FOURIER-TRANSFORMATION & GREEN-FUNKTION

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H15] *Wärmeleitungsgleichung* **[6 + 6 = 12 Punkte]**

Die Ausbreitung eines Temperaturfeldes $T(x,t)$ in einem eindimensionalen Medium mit Temperaturleitfähigkeit κ wird beschrieben durch die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung

$$\tfrac{1}{\kappa}\,\partial_t\,T(x,t) = \partial_x^2\,T(x,t)\,.$$

Für eine Wand der Dicke L, deren Ränder wärmedicht abgeschlossen sind, soll die zeitliche Entwicklung der anfänglichen Temperaturverteilung $T(x,0) = T_0\,\frac{x}{L}$ bestimmt werden.

(a) Da nur das Intervall $[0,L]$ von Interesse ist, kann $T(x,0)$ zu $T_0\left|\frac{x}{L}\right|$ auf das Intervall $[-L,L]$ symmetrisch erweitert und außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt werden. Die fortgesetzte Funktion kann als Fourier-Reihe

$$T(x,0) = \tfrac{1}{2}\,T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos\tfrac{n\,\pi\,x}{L} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \begin{cases} -\frac{4\,T_0}{n^2\,\pi^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

entwickelt werden. Leiten Sie diese Reihendarstellung ab.

(b) Für $t > 0$ ist die Reihenentwicklung weiterhin gültig, bloß werden die Fourier-Koeffizienten zeitabhängig, $a_n = a_n(t)$. Berechnen Sie die $a_n(t)$ aus der Forderung, dass zu jedem Zeitpunkt die Diffusionsgleichung gilt. Welches Temperaturprofil stellt sich für $t \to \infty$ ein?

[H16] *Greensche Funktion* **[6 + 6 + 6 = 18 Punkte]**

Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss des Potentials $V(x) = -\frac{1}{2}\,\lambda^2\,x^2$ auf der x-Achse. Zusätzlich wirke in dem Zeitraum $0 \le t \le 1$ eine konstante Kraft f auf das Teilchen ein. Damit nimmt die Bewegungsgleichung die folgende Form an:

$$\ddot{x}(t) - \lambda^2\,x(t) = F(t) \qquad \text{mit} \qquad F(t) = \begin{cases} f & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung an.

(b) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann mit Hilfe einer Greenfunktion $G(t)$ konstruiert werden, definiert als Lösung von $\ddot{G} - \lambda^2\,G = \delta(t)$. Welche Gleichung erhalten Sie für $\tilde{G}(\omega)$ durch Fourier-Transformation der Differentialgleichung für G? Führen Sie die Rücktransformation durch mit Hilfe von $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x}}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{-a\,|x|}$. Eine spezielle Lösung erhalten Sie nun gemäß $x_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\,G(t-t')\,F(t')$. Denken Sie dabei an eine Fallunterscheidung. Welche Randbedingungen zeichnen diese Lösung aus?

(c) Finden Sie die konkrete Lösung mit Anfangsbedingungen $x(0) = -x_0 < 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ aus der allgemeinen Lösung. Welchem Schicksal geht das Teilchen für $t \to \infty$ entgegen, und welche Kraft f ist mindestens aufzuwenden, um das Teilchen über den Berg zu stoßen?

[H17] *Abgeschirmte Ladung* **[6 Punkte]**

Eine positive Punktladung q wird in einem unendlich ausgedehnten Metall am Ursprung hinzugefügt, $\varrho_p = q\,\delta(\vec{r})$. Dadurch verschieben sich die Elektronen des Metalls gegen die Atomrümpfe, so dass zusätzlich eine ortsabhängige Ladungsdichte ϱ_e entsteht, die das Potential ϕ verändert, $-\Delta\phi = 4\pi\,(\varrho_p + \varrho_e)$. Die Ladungsdichte ϱ_e stellt sich dabei ihrerseits so ein, dass sie proportional zum Potential ist, $4\pi\,\varrho_e = -\lambda^2\,\phi$. Welche selbstkonsistente Gleichung ergibt sich für das Potential? Lösen Sie diese durch (dreidimensionale) Fourier-Transformation. Gehen Sie in dem resultierenden $\vec{k}$-Integral zu Kugelkoordinaten über, führen Sie die Winkelintegrationen durch und verwenden Sie dann die Identität $\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{x\,\sin(b\,x)}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(b)\,\mathrm{e}^{-|a\,b|}$. *Bemerkung*: Die zusätzliche Ladung kann man sich aus dem Unendlichen kommend vorstellen.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!