3. Hausübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(abzugeben am Freitag, 12.11.2010)

Aufgabe H05 *Teilchen im Kondensator* (5 Punkte)

Ein Kondensator erzeuge ein (unendlich ausgedehntes) zeitunabhängiges homogenes elektrisches Feld $\mathcal{E}$, in dem sich ein zum Zeitpunkt t=0 ruhendes Teilchen mit elektrischer Ladung q befindet. Bestimmen Sie Impuls p, Energie E, Geschwindigkeit v und Ort x des Teilchens als Funktion von t und überprüfen Sie die Energie-Impuls-Relation. Skizzieren Sie die Bahnkurve!

Hinweise:
Wiederum c=1. Starten Sie mit der Lorentzkraft ($\gamma = (1{-}v^2)^{-1/2} = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$)

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = q\,F_{\mu\nu}\,u^\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = q\,\gamma\,\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{v} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} = q\,\gamma(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\times\vec{\mathcal{B}})$$

reduziert auf eine Raumrichtung, um zunächst $p(t)$ und daraus $v(t)$ zu berechnen. Eine Integration liefert $x(t)$. Ihr $v(t)$ setzen Sie dann in die Leistungs-Gleichung ein und bestimmen $E(t)$ durch Integration. Gilt $E^2 - p^2 = m^2$?

Aufgabe H06 *Plancksche Strahlungsformel* (5 Punkte)

Die elektromagnetische Strahlung eines Schwarzen Körpers erstreckt sich über alle Frequenzen, wobei eine Strahlungsmode bei Frequenz ν eine mittlere Energie $\langle E\rangle(\nu)$ beiträgt und die räumliche Dichte der Strahlungsmoden $n(\nu) = \frac{8\pi}{3}\frac{\nu^3}{c^3}$ ist. Damit berechnet sich die Energiedichte der Strahlung im Frequenzbereich $[\nu, \nu{+}\mathrm{d}\nu]$ zu

$$W(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \langle E\rangle\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu}\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3}\,\langle E\rangle\,\nu^2\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3}\,kT\,\nu^2\mathrm{d}\nu\ ,$$

da im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T jede Strahlungsmode die mittlere Energie $\langle E\rangle = kT$ unabhängig von ν enthält. Diese so genannte Rayleigh-Jeans-Formel reproduziert bei kleinen Frequenzen das Experiment richtig, führt aber zur „Ultraviolett-Katastrophe“, da sie bei großen Frequenzen das Wiensche Gesetz nicht wiedergibt und die über alle Frequenzen integrierte Energiedichte $W = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu\,W(\nu)$ offenbar divergiert.
Planck nahm nun an, dass anstatt $\langle E\rangle = kT$ eine diskrete Energie-Verteilung

$$E_n = n\,\epsilon\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{mit Wahrscheinlichkeiten} \qquad p_n \propto \mathrm{e}^{-E_n/kT}$$

(nach Boltzmann) zu Grunde liegt, wobei er (aus Experimenten) $\epsilon = h\,\nu$ ansetzte. Bestimmen Sie die mittlere Energie $\langle E\rangle(\nu)$ für diese Verteilung und daraus die Plancksche Formel für $W(\nu)$. Berechnen Sie daraus das führende Verhalten für kleine und große Frequenzen sowie das Integral W (Stefan-Boltzmann-Gesetz).

Hinweise:
Vergessen Sie nicht, die p_n zu normieren! Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.