KRUMMLINIGE KOORDINATEN

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H1] *Donut* **[3 + 12 = 15 Punkte]**

Betrachten Sie in der xz-Ebene einen Kreis vom Radius R, dessen Mittelpunkt von der z-Achse den Abstand $a > R$ hat. Durch Rotation dieses Kreises um die z-Achse entsteht ein Torus.

(a) Skizzieren Sie diese Fläche.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Torus-Oberfläche, indem Sie die aus der Vorlesung bekannte Formel anwenden auf die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t,s) \doteq \begin{pmatrix} (a + R\,\cos s)\,\cos t \\ (a + R\,\cos s)\,\sin t \\ R\,\sin s \end{pmatrix} .$$

[H2] *Krummlinige Koordinaten* **[3 + 6 + 6 + 6 = 21 Punkte]**

Das Differential $\mathrm{d}\phi(\vec{r})$ eines skalaren Feldes ϕ in zwei Dimensionen lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \vec{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= \partial_x\phi\,\mathrm{d}x + \partial_y\phi\,\mathrm{d}y \\ &= \partial_u\phi\,\mathrm{d}u + \partial_v\phi\,\mathrm{d}v\,, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei einmal $\vec{r} = \vec{r}(x,y)$ und ein andermal $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ verwendet wurde. Wenn die Umrechnung der Koordinaten bekannt ist, $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$, dann hängen die Koordinaten-Differentiale $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ und $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ über die Jacobi-Matrix J zusammen.

(a) Nutzen Sie diese Informationen, um auch die kartesischen Komponenten $(\partial_x\phi, \partial_y\phi)$ des Gradienten durch $(\partial_u\phi, \partial_v\phi)$ auszudrücken. Vorsicht: $(\partial_u\phi, \partial_v\phi) \mathrel{\dot{\neq}} \vec{\nabla}\phi$!

(b) Geben Sie für Polarkoordinaten J, $|\det J|$, $g = J^\intercal J$, $(\mathrm{d}s)^2$, $\mathrm{d}A$ und die kartesischen Komponenten von $\vec{\nabla}\phi$ an:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix} .$$

(c) Das gleiche, wie in (b), aber nun für parabolische Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} u\,v \\ \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \end{pmatrix} .$$

(d) Leiten Sie mit Hilfe von $\partial_u\vec{r} = \vec{e}_u\,b_u$ und $\partial_v\vec{r} = \vec{e}_v\,b_v$ auch eine Formel für den Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x\,\partial_x + \vec{e}_y\,\partial_y$ von der Form $\vec{\nabla} = (\vec{e}_u, \vec{e}_v)\,M \begin{pmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{pmatrix}$ ab. Drücken Sie die Matrix M durch g und (b_u, b_v) aus. Geben Sie damit explizit den Nabla-Operator auch in den krummlinigen Koordinaten von (b) und (c) an.

Hinweis: Schreiben Sie die Linearkombinationen in (1) als Zeile mal Spalte und folgern Sie damit $(\partial_x\phi, \partial_y\phi) = (\partial_u\phi, \partial_v\phi) \left(\begin{smallmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{smallmatrix}\right)$.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!