SEPARATIONSANSÄTZE

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H18] *Unterschiedlich geladene Kugelhälften* **[6 + 6 + 6* = 12 Punkte + 6* Bonuspunkte]**
Gegeben sei eine Kugel mit Radius R. Die Halbkugel $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ trage das elektrische Potential $+\Phi_0$, die Halbkugel $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ trage das elektrische Potential $-\Phi_0$.

(a) Berechnen Sie das Potential innerhalb der Kugel.
(b) Berechnen Sie das Potential außerhalb der Kugel.

Hinweis: Für das Potential kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\alpha_\ell\, r^\ell + \beta_\ell\, r^{-\ell-1}\right) P_\ell(\cos\vartheta)\,.$$

Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelation und die folgenden Eigenschaften der Legendre-Polynome:

$$\begin{aligned} (2n+1)\, P_n(x) &= P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\,, \\ P_{2n}(0) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\,, \qquad\qquad P_{2n}(1) = 1\,. \end{aligned}$$

(c*) Beweisen Sie die Relationen aus dem Hinweis mit Hilfe der Formel von Rodrigues aus [H11].

[H19] *Separation in Polarkoordinaten* **[4 + 4 + 4 = 12 Punkte]**
Separieren Sie die zweidimensionale Wellengleichung in Polarkoordinaten,

$$\left(\tfrac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \tfrac{1}{r}\,\partial_r\, r\,\partial_r - \tfrac{1}{r^2}\,\partial_\varphi^2\right) u(t,r,\varphi) = 0\,.$$

(a) Machen Sie hierzu den Ansatz $u(t,r,\varphi) = T(t)\,v(r,\varphi)$. Dies sollte Sie zur Helmholtz-Gleichung

$$\left(\tfrac{1}{r}\,\partial_r\, r\,\partial_r + \tfrac{1}{r^2}\,\partial_\varphi^2 + k^2\right) v(r,\varphi) = 0 \qquad \text{sowie zu} \qquad \ddot{T} + c^2\,k^2\,T = 0$$

mit einer beliebigen reellen Konstante k bringen.
(b) Machen Sie nun einen erneuten Separationsansatz $v(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ und geben Sie die Lösung für Φ an. Welche (gewöhnliche) Differentialgleichung erhalten Sie für R?
(c) Im Spezialfall $k^2 = 0$, also $\Delta\, v = 0$, führt ein Potenzansatz $R(r) = r^\lambda$ zur Lösung. Geben Sie die allgemeine Lösung für v an und drücken Sie sie durch die komplexe Variable $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ aus.

[H20] *Separation in Kugelkoordinaten* **[12 Punkte]**
Lösen Sie die homogene Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2\, u - \Delta\, u = 0$ mit den Anfangsbedingungen

$$u(0,r,\vartheta,\varphi) = \frac{\sin 3r}{r}\,, \qquad\qquad \dot{u}(0,r,\vartheta,\varphi) = c\,(\sin\varphi\,\sin\vartheta + \cos\vartheta)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\sin 2r}{r}\right).$$

Hinweise: Starten Sie mit der allgemeinen in $\mathbb{R}^3$ regulären Lösung in Kugelkoordinaten. Welche (k,ℓ,m)-Werte kommen in den Anfangsdaten vor? Die sphärischen Besselfunktionen sind $j_\ell(\rho) = \rho^\ell\,\left(-\frac{1}{\rho}\,\partial_\rho\right)^\ell \frac{\sin\rho}{\rho}$. Damit können Sie die Entwicklung der Anfangsdaten in $j_\ell\, Y_{\ell m}$ erraten.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**
Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

Bitte wenden!

[!] *Hinweise zu Computerübungen*

Die gesamte Lösung zusammen mit Erläuterungen und Diskussionen der Ergebnisse muss in einem *Mathematica*-Notebook verfasst werden. Sie haben für die Computerübung insgesamt 14 Tage Zeit.

Lesen Sie unbedingt noch einmal die allgemeinen Hinweise zu den Computerübungen durch, die Sie auf der Seite „Allgemeine Informationen" der Lehrveranstaltung im Stud.IP finden.

Beachten Sie, dass jeweils die Hälfte der maximal möglichen Punkte die Ausführung der Lösung der Computerübungen bewertet, also insbesondere, ob die Lösung gut strukturiert programmiert wurde, ob die Lösung eine vollständige Dokumentation im *Mathematica*-Notebook enthält, ob Plots vernünftig beschriftet sind, und ob Sie Ihre Resultate sinnvoll diskutieren und interpretieren.

[C3] *Randwertprobleme* **[5* + 2 + 5 + 4 + 5 + 5 = 21 Computerpunkte + 5* Bonuspunkte]**

[CÜ] Entwickeln Sie mit einem Separationsansatz das Potential $\phi(x,y)$ in einem ladungsfreien Rechteck allgemein für n Basisfunktionen unter folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
&\phi(x,0) \equiv 0 && \text{für } x \in [0,a]\,, \\
&\phi(0,y) \equiv 0 && \text{für } y \in [0,b)\,, \\
&\phi(a,y) \equiv 0 && \text{für } y \in [0,b)\,, \\
&\phi(x,b) = V(x) && \text{für } x \in [0,a) \qquad \text{mit } V(x) = \begin{cases} V_0\, a & \text{für } x < \frac{a}{2} \\ V_0 \left(\frac{a}{2} + 2\left|x - \frac{3a}{4}\right|\right) & \text{für } x \in [\frac{a}{2}, a] \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

Als Basisfunktionen sollten Sie einmal die Funktionen $\sqrt{2/a}\,\sin(n\,\pi\,x/a)$, die Sie bereits von der Behandlung der Fourier-Reihen kennen, und die Funktionen $\sqrt{2/a}\,\sinh(n\,\pi\,y/a)$ erhalten, so dass das Potential gegeben ist als

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\,\pi}{a}\,x\right) \sinh\left(\frac{n\,\pi}{a}\,y\right).$$

(a*) *Bonusaufgabe*: Zeigen Sie, dass $\phi(x,y)$ in der oben angegebenen Form dargestellt werden kann. Dies müssen Sie selbst zeigen, das geht nicht mit *Mathematica*.

(b) Stellen Sie $V(x)$ graphisch in einer Abbildung dar.

(c) Programmieren Sie die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten C_n für beliebiges n.

(d) Stellen Sie für $a = b = 1$ das Potential $\phi(x,y)$ jeweils für $n = 1, 3, 5, \ldots, 11$ graphisch dreidimensional dar, also $\phi(x,y)$ über der xy-Ebene. Hierbei bezeichnet n jeweils den höchsten Term der Entwicklung. Sie dürfen $V_0 = 1$ setzen.

(e) Überlagern Sie zudem in einer Abbildung die Näherungen für $\phi(x,b)$ für die gesamten Werte von n, die Sie in (d) verwendet haben.

(f) Erstellen Sie zum Vergleich nun Abbildungen für Näherungen von $\phi(x,y)$ und $\phi(x,b)$ für einen hohen Wert von n, zum Beispiel 137.