RANDWERTPROBLEME

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H21] *Methode der Spiegelladungen* **[$3 + 3 = 6$ Punkte]**

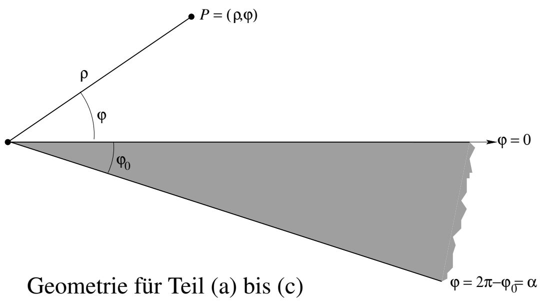
Wir betrachten die xy-Ebene. Die Halbebene $y > 0$ sei auf dem Potential $+U$, die Halbebene $y < 0$ auf dem Potential $-U$.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Spiegelladungsmethode das Potential $\phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für den ladungsfreien Halbraum $z > 0$. *Hinwweis*: Denken Sie an Formel (5.12) aus der Vorlesung für $\varrho = 0$. Es ist $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \dfrac{-1}{4\pi\,|\vec{r} - \vec{r}'|} - \dfrac{-1}{4\pi\,|\vec{r} - \sigma\,\vec{r}'|}$, wobei $\sigma\,(x', y', z') = (x', y', -z')$ die Spiegelung an der xy-Ebene bezeichnet.

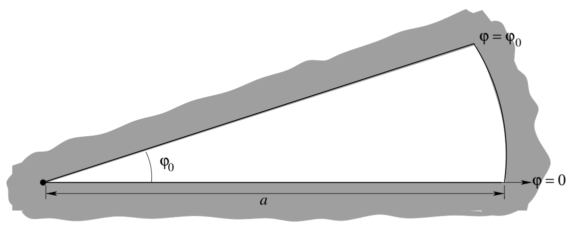
(b) Wie lautet die Flächenladungsdichte ω auf der Ebene $z = 0$? *Hinweis*: Erinnern Sie sich an die Sprungbedingungen für das elektrische Feld an Grenzflächen.

[H22] *Keilförmiger Leiter* **[$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$ Punkte]**

Ein unendlich langer und hoher leitender Keil mit Öffnungswinkel $\varphi_0 < \pi$ wird auf einem Potential $V_0 = 0$ gehalten.



Geometrie für Teil (a) bis (c)



Geometrie für Teil (d) bis (f)

(a) Finden Sie die Form des Potentials in der Nähe der Spitze, indem Sie die Laplace-Gleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes $\phi(\rho, \varphi) = R(\rho)\,F(\varphi)$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) lösen. Vereinfachen Sie dann für kleine Radien ρ. *Hinweise*: Die Geometrie legt nahe, Zylinderkoordinaten mit der z-Achse entlang der Keilkante zu verwenden. Das Problem hängt dann nicht explizit von der z-Komponente ab. Die Laplace-Gleichung lautet daher

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}\phi\right)(\rho, \varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,\phi(\rho, \varphi) = 0\,.$$

Trotz der Randbedingung auf dem Keil ist das Potential außerhalb des Keils nicht konstant, weil keine Abfallbedingung im Unendlichen vorgegeben wird, da wir nur eine Lösung in der Nähe der Spitze suchen.

(b) Wie verhält sich das elektrische Feld in der Nähe der Kante, und was sagt das über die Funktionsweise von Blitzableitern aus? Verwenden Sie dazu die Polardarstellung des Gradienten,

$$\nabla = \vec{e}_\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

(c) Was passiert mit dem elektrischen Feld in der Nähe der Kante eines keilförmigen Einschnitts, also für den Fall, dass der Winkel φ größer als $180°$ ist, also $\pi < \varphi_0 < 2\pi$?

(d) Wir betrachten nun eine ähnliche Situation: Das keilförmige Gebiet mit Öffnungswinkel φ_0 sei zusätzlich begrenzt durch einen Kreisbogen (genauer gesagt durch ein Segment eines unendlich langen Zylindermantels) bei $\rho = a$. Die beiden Schenkelplatten sind leitend und geerdet. Die Randbedingungen lauten also $\phi = 0$ auf den Schenkeln, und es sei $\phi = V(\varphi)$ auf dem Kreisbogen, mit einer vorgegebenen Funktion $V(\varphi)$. Wir interessieren uns nun für das ladungsfreie Innere dieses „Tortenstücks“ Gehen Sie ähnlich wie in Teil (a) vor, um das Potential innerhalb dieses Gebietes durch $V(\varphi)$ auszudrücken.

(e) Berechnen Sie das Potential für den Fall $V \equiv 1$.

(f) Berechnen Sie das elektrische Feld.

Bitte wenden!

[H23] *Drahtschleife* **[$3+3+3+3+4^* = 12$ Punkte $+\ 4^*$ Bonuspunkte]**

Ein homogen geladener, kreisförmiger Draht mit verschwindend kleinem Querschnitt liegt konzentrisch zum Ursprung in der xy-Ebene. Der Kreis habe Radius R und trage die Gesamtladung Q.

(a) Geben Sie das elektrostatische Potential entlang der z-Achse an.

(b) Verwenden Sie Taylor-Entwicklungen, um das asymptotische Verhalten des Potentials aus (a) in den Fällen $z \to 0$ und $|z| \to \infty$ zu finden. Geben Sie jeweils die zwei ersten nicht verschwindenden Ordnungen an. *Zur Kontrolle*: Für $|z| \to \infty$ gilt

$$\phi(0,0,z) \simeq Q\,\frac{1}{|z|}\Big(1 - \frac{R^2}{2z^2}\Big)\,.$$

(c) Bestimmen Sie nun das Potential auch außerhalb der z-Achse, indem Sie Kugelkoordinaten verwenden. Wie lauten jeweils die zwei führenden Terme im asymptotischen Verhalten für $r \to 0$ und $r \to \infty$? *Hinweis*: Überlegen Sie, welche $Y_{\ell,m}$ bei azimutaler Symmetrie nur beitragen können.

(d) Geben Sie das asymptotische Verhalten auf der x-Achse für $x \to 0$ und $|x| \to \infty$ an (wieder jeweils die zwei führenden Terme).

(e*) Überlegen Sie, welchen Konvergenzradius die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen für $r > R$ haben kann. Betrachten Sie dazu einmal Punkte auf dem Äquator einer Kugel, und einmal an den Polen. *Hinweis*: Recherchieren Sie gegebenenfalls dass allgemeine Verhalten der $Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi)$ für $\vartheta \in \{0, \pi/2, \pi\}$.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.