10. Präsenzübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(zu bearbeiten am Dienstag, 11.01.2010)

Aufgabe P16 *Eigenfunktionen zum Drehimpuls*

Da die Kugeloberfläche S^2 kompakt ist, lässt sich jede anständige Funktion $f(\vec{r}\,|\vec{r}^2{=}1) = g(\vartheta,\varphi)$ mit $(x,y,z) = r\,(\sin\vartheta\sin\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta)$ dort in eine abzählbare Basis entwickeln. Setze $\hbar$=1. Eine extrem nützliche Basis kann man durch drei Eigenschaften definieren:

1. Homogenität: $f = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell$ mit $f_\ell(\alpha\vec{r}) = \alpha^\ell f_\ell(\vec{r})$ für $\ell = 0,1,2,\ldots$ und $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$.
   Entsprechend ist außerhalb S^2 fortgesetzt $g(r,\vartheta,\varphi) = \sum_\ell r^\ell g_\ell(\vartheta,\varphi)$.
2. Harmonizität: $\Delta f_\ell \equiv (\partial_x^2{+}\partial_y^2{+}\partial_z^2) f_\ell = 0$, was in sphärischen Koordinaten bedeutet
   $\Delta(r^\ell g_\ell) \equiv (\frac{1}{r}\partial_r^2 r - \frac{1}{r^2}\vec{L}^2) r^\ell g_\ell = r^{\ell-2}(\ell(\ell{+}1) - \vec{L}^2)\, g_\ell = 0 \quad (*)$ oder auch
   „Funktionen g_ℓ sind Eigenfunktionen von $\vec{L}^2$ mit Eigenwert $\ell(\ell{+}1)$.“
3. z-Orientierung: Funktionen f_ℓ bzw. g_ℓ lassen sich noch sortieren nach Eigenfunktionen
   von $L_z = \frac{1}{\mathrm{i}}(x\partial_y{-}y\partial_x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_\varphi$, also $L_z\, f_{\ell m} = m\, f_{\ell m}$ und genauso für $g_{\ell m}$.

Nach Normierung werden die Eigenfunktionen $g_{\ell m}$ mit $Y_{\ell m}$ bezeichnet. Demnach lässt sich jede Funktion auf der Sphäre entwickeln als $g(\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell,m} a_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ mit $a_{\ell m}\in\mathbb{C}$.
Anders gesagt: $Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = \langle\vartheta,\varphi\,|\ell,m\rangle$ für $\vec{L}^2|\ell,m\rangle = \ell(\ell{+}1)|\ell,m\rangle$ und $L_z|\ell,m\rangle = m|\ell,m\rangle$.

(a) Rechnen Sie Gleichung $(*)$ nach.

(b) Konstruieren Sie in kartesischen Koordinaten die Polynome $Y_{\ell m}(x,y,z)$ für $\ell = 1$ und 2. Sortieren Sie dazu um: $f_1 \;=\; a_x x + a_y y + a_z z \;=\; a_{11}(x{+}\mathrm{i}y) + a_{10}\, z + a_{1-1}(x{-}\mathrm{i}y)$ und berechnen Sie die L_z-Eigenwerte für diese Terme. Wiederholen Sie die Strategie für $f_2 \;=\; \ldots + a_{20}[(x{+}\mathrm{i}y)(x{-}\mathrm{i}y) + \lambda z^2] + \ldots$ und fixieren Sie λ mit der Forderung $\Delta f_2 = 0$.

(c) Rechnen Sie nun in sphärische Koordinaten um und lesen Sie die (unnormierten) $Y_{\ell m}$ ab.

(d) Besseres Verfahren: Auf- und Absteigen im m-Wert. Wir haben

$$\begin{aligned}
L_+ &\equiv L_x{+}\mathrm{i}L_y = -(x{+}\mathrm{i}y)\partial_z + z(\partial_x{+}\mathrm{i}\partial_y) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}(+\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi)\ , \\
L_- &\equiv L_x{-}\mathrm{i}L_y = +(x{-}\mathrm{i}y)\partial_z - z(\partial_x{-}\mathrm{i}\partial_y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(-\partial_\vartheta + \mathrm{i}\cot\vartheta\,\partial_\varphi)
\end{aligned}$$

Die Funktion $f_{\ell\ell} = (x{+}\mathrm{i}y)^\ell \;\leftrightarrow\; g_{\ell\ell} = \sin^\ell\vartheta\,\mathrm{e}^{\ell\mathrm{i}\varphi}$ erfüllt offenbar $L_+ f_{\ell\ell} = 0 = L_+ g_{\ell\ell}$.
Also entspricht dieses Polynom dem Zustand $|\ell,\ell\rangle$ mit „höchstem Gewicht.“
Wegen $L_- f_{\ell m} = f_{\ell\, m-1}$ (oder genauso für $g_{\ell m}$) können wir nun im m-Wert absteigen:

$$f_{\ell\ell} \xrightarrow{L_-} f_{\ell\,\ell-1} \xrightarrow{L_-} \ldots \xrightarrow{L_-} f_{\ell 0} \xrightarrow{L_-} \ldots \xrightarrow{L_-} f_{\ell-\ell} \xrightarrow{L_-} 0$$

und erhalten alle $f_{\ell m}$ für ein festes ℓ. Wegen $f^*_{\ell m}{=}f_{\ell-m}$ ist also $m\in\{-\ell,\ldots,+\ell\}$.
Berechnen Sie auf diese Weise erneut die Y_{2m} (unnormiert).