. Solche Ebenen nennen wir (bezüglich der Metrik g_p) *nicht entartet*.

Nun gilt andererseits für die Komponenten des Riemannsensors

$$\begin{aligned} \text{Riem}(X'_p, Y'_p, X'_p, Y'_p) &= \text{Riem}_p(aX_p + bY_p, cX_p + dY_p, aX_p + bY_p, cX_p + dY_p) \\ &= \text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p) (ad)^2 \\ &\quad + \text{Riem}_p(X_p, Y_p, Y_p, X_p)(adbc) \\ &\quad + \text{Riem}_p(Y_p, X_p, X_p, Y_p)(bcad) \\ &\quad + \text{Riem}_p(Y_p, X_p, Y_p, X_p)(bc)^2 \\ &= \text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p) (ad - bc)^2 \\ &= \text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p) (\det(A))^2 \end{aligned} \quad (5.152)$$

Der Vergleich mit (5.151) zeigt nun, dass der Quotient von $\text{Riem}(X, Y, X, Y)$ mit $\det(M)$ nicht von der Wahl der Basis in $\text{Span}\{X_p, Y_p\}$ abhängt.

Definition 158. Sei (M, g) eine metrische Mannigfaltigkeit. Dann ist die *Schnittkrümmung* Σ definiert als die reellwertige Funktion, die jedem Punkt $p \in M$ und jeder nicht entarteten Ebene (2-dimensionaler Unterraum) $E \subset T_p(M)$ den Wert zuordnet

$$\Sigma(p, E) := \frac{\text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)}{g_p(X_p, X_p)g_p(Y_p, Y_p) - (g_p(X_p, Y_p))^2}, \quad (5.153)$$

Dabei ist $\{X_p, Y_p\}$ irgend eine Basis von E .

Proposition 159. Sei (M, g) metrische Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang. Dann bestimmt die Schnittkrümmung den Riemannstensor eindeutig.

Beweis. Aus Proposition 157 Wir wissen, dass Riem_p durch alle Komponenten $\text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$ festgelegt ist. Nach (5.153) ist $\text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$ durch

die Schnittkrümmung bestimmt wenn die Funktion $F : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(X_p, Y_p) := g_p(X_p, X_p)g_p(Y_p, Y_p) - (g_p(X_p, Y_p))^2$ nicht verschwindet. Das Komplement der Nullstellenmenge der Funktion F ist aber offen und dicht in $T_p(M) \times T_p(M)$, so dass dadurch die sicher stetige Funktion $(X_p, Y_p) \mapsto \text{Riem}_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p)$ auf ganz $T_p(M) \times T_p(M)$ eindeutig bestimmt ist. \square

Definition 160. Eine metrische Mannigfaltigkeit (M, g) heisst von *konstanter Krümmung* am Punkte $p \in M$ wenn $\Sigma(p, E)$ von $E \subset T_p(M)$ unabhängig ist

Der Riemanntensor einer metrischen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung hat eine sehr einfache Gestalt in Form eines bilinearen Produktes der Metrik. Um dieses in kompakter Form zu schreiben, definieren wir ein bilineares Produkt von symmetrischen Tensoren 2. Stufe, dessen Wert ein Tensor 4. Stufe mit den Symmetrien des Krümmungstensors ist.

Definition 161. Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} und h und k in $V^* \vee V^*$ (symmetrische kovariante Tensoren 2. Stufe; vgl. (7.5a)). Das *Kulkarni-Nomizu Produkt* ist eine bilineare Abbildung $\otimes : (V^* \vee V^*) \times (V^* \vee V^*) \rightarrow \text{Riem}(V)$, wobei $\text{Riem}(V) \subset T_4^0(V)$ die kovarianten Tensoren 4. Stufe mit den Symmetrien (5.116) des Riemannstensors bezeichnet. Dieses ist definiert durch:

$$\begin{aligned} (h \otimes k)(W, X, Y, Z) := & h(W, Y) k(X, Z) + h(X, Z) k(W, Y) \\ & - h(W, Z) k(X, Y) - h(X, Y) k(W, Z). \end{aligned} \quad (5.154a)$$

Oder in Indezschreibweise:

$$(h \otimes k)_{abcd} := h_{ac} k_{bd} + h_{bd} k_{ac} - h_{ad} k_{bc} - h_{bc} k_{ad}. \quad (5.154b)$$

Es ist sofort einsichtig, dass $h \otimes k$ den Symmetrien (5.116a-5.116c) genügt und eine kleine Rechnung zeigt, dass auch die Bianchi-Identität (5.116d) erfüllt ist.

Wir benutzen das \otimes -Produkt nun für $V = T_p(M)$ an jedem Punkt $p \in M$. Für die Metrik ist z.B.

$$g_p \otimes g_p(X_p, Y_p, X_p, Y_p) = 2 \left[g_p(X_p, X_p) g_p(Y_p, Y_p) - (g_p(X_p, Y_p))^2 \right], \quad (5.155)$$

was gerade zweimal dem Nenner von (5.153) entspricht.

Für die Bedingung der konstanten Krümmung ergibt sich nach (5.153) also sofort die notwendige und hinreichende Bedingung, dass Riem_p proportional zu $g_p \otimes g_p$ sein muss. Dabei kann die Proportionalitätskonstante durchaus noch von p abhängen. Es gibt im Falle konstanter Krümmung also eine (glatte) Funktion $k : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\text{Riem} = \frac{1}{2} k g \otimes g. \quad (5.156)$$

5.14 Affine und projektive Strukturen

Wir betrachten Kurven $\gamma: \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ im Sinne von Definition 5.2, die aber hier als mindestens zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt werden. Wichtig bleibt jedoch festzuhalten, dass mit „Kurve“ stets ein ausgezeichneter Parameter als gegeben zu denken ist (eben die Abbildung selbst), während das Bild der Kurve, $\text{Bild}(\gamma) \subset M$, die Kurve nur bis auf Reparametrisierung festlegt.

Wir fragen uns nun, unter welchen Bedingungen zwei kovariante Ableitungen $\tilde{\nabla}$ und ∇ die gleichen Geodätischen bzw. die gleichen Autoparallelen besitzen. Diesbezüglich verabreden wir folgende

Definition 162. Sei (M, ∇) eine Mannigfaltigkeit mit kovarianter Ableitung. Die Menge der Geodätischen definiert die *affine Struktur* von (M, ∇) . Ihre Äquivalenzklassen bezüglich Reparametrisierungsäquivalenz nennt man die *projektive Struktur* von (M, ∇) .

Wir erinnern an die Definition (5.15) der Differenz zweier kovarianter Ableitungen und zerlegen diese in ihren symmetrischen und ihren antisymmetrischen Anteil:

$$S(X, Y) := \frac{1}{2}(D(X, Y) + D(Y, X)), \quad (5.157a)$$

$$A(X, Y) := \frac{1}{2}(D(X, Y) - D(Y, X)). \quad (5.157b)$$

Mit Hilfe der Definition (5.31b) der Torsion ist klar, dass der antisymmetrische Anteil gerade der halben Differenz der zu $\tilde{\nabla}$ und ∇ gehörigen Torsionstensoren entspricht:

$$A = \frac{1}{2}(\tilde{T} - T). \quad (5.158)$$

Für den symmetrischen Anteil gilt nun folgende:

Proposition 163. Die symmetrisierte Differenz S zweier Zusammenhänge $\tilde{\nabla}$ und ∇ verschwindet genau dann, wenn die Zusammenhänge die gleiche affine Struktur definieren, also ihre Geodätischen übereinstimmen.

Beweis. Wir zeigen zuerst: sind die affinen Strukturen von $\tilde{\nabla}$ und ∇ gleich, so verschwindet S . Betrachte dazu $p \in M$ und $X_p \in T_p(M)$. Wähle eine bezüglich beider Zusammenhänge geodätische Kurve $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, so dass $p = \gamma(0)$ und $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Dann ist $D(X_p, X_p) = (\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} - \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})|_{t=0} = 0 - 0 = 0$. Da p und $X_p \in T_p(M)$ frei wählbar waren, gilt also $D(X_p, X_p) = 0$ und damit $S(X_p, X_p) = 0$ für alle X_p in $T_p(M)$ und alle $p \in M$. Wegen der Symmetrie von S folgt $S = 0$. Umgekehrt schließt man aus $S = 0$ sofort auf die Gleichheit der affinen Strukturen von $\tilde{\nabla}$ und ∇ . Ist nämlich die Kurve γ Geodätische für ∇ , so ist sie wegen $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + S(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ auch Geodätische für $\tilde{\nabla}$. \square

Damit können die affinen Strukturen einer Mannigfaltigkeit relativ zu einem fest gewählten Referenzzusammenhang ∇ durch das Tensorfeld S treu charakterisiert werden. Die Frage ist nun, was die analoge Charakterisierung projektiver Strukturen ist. Das Regelt der folgende

Satz 164 (H. Weyl). *Zwei Zusammenhänge definieren genau dann die gleiche projektive Struktur, wenn es ein Kovektorfeld $\theta \in ST^*(M)$ gibt, so dass*

$$S = \delta \otimes \theta + \theta \otimes \delta. \quad (5.159)$$

Hier ist $\delta \in ST_1^1(M) = \text{End}(T(M))$ das ‘Identitäts-Tensorfeld’, das in jedem $T_p(M)$ die Identitätsabbildung $T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ definiert. Seine Komponenten bezüglich dualer Basisfelder sind durch das ‘Kronecker-Delta’ $\delta_b^a (= 1$ für $a = b$, sonst Null) gegeben.

Den Beweis des Satzes führen wir mit Hilfe zweier Lemmata:

Lemma 165. *Die kovarianten Ableitungen $\tilde{\nabla}$ und ∇ sind genau dann projektiv äquivalent, wenn es eine Funktion $\lambda : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $D(X, X) = \lambda(X) X$.*

Beweis. Sei $X_p \in T_p(M)$ und γ eine Geodätische bezüglich ∇ mit $\gamma(t=0) = p$ und $\dot{\gamma}(t=0) = X_p$. Nach Voraussetzung existiert eine Reparametrisierung f , so dass $\gamma' := \gamma \circ f^{-1}$ Geodätische bezüglich $\tilde{\nabla}$ ist. Also können wir mit Hilfe von (5.30) schreiben

$$\begin{aligned} D(X_p, X_p) &= (\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} - \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})|_{t=0} \\ &= \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{f}(\dot{\gamma}' \circ f)|_{t=0} \\ &= \frac{\ddot{f}(0)}{\dot{f}(0)} X_p. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Durch die Forderungen $\gamma(t=0) = p$ und $\dot{\gamma}(t=0) = X_p$ ist die Parametrisierung der ∇ -Geodätischen γ eindeutig festgelegt. Die Parametrisierung der $\tilde{\nabla}$ -Geodätischen γ' liegt bis auf affine Transformationen $t \mapsto \alpha(t) := at+b$ fest. Dies bedeutet, dass die Reparametrisierungsfunktion f bis auf Redefinitionen $f \mapsto f' := \alpha \circ f$ festgelegt ist, so dass $\ddot{f}'(0)/\dot{f}'(0) = \ddot{f}(0)/\dot{f}(0)$, wegen $\ddot{\alpha} = 0$. Die reelle Zahl $\ddot{f}(0)/\dot{f}(0)$ ist also nach Vorgabe von $p \in M$ und $X_p \in T_p(M)$ durch obige Konstruktion eindeutig bestimmt. Es gibt also eine Funktion $\lambda : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\lambda(X_p) = \ddot{f}(0)/\dot{f}(0)$.

Existiere nun umgekehrt eine Funktion $\lambda : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $D(X, X) = \lambda(X) X$ und sei γ wieder eine Geodätische bezüglich ∇ . Dann ist

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = D(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \lambda(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}. \quad (5.161)$$

Eine Reparametrisierung $\gamma \mapsto \gamma' := \gamma \circ f^{-1}$ mit f von der Form (5.28), wobei $k = \lambda(\dot{\gamma})$, macht dann γ' zu einer Geodätischen bezüglich ∇ . \square

Die Funktion $\lambda : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die also jedem Tangentialvektor an M eine reelle Zahl zuordnet, kann nun weiter charakterisiert werden. Dies geschieht durch

Lemma 166. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es existiert eine Funktion $\lambda : T(M) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Vektor $X_p \in T_p(M)$ gilt: $D(X_p, X_p) = \lambda(X_p) X_p$.*
2. *Es existiert ein Kovektorfeld $\theta \in ST^*(M)$, so dass $S(X, Y) = \theta(X) Y + \theta(Y) X$.*

Beweis. Wir argumentieren punktweise. Sei V ein Vektorraum, $D : V \times V \rightarrow V$ eine bilineare Abbildung und S ihre Symmetrisierung. Es ist klar, dass 1.) aus 2.) folgt, einfach mit $\lambda = 2\theta$. Gilt nun umgekehrt 1.), so müssen wir um 2.) als wahr zu erweisen die Linearität von λ zeigen, denn dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} S(v, v) + S(w, w) + 2S(v, w) &= D(v + w, v + w) = \lambda(v + w) (v + w) \\ &\stackrel{!}{=} (\lambda(v) + \lambda(w))(v + w) = S(v, v) + S(w, w) + \lambda(v) w + \lambda(w) v \end{aligned} \quad (5.162)$$

und somit $S(v, w) = \theta(v) w + \theta(w) v$ mit der Linearform $\theta = \lambda/2$.

Die Linearität selbst ergibt sich so: Zunächst gilt wegen $D(aX, aX) = a^2 D(X, X)$ sicher $\lambda(aX) = a\lambda(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, also die Linearität bezüglich der skalaren Multiplikation. Zum Beweis der Linearität bezüglich der Addition betrachten wir die Identitäten $D(v \pm w, v \pm w) = D(v, v) + D(w, w) \pm 2S(v, w)$, so dass

$$\begin{aligned} \lambda(v + w) (v + w) &= \lambda(v) v + \lambda(w) w + 2S(v, w), \\ \lambda(v - w) (v - w) &= \lambda(v) v + \lambda(w) w - 2S(v, w). \end{aligned} \quad (5.163)$$

Addition ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= v (\lambda(v + w) + \lambda(v - w) - 2\lambda(v)) \\ &\quad + w (\lambda(v + w) - \lambda(v - w) - 2\lambda(w)), \end{aligned} \quad (5.164)$$

was für alle $v, w \in V$ gilt. Für linear unabhängige v, w , impliziert dies

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(v + w) + \lambda(v - w) - 2\lambda(v), \\ 0 &= \lambda(v + w) - \lambda(v - w) - 2\lambda(w), \end{aligned} \quad (5.165)$$

woraus durch Addition schließlich die additive Linearität für linear unabhängige Vektoren folgt. Für linear Abhängige folgt sie aber aus der Linearität der skalaren Multiplikation.

Punktweise existiert also eine 1-Form $\theta_p \in T_p^*(M)$, so dass $\theta_p = \frac{1}{2}\lambda(X_p)$, $\forall X_p \in T_p(M)$. Sind die zu $\tilde{\nabla}$ und ∇ gehörigen Zusammenhänge C^k , so ist das durch die Zuordnung $p \mapsto \theta_p$ definierte Kovektorfeld θ ebenfalls C^k , denn es ist dann $S \in ST_2^1(M)$ von der Klasse C^k und es gilt Gleichung (5.159), aus der

$$\text{Spur}(S) = (n + 1)\theta \quad (5.166)$$

folgt. Die Spur ist eine Abbildung $\text{Spur} : T_2^1(M) \rightarrow T^*(M)$, gegeben durch $\text{Spur}(S)(v) := \sum_{a=1}^n \theta^a(S(e_a, v))$, wobei $\{e_a\}_{a=1 \dots n}$ und $\{\theta^a\}_{a=1 \dots n}$ zueinander duale Basenpaare im Tangential- bzw. Kotangentialraum sind. Insbesondere ist die Spurfunktion linear und damit auch C^∞ , so dass θ auch von der Klasse C^k ist. \square

Damit ist der Weyl'sche Satz bewiesen. Aus ihm und den vorstehenden Betrachtungen folgt das

Korollar 167. *Zwei Zusammenhänge haben genau dann gleiche Torsion und projektive Struktur, wenn es ein Tensorfeld $\theta \in ST^*(M)$ gibt, so dass*

$$D = \delta \otimes \theta + \theta \otimes \delta. \quad (5.167)$$

Wir wollen nun auch Zusammenhänge verschiedener Torsion zulassen. Seien also $\tilde{\nabla}$ und ∇ bezüglich g metrische Zusammenhänge mit kovarianten Torsionen $\tilde{\Theta}$ bzw. Θ ; sei ferner $\Delta := \tilde{\Theta} - \Theta$. Dann folgt aus (5.52) und Beachtung von (5.33b) sofort der folgende Ausdruck für die Differenz der Zusammenhänge:

$$2g(D(X, Y), Z) = -\Delta(X, Y, Z) - \Delta(Y, X, Z) + \Delta(Z, X, Y), \quad (5.168)$$

also

$$g(S(X, Y), Z) = -\frac{1}{2}[\Delta(X, Y, Z) + \Delta(Y, X, Z)], \quad (5.169)$$

$$g(A(X, Y), Z) = \frac{1}{2}\Delta(Z, X, Y). \quad (5.170)$$

Die zweite Gleichung ist natürlich gerade (5.158). Wir können nun folgendes Resultat beweisen:

Proposition 168. *Seien $\tilde{\nabla}$ und ∇ bezüglich g metrische Zusammenhänge mit kovarianten Torsionen $\tilde{\Theta}$ bzw. Θ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die durch $\tilde{\nabla}$ und ∇ definierten projektiven Strukturen stimmen überein.*

2. Die durch $\tilde{\nabla}$ und ∇ definierten affinen Strukturen stimmen überein.

3. $\Delta := \tilde{\Theta} - \Theta$ ist vollständig antisymmetrisch.

Beweis. Die projektiven Strukturen stimmen genau dann überein, wenn S von der Form (5.159) ist. Eingesetzt in (5.169) heißt das:

$$\theta(X) g(Y, Z) + \theta(Y) g(X, Z) = -\frac{1}{2} [\Delta(X, Y, Z) + \Delta(Y, X, Z)]. \quad (5.171)$$

Permutiert man in dieser Gleichung X, Y, Z zyklisch und summiert die drei entstehenden Gleichungen so heben sich wegen $\Delta(X, Y, Z) = -\Delta(X, Z, Y)$ die sechs Terme der rechten Seite paarweise weg. Auf der rechten Seite sind die Terme wegen der Symmetrie von g paarweise gleich und es folgt

$$\theta(X) g(Y, Z) + \theta(Y) g(Z, X) + \theta(Z) g(X, Y) = 0. \quad (5.172)$$

Wählt man $X = Y = Z$ mit $g(X, X) \neq 0$ so folgt $\theta(X) = 0$. θ verschwindet daher auf allen X mit $g(X, X) \neq 0$, deren lineare Hülle jedoch der ganze Tangentialraum ist. Also ist (5.172) äquivalent zu $\theta = 0$. Damit impliziert unter den gegebenen Bedingungen die Gleichheit der projektiven Strukturen die Gleichheit der affinen. Das Umgekehrte ist trivialerweise immer richtig. Es bleibt zu zeigen, dass die Gleichheit der affinen Strukturen äquivalent ist zur vollständigen Antisymmetrie von Δ . Nun ist nach (5.169) das Verschwinden von S äquivalent zur Antisymmetrie von Δ im ersten und zweiten Argument. Da aber Δ wegen der Antisymmetrie der Torsionen in den beiden letzten Einträgen bereits antisymmetrisch ist, ist ersteres genau dann der Fall, wenn Δ total antisymmetrisch ist; denn Antisymmetrie bezüglich Austausch des ersten und zweiten Arguments, sowie bezüglich Austausch des zweiten und dritten Argument, implizieren die Antisymmetrie bezüglich Austausch des ersten und dritten Arguments: $\Delta(X, Y, Z) = -\Delta(Y, X, Z) = \Delta(Y, Z, X) = -\Delta(Z, Y, X)$. Damit sind alle Äquivalenzen bewiesen. \square

5.15 Konforme Strukturen; Vergleich mit projektiven Strukturen

Wir betrachten nun sogenannte konforme Transformationen der Metrik. Diese haben die Form

$$g \mapsto \tilde{g} := e^{2\phi} g, \quad (5.173)$$

wobei $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens C^2 ist. Aus (5.52) folgt nun sofort

Proposition 169. Sei ∇ der metrische Zusammenhang zu g mit Torsion T und $\tilde{\nabla}$ der metrische Zusammenhang zu $\tilde{g} = e^{2\phi} g$ mit Torsion $\tilde{T} = T$. Dann ist

$$D = \delta \otimes d\phi + d\phi \otimes \delta - g \otimes \text{grad}_g \phi, \quad (5.174)$$

wobei $\text{grad}_g \phi$ das bezüglich g gebildete Gradientenfeld von ϕ ist. (Es ist charakterisiert durch $g(X, \text{grad}_g \phi) = d\phi(X), \forall X$.)

Definition 170. Zwei Zusammenhänge auf einer metrischen Mannigfaltigkeit (M, g) heißen *konform äquivalent*, wenn ihre symmetrisierte Differenz S die Form (5.174) hat. Konforme Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Zusammenhänge. Ihre Äquivalenzklassen heißen *konforme Strukturen*.

Man beachte, dass wir konforme Äquivalenz ganz allgemein auf allen Zusammenhängen definiert haben, also nicht nur den metrischen, obwohl (5.174) zunächst nur für metrische Zusammenhänge abgeleitet wurde.

Mit projektiver und konformer Äquivalenz haben wir zwei Äquivalenzrelationen auf dem (affinen) Raum aller Zusammenhänge kennengelernt, deren Äquivalenzklassen sich direkt vergleichen lassen. Dies leistet der folgende

Satz 171 (H. Weyl). Sei ∇ ein Zusammenhang auf der metrischen Mannigfaltigkeit (M, g) und $[\nabla]_p$ bzw. $[\nabla]_k$ seine projektiven und konformen Äquivalenzklassen. Dann ist

$$[\nabla]_p \cap [\nabla]_k = \{\tilde{\nabla} \mid D = \tilde{\nabla} - \nabla = A\}. \quad (5.175)$$

d.h. D hat keinen symmetrischen Anteil. Die Angabe beider Klassen legt den symmetrischen Anteil des Zusammenhangs also eindeutig fest. Ist ∇ ein bezüglich g metrischer und torsionsfreier Zusammenhang, so ist die Metrik g durch die Angabe der projektiven und konformen Struktur ihres Levi-Civita-Zusammenhangs bis auf einen konstanten konformen Faktor festgelegt.

Beweis. Ist $\tilde{\nabla}$ sowohl in der projektiven als auch in der konformen Äquivalenzklasse von ∇ so ist $D = \tilde{\nabla} - \nabla$ sowohl von der Form (5.167) als auch von der Form (5.174). Also gilt

$$\delta \otimes (d\phi - \theta) + (d\phi - \theta) \otimes \delta = g \otimes \text{grad}_g \phi \quad (5.176)$$

Auswertung auf X, X ergibt

$$2(d\phi(X) - \theta(X)) X = g(X, X) \text{grad}_g \phi. \quad (5.177)$$

Also muss $\text{grad}_g \phi$ proportional zu X sein, und das für alle X für die $g(X, X) \neq 0$. Dies impliziert $\text{grad}_g \phi = 0$ bzw. $d\phi = 0$, also $\phi = \text{konst.}$ Eingesetzt in (5.177) folgt, dass $\theta(X) = 0$ für alle X mit $g(X, X) \neq 0$, was äquivalent ist zu $\theta = 0$. \square

Kapitel 6

Weiterführende Themen

6.1 Orthogonale Zerlegung des Krümmungstensors

Seien V und $\mathcal{R}(V)$ wie zuvor und $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, nicht-ausgeartete Bilinearform. Der Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf V sei mit $\mathcal{S}(V)$ bezeichnet. Durch $g \in \mathcal{S}(V)$ sind die folgenden drei linearen Abbildungen definiert:¹

$$r : \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathcal{S}(V), \quad r(\mathbf{R})_{bd} := g^{ac} R_{abcd} \quad (\text{Ricci-Abbildung}), \quad (6.1a)$$

$$s : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(\mathbf{h}) := g^{ab} h_{ab} \quad (\text{Spur-Abbildung}), \quad (6.1b)$$

sowie ihre Komposition

$$s \circ r =: \sigma : \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(\mathbf{R}) := g^{ac} g^{bd} R_{abcd} \quad (\text{Skalare-Abbildung}). \quad (6.1c)$$

Umgekehrt kann man eine Abbildung \vee wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(V) \times \mathcal{S}(V) &\rightarrow \mathcal{R}(V), & (\mathbf{h}, \mathbf{k}) &\mapsto \mathbf{h} \vee \mathbf{k} \\ (\mathbf{h} \vee \mathbf{k})_{abcd} &:= \frac{1}{4} (h_{ac} k_{bd} + h_{bd} k_{ac} - h_{ad} k_{bc} - h_{bc} k_{ad}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Nun ist durch g auch in $\mathcal{S}(V)$ und $\mathcal{R}(V)$ jeweils ein Skalarprodukt definiert, was wir in beiden Fällen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen:

$$\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle := h_{ab} k_{cd} g^{ac} g^{bd} =: h_{ab} k^{ab}, \quad (6.3a)$$

$$\langle \mathbf{Q}, \mathbf{R} \rangle := Q_{abcd} R_{efgh} g^{ae} g^{bf} g^{cg} g^{dh} =: Q_{abcd} R^{abcd}. \quad (6.3b)$$

¹Obwohl hier und im Folgenden alle Abbildung der Einfachheit halber unter Zuhilfenahme der Komponenten bezüglich einer Basis von V definiert werden, sind sie damit basisunabhängig festgelegt, wie man leicht nachweist.

Die bezüglich dieser inneren Produkte adjungierte Abbildung von r ist gegeben durch

$$r^* : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathcal{R}(V), \quad h \mapsto h \vee g, \quad (6.4a)$$

denn man rechnet leicht nach, dass

$$\langle r(R), h \rangle =: \langle R, r^*(h) \rangle = \langle R, h \vee g \rangle. \quad (6.4b)$$

Ebenso ergibt sich die adjungierte Abbildung zu σ , wenn man bedenkt, dass das Skalarprodukt in \mathbb{R} einfach die Multiplikation ist. Es ist

$$\sigma^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}(V), \quad \alpha \mapsto \alpha g \vee g, \quad (6.5a)$$

denn man rechnet wieder leicht nach, dass

$$\sigma(R) \alpha =: \langle R, \sigma^*(\alpha) \rangle = \langle R, \alpha g \vee g \rangle. \quad (6.5b)$$

Die Zerlegung von $\mathcal{R}(V)$ durch r

Lemma 172.

$$\mathcal{R}(V) = \text{Kern}(r) \oplus \text{Bild}(r^*), \quad (6.6)$$

wobei \oplus die direkt Summe bezüglich des Skalarproduktes (6.3b) orthogonaler Unterräume bezeichnet. (Man beachte, dass an das Skalarprodukt neben der Nicht-Ausgeartetheit keine Definitheitsforderung gestellt wurde.)

Beweis. Aus (6.4) und (6.2) ergibt sich sofort

$$r \circ r^*(h) = \frac{1}{4}(g s(h) + (n - 2)h) \quad (6.7)$$

Also ist $h \in \text{Kern}(r \circ r^*)$ genau dann wenn $h = s(h)g/(2 - n)$, woraus nach weiterer Spurbildung $s(h) = s(h)n/(2 - n)$, also $s(h) = 0$ folgt (wir setzen $n > 2$ voraus). Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt $h = 0$ und somit $\text{Kern}(r \circ r^*) = \{0\}$, was äquivalent ist zur Injektivität von r^* und

$$\text{Bild}(r^*) \cap \text{Kern}(r) = \{0\}. \quad (6.8)$$

Nicht Ausgeartetheit des Skalarproduktes impliziert nun ganz allgemein (\perp bezeichnet das orthogonale Komplement bezüglich der Metrik (6.3b))

$$\text{Bild}(r^*) = \text{Kern}(r)^\perp. \quad (6.9)$$

Gleichung (6.8) sichert nun, dass die orthogonalen Komplemente keinen nicht-trivialen Schnitt besitzen, was bei nicht definiten Metriken ja keineswegs selbstverständlich ist („lichtartige“ Vektoren). \square

Die Zerlegung von $\mathcal{R}(V)$ durch σ

Lemma 173.

$$\mathcal{R}(V) = \text{Kern}(\sigma) \oplus \text{Bild}(\sigma^*), \quad (6.10)$$

wobei \oplus dieselbe Bedeutung hat wie oben.

Beweis. Aus (6.5) und (6.2) ergibt sich sofort

$$\sigma \circ \sigma^*(\alpha) = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha. \quad (6.11)$$

Also ist $\text{Kern}(\sigma \circ \sigma^*) = \{0\}$, was äquivalent ist zur Injektivität von σ^* und

$$\text{Bild}(\sigma^*) \cap \text{Kern}(\sigma) = \{0\}. \quad (6.12)$$

Wieder gilt ganz allgemein

$$\text{Bild}(\sigma^*) = \text{Kern}(\sigma)^\perp, \quad (6.13)$$

so dass das Lemma bewiesen ist. \square

Die kombinierte Zerlegung von $\mathcal{R}(V)$ durch r und σ

Klarerweise gilt $\text{Kern}(r) \subset \text{Kern}(\sigma)$ und entsprechend $\text{Bild}(r^*) \supset \text{Bild}(\sigma^*)$. In (6.6) kann also $\text{Bild}(r^*)$ noch weiter zerlegen gemäß

$$\text{Bild}(r^*) = \text{Bild}(\sigma^*) \oplus (\text{Bild}(r^*) \cap \text{Kern}(\sigma)). \quad (6.14)$$

Der Schnitt $\text{Bild}(r^*) \cap \text{Kern}(\sigma)$ ist leicht bestimmbar: Es ist $\sigma \circ r^* = s \circ r \circ r^*$. Mit Hilfe von (6.7) erhält man sofort

$$\sigma \circ r^*(h) = \frac{1}{2}(n-1)s(h). \quad (6.15)$$

Also ist

$$\text{Bild}(r^*) \cap \text{Kern}(\sigma) = r^*(\text{Kern}(s)). \quad (6.16)$$

Die gesuchte Zerlegung ist nun gegeben durch den folgende Satz, den wir alles zusammenfassend so formulieren:

Satz 174. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\mathcal{R}(V)$ der $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ -dimensionale Vektorraum aller Multilinearformen $V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Symmetrien (5.116). Sei ferner $\mathcal{S}(V)$ der $\frac{1}{2}n(n+1)$ -dimensionale Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf V und g ein nicht-ausgeartetes (aber

nicht notwendig definites) Element in $\mathcal{S}(V)$. Durch g sind die Ricci-Abbildung $r : \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathcal{S}(V)$, die Spur-Abbildung $s : \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ und die Skalar-Abbildung $\tau : \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (6.1) beschrieben definiert. g induziert symmetrische, nicht-ausgeartete (aber i.A. nicht definite) Bilinearformen (Skalarprodukte) auf $\mathcal{R}(V)$ und $\mathcal{S}(V)$, wie in (6.3) beschrieben. Bezüglich dieser und dem Standard-Skalarprodukt in \mathbb{R} (gewöhnliches Produkt) sind die adjungierten Abbildungen r^* und σ^* wie in (6.4) bzw. (6.5) definiert. Dann zerfällt $\mathcal{R}(V)$ bezüglich des (nicht notwendig definiten!) Skalarproduktes in eine direkte Summe orthogonaler Unterräume wie folgt:

$$\mathcal{R}(V) = \text{Bild}(\sigma^*) \oplus r^*(\text{Kern}(s)) \oplus \text{Kern}(r). \quad (6.17)$$

Deren Dimensionen sind

$$\dim(\text{Bild}(\sigma^*)) = 1, \quad (6.18a)$$

$$\dim(r^*(\text{Kern}(s))) = \frac{1}{2}n(n+1) - 1, \quad (6.18b)$$

$$\dim(\text{Kern}(r)) = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) - \frac{1}{2}n(n+1). \quad (6.18c)$$

Für $R \in \mathcal{R}(V)$ erhält man entsprechend (6.17)

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (6.19)$$

mit

$$R_1 = \frac{2}{n(n-1)} \sigma(R) g \vee g \quad (\text{Spuranteil Ricci}) \quad (6.20a)$$

$$R_2 = \frac{4}{n-2} \left(r(R) - \frac{1}{n} \sigma(R) g \right) \vee g \quad (\text{spurfreier Ricci-Anteil}) \quad (6.20b)$$

$$\begin{aligned} R_3 &= R - R_1 - R_2 && (\text{Weyl-Tensor}) \\ &= R - \frac{4}{n-2} r(R) \vee g + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \sigma(R) g \vee g && (6.20c) \end{aligned}$$

Beweis. Gleichung (6.17) ergibt sich sofort durch Kombination von (6.6), (6.14) und (6.16). Die Dimensionsaussagen (6.18) sind klar. Dass $R_1 \in \text{Bild}(\sigma^*)$ und $R_2 \in r^*(\text{Kern}(s))$ sieht man sofort. Eine einfache Rechnung zeigt, dass auch $R_3 \in \text{Kern}(r)$. \square

Kapitel 7

Ergänzungen zur linearen und multilinearen Algebra

7.1 Tensoralgebren

In Folgenden sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} (für uns ist nur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wichtig) und $T^p V$ bezeichne sein p -faches Tensorprodukt: $T^p V := V \otimes \cdots \otimes V$ (p Faktoren). Für $p = 0$ definiert man $T^0 V = \mathbb{K}$.

Die unendliche direkte Summe

$$TV = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p V \quad (7.1)$$

definiert eine unendlichdimensionale assoziative Algebra mit Eins, die man die *kontravariante Tensoralgebra* über V nennt. Das Produkt ist das Tensorprodukt, das Einselement ist $(1, 0, 0, \dots)$, wobei die 1 das Einselement des Körpers \mathbb{K} bezeichnet. \mathbb{K} ist in TV eingebettet durch Vektoren der Form $(\alpha, 0, 0, \dots)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. V ist in TV eingebettet durch $i : V \rightarrow TV$, $i(v) = (0, v, 0, \dots)$. TV hat die folgende universelle Eigenschaft: Für jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow A$ in eine assoziative Algebra A existiert ein Algebren-Homomorphismus $\varphi : TV \rightarrow A$, so dass $f = \varphi \circ i$. Der Beweis ist einfach: Definiere $\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := f(v_1) \cdots f(v_n)$ (die Produkte sind in A zu nehmen) und setze linear fort. Dies wird oft übersicht-

lich in folgenden kommutativen Diagramm zusammengefasst:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{TV} & \\
 i \nearrow & & \searrow \varphi \\
 \text{V} & \xrightarrow{f} & \text{A}
 \end{array} \tag{7.2}$$

Dieselbe Konstruktion kann man mit dem Dualraum V^* von V anstellen, was dann in der *kovarianten Tensoralgebra* TV^* resultiert. Das Tensorprodukt $TV \otimes TV^*$ ist wieder eine assoziative Algebra, die man als *gemischte Tensoralgebra* über V und V^* bezeichnet, die die vorhergehenden als Unteralgebren in der Form $TV \otimes \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} \otimes TV^*$ enthält. Ist V komplex, so kann man diese Konstruktionen noch durch den komplex konjugierten Vektorraum \bar{V} und komplex konjugierten Dualraum \bar{V}^* erweitern.

Jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ definiert lineare Abbildungen $\otimes^p f : T^p V \rightarrow T^p W$, wobei $\otimes^0 f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ durch die Identität definiert wird. Diese definieren weiter eine lineare Abbildung $\oplus_p(\otimes^p f) : TV \rightarrow TW$, von der man leicht zeigt, dass sie ein Algebren-Homomorphismus der kontravarianten Tensoralgebren ist. Ist f ein Isomorphismus, dann auch $\oplus_p(\otimes^p f)$. In diesem Fall ist das Transponiert-Inverse von f definiert und wir können f als Isomorphismus auf die gemischte Tensoralgebra über V und V^* fortsetzen.

Neben der Tensoralgebra gibt es weitere Algebren von Tensoren spezieller Symmetrie. Dazu erklären wir zunächst den Begriff der Symmetrieklasse eines Tensors, um uns dann auf die einfachsten, nicht trivialen Klassen, der vollständig symmetrischen und der vollständig antisymmetrischen, einzuschränken.

Sei S_p die Gruppe der Permutationen von p Objekten. Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen (Vertauschung zweier Elemente) geschrieben werden. Für eine gegebene Permutation ist die Anzahl der Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade. Es existiert deshalb ein Gruppenhomomorphismus $\text{sign} : S_p \rightarrow \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$, der jeder Permutation σ ihr *Signum* zuordnet: $\text{sign}(\sigma) = +1$ falls σ durch eine gerade Anzahl und $\text{sign}(\sigma) = -1$ falls σ durch eine ungeraden Anzahl von Transpositionen darstellbar ist.

Der Vektorraum $T^p V$ trägt eine offensichtliche Darstellung von S_p . Mit anderen Worten, es existiert ein offensichtlicher Homomorphismus $\pi_p : S_p \rightarrow GL(T^p V)$ der Gruppe S_p in die Gruppe der linearen invertierbaren Abbildungen von $T^p V$, der durch

$$\pi_p(\sigma)v_1 \otimes \cdots \otimes v_p := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \tag{7.3}$$

und die lineare Fortsetzung auf Summen reiner Tensorprodukte definiert ist. Diese Darstellung ist i.A. reduzibel. Die irreduziblen Unterräume heißen *Symmetrieklassen* der Tensoren der Stufe p . Hier sind wir nur an den vollständig symmetrischen und vollständig antisymmetrischen Tensoren interessiert, die $\pi_p(\sigma)T = T$ bzw. $\pi_p(\sigma)T = \text{sign}(\sigma)T$ für alle $\sigma \in S_p$ erfüllen. Wir bezeichnen die linearen Unterräume der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensoren in T^pV durch \vee^pV und \wedge^pV . Die zugehörigen Projektionsabbildungen sind gegeben durch

$$\text{Sym}_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \pi_p(\sigma), \quad (7.4a)$$

$$\text{Alt}_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \pi_p(\sigma). \quad (7.4b)$$

Es existieren bilineare Abbildungen $\vee : \vee^pV \times \vee^qV \rightarrow \vee^{p+q}V$ und $\wedge : \wedge^pV \times \wedge^qV \rightarrow \wedge^{p+q}V$ die man das *symmetrische* (engl. “vee product”) bzw. *antisymmetrische* (engl. “wedge product”) Tensorprodukt nennt. Sie sind definiert durch

$$S \vee T := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Sym}_{p+q}(S \otimes T) \quad \text{für } S \in \vee^pV, \quad T \in \vee^qV, \quad (7.5a)$$

$$S \wedge T := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}_{p+q}(S \otimes T) \quad \text{für } S \in \wedge^pV, \quad T \in \wedge^qV, \quad (7.5b)$$

und genügen folgenden Relationen unter Umkehr der Faktoren:

$$S \vee T = T \vee S \quad \text{für } S \in \vee^pV, \quad T \in \vee^qV, \quad (7.6a)$$

$$S \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge S \quad \text{für } S \in \wedge^pV, \quad T \in \wedge^qV. \quad (7.6b)$$

Die bilineare Fortsetzung von \vee und \wedge auf die direkten Summen

$$\vee V := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \vee^p V, \quad (7.7a)$$

$$\wedge V := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \wedge^p V, \quad (7.7b)$$

verleihen diesen die Strukturen assoziativer Algebren (durch die Assoziativität des Tensorproduktes \otimes) mit Eins, die man die *symmetrische Tensoralgebra* bzw. die *antisymmetrische Tensoralgebra* (letztere auch alternativ *äußere Tensoralgebra*) über V nennt.

Für $v_i \in V$ ($i = 1, \dots, p$) ist aus (7.5) mit Induktion leicht zu beweisen, dass

$$v_1 \vee \dots \vee v_p := \sum_{\sigma \in S_p} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}, \quad (7.8a)$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p := \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}. \quad (7.8b)$$

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V , wobei $n = \dim(V)$, dann sind Basen von $\bigvee^p V$ bzw. $\bigwedge^p V$ gegeben durch

$$\{e_{a_1 \dots a_p}^\vee := e_{a_1} \vee \dots \vee e_{a_p} \mid 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p \leq n\}, \quad (7.9a)$$

$$\{e_{a_1 \dots a_p}^\wedge := e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_p} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_p \leq n\}. \quad (7.9b)$$

Die Basis (7.9a) enthält $\binom{n+p-1}{p}$ Vektoren und die Basis (7.9b) $\binom{n}{p}$ Vektoren falls $p \leq n$ und keinen falls $p > n$. Also ist

$$\dim(\bigvee^p V) = \binom{n+p-1}{p}, \quad (7.10a)$$

$$\dim(\bigwedge^p V) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{für } p \leq n \\ 0 & \text{für } p > n. \end{cases} \quad (7.10b)$$

Insbesondere gilt also

$$\dim(\bigvee V) = \sum_{p=0}^{\infty} \dim(\bigvee^p V) = \infty, \quad (7.11a)$$

$$\dim(\bigwedge V) = \sum_{p=0}^n \dim(\bigwedge^p V) = 2^n. \quad (7.11b)$$

Da man üblicherweise die Entwicklung eines allgemeinen $T \in T^p V$ wie folgt schreibt:

$$T = T^{a_1 \dots a_p} e_{a_1 \dots a_p}^\otimes, \quad (7.12)$$

reduziert sich dies im Falle, dass T total symmetrisch oder antisymmetrisch ist bezüglich der Basen (7.9) wie folgt:

$$T = \frac{1}{p!} T^{a_1 \dots a_p} e_{a_1 \dots a_p}^\vee \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{1}{p!} T^{a_1 \dots a_p} e_{a_1 \dots a_p}^\wedge. \quad (7.13)$$

Die Projektoren Sym und Alt sind in Komponenten gegeben durch:

$$T^{(a_1 \dots a_p)} := [\text{Sym}_p(T)]^{a_1 \dots a_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} T^{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(p)}}, \quad (7.14a)$$

$$T^{[a_1 \dots a_p]} := [\text{Alt}_p(T)]^{a_1 \dots a_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) T^{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(p)}}. \quad (7.14b)$$

Dabei haben wir gleich noch die abkürzenden Notation eingeführt, dass eine runde Klammer um Indizes deren vollständiger Symmetrisierung im Sinne der rechten Seite von (7.14a) entspricht und eine eckige Klammer deren vollständiger Antisymmetrisierung im Sinne der rechten Seite von (7.14b). Damit nimmt die Komponentenform von (7.5) die folgende kompakten Form an:

$$[S \vee T]^{a_1 \dots a_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} S^{(a_1 \dots a_p T^{a_{p+1}} \dots a_{p+q})}, \quad (7.15a)$$

$$[S \wedge T]^{a_1 \dots a_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} S^{[a_1 \dots a_p T^{a_{p+1}} \dots a_{p+q}]}. \quad (7.15b)$$

Für jedes $\alpha \in V^*$ existiert eine lineare Kontraktionsabbildung für $p \geq 0$, die durch

$$i_\alpha : T^p V \rightarrow T^{p-1} V, \quad v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_p \mapsto \alpha(v_1) v_2 \otimes \dots \otimes v_p, \quad (7.16)$$

und die lineare Fortsetzung auf Summen von Produkten definiert ist. Diese Abbildung kann durch lineare Fortsetzung auf der ganzen Tensoralgebra TV definiert werden, wenn wir noch festsetzen, dass i_α auf $T^0 V \cong \mathbb{K}$ der konstanten Abbildung auf den Nullvektor in TV entsprechen soll. Es ist dann offensichtlich, dass die Einschränkung von i_α auf $\bigvee^p V$ und $\bigwedge^p V$ nach $\bigvee^{p-1} V$ bzw. $\bigwedge^{p-1} V$ abbilden. Also definiert i_α Abbildungen $\bigvee V \rightarrow \bigvee V$ und $\bigwedge V \rightarrow \bigwedge V$ die bzw. folgenden Bedingungen genügen:

$$i_\alpha(S \vee T) = i_\alpha(S) \vee T + S \vee i_\alpha(T), \quad (7.17a)$$

$$i_\alpha(S \wedge T) = i_\alpha(S) \wedge T + (-1)^p S \wedge i_\alpha(T), \quad (7.17b)$$

wobei $S \in \bigvee^p V$ und $T \in \bigvee^q V$ in der ersten und $S \in \bigwedge^p V$ und $T \in \bigwedge^q V$ in der zweiten Gleichung. Diese Relationen, die leicht aus der Definition von i_α folgen, sagen aus, dass i_α eine *Derivation* der assoziativen Algebra $\bigvee V$ bzw. eine *Antiderivation* der assoziativen Algebra $\bigwedge V$ ist. Man beachte dies vor dem Hintergrund, dass i_α keine Derivation der assoziativen Tensoralgebra (7.1) ist.

7.2 Isomorphismen zwischen Vektorräumen und ihren Dualräumen (Index hoch- und runterziehen)

In der Differentialgeometrie verwendet man in Komponentenschreibweise oft Relationen der Form $V_a = g_{ab} V^b$ (Index runterziehen) oder umgekehrt $V^a = g^{ab} V_b$ (Index hochziehen), wobei g_{ab} die Komponenten der Metrik sind und g^{ab} die der „inversen Metrik“. In diesem Ergänzungsabschnitt wollen wir klarstellen, welche koordinatenunabhängigen Operationen bzw. Abbildungen sich hinter diesen formalen Manipulationen verbergen.

Definition 175. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} (für uns reicht es aus an \mathbb{R} oder \mathbb{C} zu denken). Eine *Bilinearform* auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{K} \quad (7.18a)$$

so dass für alle $u, v, w \in V$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\omega(u + v, w) = \omega(u, w) + \omega(v, w), \quad \omega(au, v) = a \omega(u, v), \quad (7.18b)$$

$$\omega(u, v + w) = \omega(u, v) + \omega(u, w), \quad \omega(u, av) = a \omega(u, v). \quad (7.18c)$$

Die Form heißt *nicht ausgeartet* falls

$$\omega(u, v) = 0 \forall u \in V \Leftrightarrow v = 0. \quad (7.18d)$$

[Bemerkung: Dies ist äquivalent der Aussage, dass $\omega(v, u) = 0 \forall u \in V \Leftrightarrow v = 0$; Stichwort: ‘Spaltenrang=Zeilenrang’.] Die Form heißt *symmetrisch* falls für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\omega(u, v) = \omega(v, u). \quad (7.18e)$$

Es besteht eine bijektive Zuordnung zwischen Bilinearformen auf V und linearen Abbildungen $V \rightarrow V^*$ (Dualraum). Ist ω die Bilinearform, so sei die ihr zugeordnete Abbildung mit ω_{\downarrow} bezeichnet. Sie ist definiert durch

$$\omega_{\downarrow} : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \omega_{\downarrow}(v) := \omega(v, \cdot), \quad (7.19)$$

so dass also $\omega_{\downarrow}(v)(w) = \omega(v, w)$. Ist umgekehrt $A : V \rightarrow V^*$ eine lineare Abbildung, so entspricht dieser die Bilinearform $\tilde{A}(v, w) := A(v)(w)$.

Bemerkung 176. Da ω nicht als symmetrisch vorausgesetzt wurde, existiert mit der alternativen Definition $\omega_{\downarrow}(v) := \omega(\cdot, v)$ eine andere lineare Abbildung $V \rightarrow V^*$, deren Dimensionen von Kern und Bild mit denen der Abbildung (7.19) übereinstimmt. Da wir für das Folgende nur eine dieser Abbildungen benötigen, entscheiden wir uns o.B.d.A für (7.19).

Nach Definition (7.18d) ist sofort klar, dass die Bilinearform ω genau dann nicht ausgeartet ist wenn der Kern von ω_{\downarrow} trivial (der Nullvektor) ist. In diesem Fall ist ω_{\downarrow} injektiv und wegen der Endlichdimensionalität von $\dim(V) = \dim(V^*)$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus. (Für unendlich-dimensionale Vektorräume ist dies falsch.)

Wir beschränken uns nun auf den Fall nicht ausgearteter Bilinearformen. Da ω_{\downarrow} ein Isomorphismus ist, existiert eine lineare Abbildung $\omega_{\uparrow} := \omega_{\downarrow}^{-1} : V^* \rightarrow V$ mit

$$\omega_{\uparrow} \circ \omega_{\downarrow} = \text{id}_V \quad \text{und} \quad \omega_{\downarrow} \circ \omega_{\uparrow} = \text{id}_{V^*}. \quad (7.20)$$

Mit Hilfe von ω_{\uparrow} kann man nun die Bilinearform ω zu einer Bilinearform $\tilde{\omega}$ auf V^* zurückziehen; das bedeutet einfach die Bildung von

$$\tilde{\omega} := \omega \circ \omega_{\uparrow} \times \omega_{\uparrow} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{K}. \quad (7.21a)$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\alpha, \beta) &:= \omega(\omega_{\uparrow}(\alpha), \omega_{\uparrow}(\beta)) \\ &= (\omega_{\downarrow} \circ \omega_{\uparrow}(\alpha)) \omega_{\uparrow}(\beta) \\ &= \alpha(\omega_{\uparrow}(\beta)). \end{aligned} \quad (7.21b)$$

Also gilt in Analogie zu (7.19), wenn man V und V^{**} aufgrund ihrer natürlichen Isomorphie identifiziert,

$$\omega_{\uparrow}(\beta) = \tilde{\omega}(\cdot, \beta). \quad (7.22)$$

Man beachte, dass diese natürliche Isomorphie $i : V \rightarrow V^{**}$ gegeben ist durch die für alle $v \in V$ und $\alpha \in V^*$ gültige Relation $i(v)(\alpha) := \alpha(v)$. Also gilt insbesondere

$$i(\omega_{\uparrow}(\beta))(\alpha) = \alpha(\omega_{\uparrow}(\beta)) \quad (7.23)$$

Bemerkung 177. Man beachte, dass hier für die Bilinearform $\tilde{\omega}$ der *zweite* Eintrag verwendet wird, hingegen der erste Eintrag in Definition (7.19) für die Bilinearform ω . Hätte man bei Letzterer den zweiten verwendet, wie in Bemerkung 176 erwähnt, so würde in (7.22) bei $\tilde{\omega}$ der erste Eintrag verwendet werden. Es ist also festzuhalten, dass bei Definition von ω_{\uparrow} als dem Inversen von ω_{\downarrow} diese Gegenseitigkeit grundsätzlich besteht und nur bei *symmetrischen* Bilinearformen belanglos wird.

Sei $n = \dim(V)$ und $\{e_a \mid a = 1, \dots, n\}$ Basis von V mit zugehöriger Dualbasis $\{\theta^a \mid a = 1, \dots, n\}$ von V^* , d.h. es gilt: $\theta^a(e_b) = \delta_b^a$. Dann ist

$$\omega_{ab} = \omega(e_a, e_b) \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}^{ab} = \omega(\theta^a, \theta^b). \quad (7.24)$$

Also ist

$$\omega_{\downarrow}(e_a) = \omega(e_a, e_b) \theta^b = \omega_{ab} \theta^b, \quad (7.25a)$$

$$\omega_{\uparrow}(\theta^a) = \tilde{\omega}(\theta^b, \theta^a) e_b = \tilde{\omega}^{ba} e_b. \quad (7.25b)$$

Man beachte, dass auf der rechten Seite von (7.25a) über den zweiten Index an ω summiert wird, während auf der rechten Seite von (7.25b) die Summation über den ersten Index von $\tilde{\omega}$ läuft. Dies ist eine direkte Folge von Bemerkung 177.

Aus (7.25) ergibt sich nun sofort der Zusammenhang zwischen den Komponenten ω_{ab} und $\tilde{\omega}^{ab}$ wie folgt:

$$e_a = \omega_{\uparrow} \circ \omega_{\downarrow}(e_a) = \omega_{ab} \omega_{\uparrow}(\theta^b) = \omega_{ab} \tilde{\omega}^{cb} e_c, \quad (7.26)$$

was gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass die Matrizen $\{\omega_{ab}\}$ und $\{\tilde{\omega}^{ab}\}$ zueinander *transponiert invers* sind.

Auf Ebene der Komponenten sind nun die Abbildungen ω_{\downarrow} und ω_{\uparrow} wie folgt: Sei $v = v^a e_a \in V$ und $\alpha = \alpha_a \theta^a \in V^*$, dann gilt

$$\omega_{\downarrow}(v) = v^a \omega_{ab} \theta^b = v_b \theta^b, \quad \text{mit } v_b := v^a \omega_{ab}, \quad (7.27a)$$

$$\omega_{\uparrow}(\alpha) = \alpha_a \tilde{\omega}^{ba} e_b = \alpha^b e_b, \quad \text{mit } \alpha^b := \tilde{\omega}^{ba} \alpha_a. \quad (7.27b)$$

Bemerkung 178. Auf Ebene der Komponenten entsprechen die Abbildungen ω_{\downarrow} und ω_{\uparrow} den Operationen des Index Runter- und Hochziehens. Dabei sind $v_b = v^a \omega_{ab}$ die Komponenten des Bildes in V^* von $v = v^a e_a \in V$ unter der Abbildung ω_{\downarrow} bezüglich der zu $\{e_a\}$ dualen Basis $\{\theta^a\}$. Analog sind $\alpha^b = \tilde{\omega}^{ba} \alpha_a$ die Komponenten des Bildes in V von $\alpha = \alpha_a \theta^a \in V^*$ unter der Abbildung ω_{\uparrow} bezüglich der zu $\{\theta^a\}$ dualen Basis $\{e_a\}$ von V . Ist aus dem Kontext klar, auf welche Bilinearform man sich bezieht, so schreibt man auch v^b statt $\omega_{\downarrow}(v)$ und α^{\sharp} statt $\omega_{\uparrow}(\alpha)$, bleibt aber bei den Komponenten bei obiger Schreibweise, schreibt also nicht etwa v_a^b sondern einfach v_a .

Diese zueinander inversen Isomorphismen $\omega_{\downarrow} : V \rightarrow V^*$ und $\omega_{\uparrow} : V^* \rightarrow V$ kann man nun auf beliebige Tensorprodukte $T_m^{\ell} V := V^{\otimes \ell} \otimes V^{*\otimes m}$ erweitern und dadurch beispielsweise das „Runterziehen des ersten Index“ durch die Abbildung $\omega_{\downarrow} \otimes \text{id}_V \otimes \cdots \otimes \text{id}_{V^*}$ definieren. Analog geht dies für mehrere Indizes an beliebigen Stellen, wobei die Indexbewegung an einer Stelle mit der an einer anderen klarerweise vertauscht, so dass eine Reihenfolge nicht angegeben werden muss.

Insbesondere ist es natürlich möglich, die Indizes an der Bilinearform $\omega \in V^* \otimes V^*$ selbst hochzuziehen, also $\omega_{\uparrow} \otimes \omega_{\uparrow}$ auf sie anzuwenden, so dass ein Element in $V \otimes V$ entsteht, was man wegen der natürlichen Identifikation von V^{**} mit V als Bilinearform auf V^* auffassen darf. Diese ist dann aber gerade $\tilde{\omega}$, wie aus (7.21b) und (7.23) sieht. Auf der Ebene der Komponenten sieht man dies so:

$$\omega^{ab} := \tilde{\omega}^{ac} \underbrace{\tilde{\omega}^{bd} \omega_{cd}}_{\delta_c^b} = \tilde{\omega}^{ab}. \quad (7.28)$$

Bemerkung 179. Wegen (7.28) ist es erlaubt $\tilde{\omega}^{ab}$ durchweg durch ω^{ab} (definiert durch Index-Hochziehen an ω_{ab}) zu ersetzen, was wir im Folgenden auch tun

werden. Oft nennt man die Bilinearform $\tilde{\omega}$ auf V^* auch ω^{-1} , was aber eigentlich nur im symmetrischen Fall gerechtfertigt ist, da nur dann die Matrizen mit den Komponenten $\tilde{\omega}^{ab}$ und ω_{ab} , die in (7.24) definiert wurden, zueinander invers (statt transponiert-invers) sind. \square

Schließlich kommen wir noch zum Begriff der ω -adjungierten Abbildung:

Definition 180. Sei $A : V \rightarrow A$ eine lineare Abbildung und ω eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V . Die ω -adjungierte Abbildung zu A ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $A^\dagger : V \rightarrow V$, die für alle $u, v \in V$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\omega(u, Av) = \omega(A^\dagger u, v). \quad (7.29)$$

Unter Benutzung der Definition (7.19) und der natürlich definierten transponierten Abbildung, $A^\top : V^* \rightarrow V^*$, definiert durch die für alle $\alpha \in V^*$ gültige Gleichung $A^\top := \alpha \circ A$, schreibt man die linke Seite von (7.29) um in

$$\omega(u, Av) = \omega_\downarrow(u)(Av) = [A^\top \circ \omega_\downarrow(u)](v) \quad (7.30a)$$

und die rechte Seite in

$$\omega(A^\dagger u, v) = \omega_\downarrow(A^\dagger u)(v) = [\omega_\downarrow \circ A^\dagger(u)](v). \quad (7.30b)$$

Gleichheit beider Seiten für alle $u, v \in V$ impliziert dann eine äquivalente Form zu (7.29)

$$A^\dagger = \omega_\uparrow \circ A^\top \circ \omega_\downarrow. \quad (7.31)$$

Bezüglich der Basis $\{e_a\}$ von V sei $Ae_b = A_b^a e_a$ und $A^\dagger e_a = A^\dagger_b^a e_a$, so dass wegen (7.25) die Komponentenform von (7.31) gegeben ist durch (beachte Bemerkung 179)

$$A^\dagger_b^a = \omega^{ad} \omega_{bc} A_d^c. \quad (7.32)$$

Bemerkung 181. Wegen der nicht vorausgesetzten Symmetrie von ω existiert neben (7.29) eine weitere Definition der adjungierten Abbildung, die durch $\omega(Au, v) = \omega(u, A^\ddagger v)$ gegeben ist. Analog zu (7.30b) erhält man dann $A^\ddagger = (\omega_\uparrow)^\top \circ A^\top \circ (\omega_\downarrow)^\top$. Die Abbildungen \dagger und \ddagger sind zueinander invers. Sie sind gleich, also \dagger eine lineare Involution auf dem Raum der linearen Selbstabbildungen von V , wenn ω_\uparrow und ω_\downarrow entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sind. (Im antisymmetrischen Fall heben sich die beiden Minuszeichen in $(\omega_\uparrow)^\top = -\omega_\uparrow$ und $(\omega_\downarrow)^\top = -\omega_\downarrow$ gerade gegenseitig weg.) Beachte auch: Die Symmetrie von linearen Abbildungen zu konstatieren ist nur dann sinnvoll, wenn Ziel- und Ausgangsraum zueinander dual sind.)

7.3 Hodge Dualität

Wir betrachten nun den Spezialfall eines Vektorraumes V mit einer nicht-ausgearteten, *symmetrischen* Bilinearform, die wir aufgrund dieser Spezialisierung η statt ω nennen. Die gemäß (7.21) zugehörige, nicht-ausgeartete und symmetrische Bilinearform $\tilde{\eta}$ nennen wir Bemerkung 179 folgend nun η^{-1} .

Es ist klar, dass η und η^{-1} fortgesetzt werden können zu einer nicht-ausgearteten, symmetrischen Bilinearform auf dem Tensorprodukt

$$T_p^q V := \underbrace{(V \otimes \cdots \otimes V)}_{q \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{(V^* \otimes \cdots \otimes V^*)}_{p \text{ Faktoren}}. \quad (7.33)$$

Wir bezeichnen diese Fortsetzung mit einer eckigen Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Auf reinen Tensorprodukten hat man dann einfach das Produkt der Faktorweisen inneren Produkte:

$$\begin{aligned} & \left\langle (v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) \otimes (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p), (w_1 \otimes \cdots \otimes w_q) \otimes (\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_p) \right\rangle \\ & := \prod_{a=1}^q \eta(v_a, w_a) \prod_{b=1}^p \eta^{-1}(\alpha_b, \beta_b). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Auf ganz $T_q^p V$ ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dann durch bilineare Fortsetzung eindeutig definiert.

Hier interessieren wir uns nur für das innere Produkt auf allen $\bigwedge^p V^*$, also auf den vollständig antisymmetrischen Tensorprodukten des Dualraums (den „Formen“). Dann gilt wegen

$$\langle \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p, \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_p \rangle := \prod_{a=1}^p \eta^{-1}(\alpha_a, \beta_a) \quad (7.35)$$

entsprechend für die antisymmetrischen Tensorprodukte wegen (7.8b)

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p \rangle \\ & = \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\sigma' \in S_p} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\sigma') \prod_{a=1}^p \eta^{-1}(\alpha_{\sigma(a)}, \beta_{\sigma'(a)}) \\ & = \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\sigma' \in S_p} \text{sign}(\sigma' \circ \sigma^{-1}) \prod_{a=1}^p \eta^{-1}(\alpha_a, \beta_{\sigma' \circ \sigma^{-1}(a)}) \\ & = p! \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \prod_{a=1}^p \eta^{-1}(\alpha_a, \beta_{\sigma(a)}). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Dabei haben wir für die letzte Gleichheit folgende Zwischenschritte ausgeführt: Zunächst ist klar, dass $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$, denn $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$, so dass $\text{sign}(\sigma) = 1/\text{sign}(\sigma)$. Da $\text{sign} : S_p \rightarrow \{-1, +1\}$ Gruppenhomomorphismus ist, muss aber $\text{sign}(\sigma^{-1}) = 1/\text{sign}(\sigma)$ sein. Wir schreiben dann $\text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma') = \text{sign}(\sigma'')$ mit $\sigma'' := \sigma' \circ \sigma^{-1}$. Dann ersetzen wir den laufenden Index a in \prod durch $\sigma^{-1}(a)$, was wir dürfen, denn dadurch wird nur die Reihenfolge des p -fachen (kommutativen) Produktes der Faktoren $\eta^{-1}(\alpha_{\sigma(a)}, \beta_{\sigma'(a)})$ umgeordnet. Die Summe über σ' ersetzen wir durch eine über σ'' , denn dadurch wird nur die Reihenfolge der Summanden geändert. Damit hängt kein Summand mehr von σ ab und die Summe $\sum_{\sigma \in S_p}$ kann ausgeführt werden und ergibt einen Faktor $p!$. Die Summe über σ'' ergibt nun gerade die letzte Zeile von (7.36), wenn man σ'' wieder in σ umbenennt.

Durch bilineare Fortsetzung ergibt sich dann das innere Produkt zweier p -Formen $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \dots a_p} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}$ und $\beta = \frac{1}{p!} \beta_{b_1 \dots b_p} \theta^{b_1} \wedge \dots \wedge \theta^{b_p}$ zu

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_{a_1 \dots a_p} \beta^{a_1 \dots a_p}. \quad (7.37)$$

Es zeigt sich nun, dass im der Faktor $p!$ in (7.36) etwas unnatürlich ist, jedenfalls im total antisymmetrischen Fall. Betrachtet man etwa das p -fache äußere Produkt $\alpha = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^p$ von orthonormierten 1-Formen θ^a , die also $\eta^{-1}(\theta^a, \theta^b) = \eta^{ab} = \pm \delta^{ab}$ genügen, dann ist $\langle \alpha, \alpha \rangle = \pm p!$. Es wäre natürlicher, wenn dieses Produkt ebenfalls vom Betrag 1 wäre. Deshalb führt man für Formen oft ein renormiertes inneres Produkt ein, dass entsprechend auf $\wedge^p V^*$ wie folgt definiert ist:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{norm}} |_{\wedge^p V^*} := \frac{1}{p!} \langle \cdot, \cdot \rangle |_{\wedge^p V^*} \quad (7.38)$$

Dann gilt eben

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\text{norm}} = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \dots a_p} \beta^{a_1 \dots a_p}, \quad (7.39)$$

was auch die die Redundanz in (7.37) beseitigt, die darin besteht, dass in der Summe auf der rechten Seite ein bestimmtes Produkt, etwa $\alpha_{12 \dots p} \beta^{12 \dots p}$, mit jeder Permutation der Indizes $1, 2, \dots, p$ einmal vorkommt, also $p!$ mal, denn alle diese Produkte sind wegen der Antisymmetrie der α - und β - Koeffizienten gleich. Das normierte Skalarprodukt ist hingegen – wie gewohnt – gleich der Summe aller Produkte *linear unabhängiger* Koeffizienten.

Nach diesen Vorbereitungen über die Fortsetzung des inneren Produktes kommen wir zur Hodge Dualität. Dazu wählen wir auf V eine Volumenform $\varepsilon \in \wedge^n V^*$. Diese kann, muss aber nicht übereinstimmen mit der Volumenform, die durch η und die Wahl einer Orientierung o auf V eindeutig bestimmt ist. Letzte hat folgende

Form: Ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine bezüglich η orthonormierte Basis, d.h. gilt $\eta(e_a, e_b) = \pm\delta_{ab}$, und hat diese Basis die Orientierung o , dann

$$\varepsilon := \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n, \quad (7.40)$$

wobei $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ Dualbasis zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist. Letztlich werden wir die Hodge-Dualität bezüglich einer solchen, durch η (und die Wahl einer Orientierung) bestimmten Volumenform betrachten, ihre allgemeine Definition, die wir gleich gegeben werden, lässt aber auch andere Volumenformen zu. Wir werden im Folgenden mehrfach auf diese Möglichkeit hinweisen, ein von η unabhängiges ε zu wählen.

Die Abbildung der *Hodge Dualität* für Formen vom Grade $0 \leq p \leq n$ ist nun definiert als ein linearer Isomorphismus

$$\star_p : \bigwedge^p V^* \rightarrow \bigwedge^{n-p} V^*, \quad (7.41a)$$

der folgende Bedingung erfüllt:

$$\alpha \wedge \star_p \beta = \varepsilon \langle \alpha, \beta \rangle_{\text{norm}}. \quad (7.41b)$$

Das bedeutet, dass das Bild von $\beta \in \bigwedge^p V^*$ unter \star_p in $\bigwedge^{n-p} V^*$ definiert ist durch die Forderung der Gültigkeit von (7.41b) für alle $\alpha \in \bigwedge^p V^*$. Die Linearität der Abbildung ist offensichtlich. Die Eindeutigkeit von \star_p folgt aus der Tatsache, dass falls $\lambda \in \bigwedge^{n-p} V^*$ und $\alpha \wedge \lambda = 0$ gilt für alle $\alpha \in \bigwedge^p V^*$, notwendigerweise $\lambda = 0$ sein muss. Um die Existenz zu zeigen reicht es aus, \star_p auf einer Basis zu definieren. Da (7.41b) auch in α linear ist, reicht es sogar aus (7.41b) für die Spezialfälle zu verifizieren, in denen α alle Basisvektoren durchläuft.

Von nun an werden wir der Standardpraxis folgen und den Index p an \star weglassen. Das ist gerechtfertigt, wenn aus dem Kontext klar wird, auf Formen von welchem Grad die Hodge-Abbildung \star wirken soll.

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V und $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^* ; d.h., $\theta^a(e_b) = \delta_b^a$. Sei darüberhinaus $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ die Basis von V^* die sich als Bild von $\{e_1, \dots, e_n\}$ unter η_\perp ergibt, also $\theta_a = \eta_{ab}\theta^b$. Dann hat die Abbildung \star auf der Basis $\{\theta_{a_1} \wedge \dots \wedge \theta_{a_p} \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_p \leq n\}$ von $\bigwedge^p V^*$ die einfache Form

$$\star(\theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon_{b_1 \dots b_p a_{p+1} \dots a_n} \theta^{a_{p+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{a_n}. \quad (7.42)$$

Zum Beweis überprüft man (7.41b) für $\alpha = \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}$ und $\beta = \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_p}$. Statt (7.42) können wir schreiben

$$\begin{aligned} \star(\theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}) &= \frac{1}{(n-p)!} \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_p b_p} \varepsilon_{b_1 \dots b_p b_{p+1} \dots b_n} \theta^{b_{p+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{b_n} \\ &= \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n} \theta^{a_{p+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{a_n}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

was die Abhängigkeit von ε und η explizit zeigt..

Ist $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \dots a_p} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}$, dann $\star \alpha = \frac{1}{(n-p)!} (\star \alpha)_{b_1 \dots b_{n-p}} \theta^{b_1} \wedge \dots \wedge \theta^{b_{n-p}}$, wobei

$$(\star \alpha)_{b_1 \dots b_{n-p}} = \frac{1}{p!} \alpha_{a_1 \dots a_p} \varepsilon^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_{n-p}}. \quad (7.44)$$

Dies gibt den bekannten Ausdruck der Hodge-Abbildung in Komponenten wieder. Man beachte, dass es in Komponentenform die ersten (statt die letzten) p Indizes sind, die kontrahiert werden.

Zweifaches Anwenden von \star (d.h. $\star_{(n-p)} \circ \star_p$) führt zu folgender Selbstabbildung von $\bigwedge^p V^*$:

$$\begin{aligned} & \star(\star(\theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p})) \\ &= \frac{1}{p!(n-p)!} \varepsilon^{a_1 \dots a_p}_{a_{p+1} \dots a_n} \varepsilon^{a_{p+1} \dots a_n}_{b_1 \dots b_p} \theta^{b_1} \wedge \dots \wedge \theta^{b_p} \\ &= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!} \varepsilon^{a_1 \dots a_p}_{a_{p+1} \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_p}_{a_{p+1} \dots a_n} \theta^{b_1} \wedge \dots \wedge \theta^{b_p} \\ &= (-1)^{p(n-p)} \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Beachte, dass

$$\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}} = \frac{1}{n!} \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_n b_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = (\varepsilon_{12 \dots n})^2 / \det\{\eta(e_a, e_b)\}. \quad (7.46)$$

Diese Formel gilt für alle Volumenformen ε in der Definition (7.41b), unabhängig davon, ob sie die durch η (und die Wahl der Orientierung) definiert sind oder nicht.

Da die rechte Seite von (7.41b) symmetrisch unter dem Austausch $\alpha \leftrightarrow \beta$ ist, muss dies auch für die linke Seite gelten. Mit (7.45) bekommen wir

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle_{\text{norm}} \varepsilon &= \alpha \wedge \star \beta = \beta \wedge \star \alpha = (-1)^{p(n-p)} \star \alpha \wedge \beta \\ &= \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}}^{-1} \star \alpha \wedge \star \beta = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}}^{-1} \langle \star \alpha, \star \beta \rangle_{\text{norm}} \varepsilon, \end{aligned} \quad (7.47)$$

also

$$\langle \star \alpha, \star \beta \rangle_{\text{norm}} = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}} \langle \alpha, \beta \rangle_{\text{norm}}. \quad (7.48)$$

Daraus und aus (7.45)) folgt für $\alpha \in \bigwedge^p V^*$ und $\beta \in \bigwedge^{n-p} V^*$, dass

$$\langle \alpha, \star \beta \rangle_{\text{norm}} = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}}^{-1} \langle \star \alpha, \star \star \beta \rangle_{\text{norm}} = (-1)^{p(n-p)} \langle \star \alpha, \beta \rangle_{\text{norm}}. \quad (7.49)$$

Dies zeigt, dass die zu \star bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{norm}}$ adjungierte Abbildung durch $(-1)^{p(n-p)} \star$ gegeben ist. Genauer schreiben wir dies in den zwei äquivalenten Formen

$$(\star_{n-p})^\dagger = (-1)^{p(n-p)} \star_p \quad \text{oder} \quad (\star_p)^\dagger = (-1)^{p(n-p)} \star_{n-p}. \quad (7.50)$$

Auch die Ausdrücke (7.45), (7.47)(7.48) und (7.49) sind immer noch für allgemeine Volumenformen ε in der Definition (7.41b) gültig. Wenn wir nun von unserer anfänglichen Wahl Gebrauch machen, also benutzen, dass ε die durch das innere Produkt η und die Orientierung o eindeutig bestimmte Volumenform ist, die dem Parallelepiped, das von einer o -orientierten und η -orthonormierten Basis aufgespannt wird, das Volumen 1 zuweist (wie in (7.40)), dann gilt

$$\langle \varepsilon, \varepsilon \rangle_{\text{norm}} = (-1)^{n_-}. \quad (7.51)$$

Hier ist n_- die Dimension des maximalen Unterraums von V , eingeschränkt auf den η negativ-definit ist. Mit anderen Worten, die Signatur von η ist (n_+, n_-) . Gleichung (7.48) zeigt dann, dass \star eine Isometrie ist für gerades n_- , und eine Anti-Isometrie für ungerades n_- . Ein wichtiges Beispiel für letzteren Fall sind die Lorentzmetriken in allen Dimensionen (sofern man die „mostly plus“ Konvention benutzt; sonst nur in geraden Raum-Zeit Dimensionen).

Zum Schluss erwähnen wir noch eine nützliche Formel. Sei $v \in V$ und $i_v : \mathbb{T}^p V^* \rightarrow \mathbb{T}^{p-1} V^*$ die Abbildung, die v in den ersten Tensorfaktor einsetzt. Eingeschränkt auf vollständig antisymmetrische Tensoren definiert diese eine Abbildung $i_v : \bigwedge^p V^* \rightarrow \bigwedge^{p-1} V^*$. Für $\alpha \in \bigwedge^p V^*$ haben wir dann

$$i_v \star \alpha = \star(\alpha \wedge v^\flat). \quad (7.52)$$

wo $v^\flat := \eta_\downarrow(v)$. Zum Beweis reicht es wegen der Linearität aus diese Beziehung für Basiselemente $v = e_a$ von V und $\alpha = \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_p}$ von $\bigwedge^p V^*$ nachzuprüfen, was aber offensichtlich ist, wenn man (7.43) benutzt.

Literaturverzeichnis

- [1] Ivan Kolář, Peter W. Michor, and Jan Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1993. Second corrected version available online: www.mat.univie.ac.at/~michor/kmsbookh.pdf.
- [2] Detlef Laugwitz. *Differentialgeometrie*. Mathematische Leitfäden. B.G. Teubner, Stuttgart, third edition, 1977.
- [3] Arno Pauly. Flächen mit lauter Nabelpunkten. *Elemente der Mathematik*, 63(3):141–144, 2008.