STRAHLUNG, ELEKTRODYNAMIK IN MEDIEN

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H33] *Abstrahlung* **[$6 + 6 = 12$ Punkte]**

Die Radialkomponente des Poynting-Vektors, also die Komponente in Richtung des Beobachters bei $\vec{r}$, einer entlang der Weltlinie $\vec{\gamma}(t)$ beschleunigten Punktladung q zu ihrer eigenen Zeit t beträgt

$$\vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{q^2}{4\pi\, c\, R^2}\,\frac{\left|\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\dot{\vec{\gamma}}(t)/c)\times\ddot{\vec{\gamma}}(t)/c\right]\right|^2}{(1-\vec{n}\cdot\dot{\vec{\gamma}}(t)/c)^5}\,.$$

Hierbei sind R und $\vec{n}$ definiert als Betrag und Richtung von $\vec{r}-\vec{\gamma}(t) = R\,\vec{n}$. Geben Sie die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung pro Raumwinkel, $\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}(\vartheta)$ mit $\vartheta = \sphericalangle(\vec{n},\dot{\vec{\gamma}}(t))$, an für die Fälle

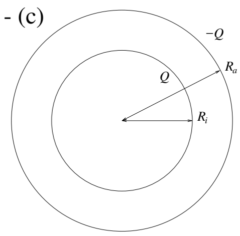
(a) Lineare Bewegung: die Ladung wird in Richtung von $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ beschleunigt oder abgebremst.

(b) Kreisbewegung: die Ladung bewegt sich mit der Umlauffrequenz ω auf einem Kreis vom Radius ρ, d.h., $\gamma(t) = \vec{e}_x\,\rho\cos(\omega\,t) + \vec{e}_z\,\rho\sin(\omega\,t)$. Bilden Sie auch das zeitliche Mittel im nichtrelativistischen Grenzfall.

[H34] *Kugelkondensator* **[$2+2+2+3+3+3+3+3+3 = 24$ Punkte]**

Betrachten Sie zwei konzentrische Kugelschalen vernachlässigbarer Dicke mit Radien $R_i < R_a$. Die Kugelschalen tragen die Ladungen Q und $-Q$.

(a) - (c)



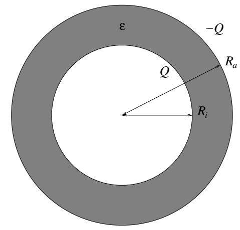
(a) Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für alle drei Raumbereiche $r < R_i$ sowie $R_i < r < R_a$ und $R_a < r$ an. Denken Sie dabei an die Resultate aus der Vorlesung.

(b) Welche Spannung U besteht zwischen den beiden Kugelschalen?

(c) Welche Kapazität $C = 4\pi\,Q/U$ hat der Kondensator?

(d) Der Kugelkondensator wird nun mit einem Dielektrikum mit elektrischer Permeabilität ϵ gefüllt. Welche Kapazität C ergibt sich nun?

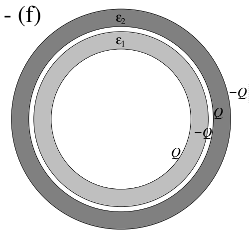
(d)



(e) Der Kondensator werde nun mit zwei verschiedenen Dielektrika (elektr. Permeabilitäten ϵ_1 und ϵ_2) schalenartig gefüllt, so dass eine Konfiguration mit Radien $R_{1\,i} < R_{1\,a} \le R_{2\,i} < R_{2\,a}$ entsteht. Zwischen den verschiedenen Dielektrika ist also ein freier Bereich. Geben Sie die einzelnen Spannungen U_k und Kapazitäten C_k, $k = 1,2$, sowie die Spannung U und die Kapazität C des gesamten Kondensators an, wenn auf jeder Schale alternierend die Ladungen $\pm Q$ sitzen.

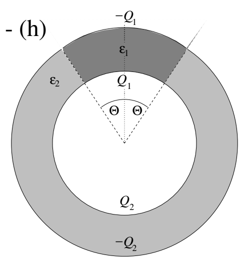
(f) Welches einfache Gesetz für die Gesamtkapazität ergibt sich, wenn $R_{1\,a} = R_{2\,i}$ ist? Welche Flächenladungsdichten ergeben sich auf der innersten und der äußersten Schale?

(e) - (f)



(g) Nun füllen wir den ursprünglichen Kugelkondensator wieder mit zwei verschiedenen Dielektrika, diesmal aber so, dass das eine im Bereich $0 \le \vartheta < \Theta$ liegt, das andere im Bereich $\Theta \le \vartheta \le \pi$. Hierbei ist ϑ der Polarwinkel der Kugelkoordinaten. Die beiden Sektoren des Kondensators befinden sich auf dem gleichen Potential, d.h., das Potential ist auf jeder der Schalen konstant. Die Gesamtladung Q muss sich daher in den Sektoren unterschiedlich verteilen. Dort sitzen nun Ladungen $\pm Q_1$ bzw. $\pm Q_2$ wie skizziert. Geben Sie die Kapazitäten C_k, $k = 1,2$, an.

(g) - (h)



(h) Welches einfache Gesetz für die Gesamtkapazität ergibt sich für $\Theta = \pi/2$? Welche Flächenladungsdichten $\omega_{1\,i}$, $\omega_{1\,a}$, $\omega_{2\,i}$ und $\omega_{2\,a}$ ergeben sich für die vier Halbkugelschalen?

(i) Überlegen Sie abschließend, wie Sie die Situation aus [P29] als geeigneten Limes unendlich großer Radien einer der hier behandelten Konfigurationen erhalten können.

Bitte wenden!

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

[!] *Hinweise zu Computerübungen*

Dies ist die letzte Computerübung, die als Bonusaufgabe gestellt wird, falls Sie mit den bisherigen fünf Computerübungen noch nicht ausreichend Punkte für die Studienleistung erreichen konnten: insgesamt sind 50 Computerpunkte nötig, um die Studienleistung zu erhalten.

Die gesamte Lösung zusammen mit Erläuterungen und Diskussionen der Ergebnisse muss in einem *Mathematica*-Notebook verfasst werden. Sie haben für die Computerübung insgesamt 14 Tage Zeit.

Lesen Sie unbedingt noch einmal die allgemeinen Hinweise zu den Computerübungen durch, die Sie auf der Seite „Allgemeine Informationen" der Lehrveranstaltung im Stud.IP finden.

Beachten Sie, dass jeweils die Hälfte der maximal möglichen Punkte die Ausführung der Lösung der Computerübungen bewertet, also insbesondere, ob die Lösung gut strukturiert programmiert wurde, ob die Lösung eine vollständige Dokumentation im *Mathematica*-Notebook enthält, ob Plots vernünftig beschriftet sind, und ob Sie Ihre Resultate sinnvoll diskutieren und interpretieren.

[C6] *Feld einer Punktladung* **[$7^* + 7^* + 7^* = 21^*$ Bonus-Computerpunkte]**

[CÜ] In der Elektrostatik haben wir das elektrische Feld $\vec{E}$ einer ruhenden Punktladung bestimmt, ihr magnetisches Feld verschwindet, $\vec{B} = 0$. Ebenso kennen wir die Potentiale ϕ, das Coulomb-Potential, sowie $\vec{A} = 0$. Nun wollen wir die Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung ermitteln. Diese Aufgabe ist vollständig mit *Mathematica* zu lösen.

(a) Berechnen Sie mit *Mathematica* aus den in der Vorlesung gegebenen Formeln für die Potentiale ϕ' und $\vec{A}\,'$ einer gleichförmig bewegten Punktladung die Felder $\vec{E}\,'$ und $\vec{B}\,''$ für den Fall, dass sich die Ladung mit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ in x-Richtung bewegt. (Sie finden diese Formeln im Abschnitt 7, Formeln (7.23) „Liénard-Wiechert-Potentiale", oder in Kapitel 10.3.1 des Buches von Griffiths.)

(b) Visualisieren Sie diese Felder $\vec{E}\,'$ und $\vec{B}\,'$. *Hinweis*: Aufgrund der Rotationssymmetrie um die x-Achse genügen zwei-dimensionale Plots, z.B. in der xy-Ebene für das $\vec{E}$-Feld, und in der yz-Ebene für das $\vec{B}$-Feld..

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Plots, dass die in (a) berechneten Felder einer gleichförmig bewegten Ladung mit den Notationen $\vec{E}_{\|} = E_x\,\vec{e}_x$ und $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\|}$ gegeben sind durch

$$\vec{E}'_{\|} = \vec{E}_{\|}\,, \qquad \vec{B}'_{\|} = \vec{B}_{\|}\,,$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma\,(\vec{E}_{\perp} - \vec{v}\times\vec{B})\,, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\,(\vec{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\,\vec{v}\times\vec{E})\,.$$

Hierbei ist $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Dabei bezeichnen hier die ungestrichenen Größen die Felder der Ladung in Ruhe, die gestrichenen Größen die Felder der bewegten Ladung. Überlegen Sie dazu, welche Koordinaten Sie in den transformierten Feldern einsetzen müssen.

Bemerkung: Diese Formeln gelten allgemeiner. Die ungestrichenen Größen können die Felder einer beliebig gleichförmig bewegten Ladung angeben, die gestrichenen Größen dann die Felder einer relativ dazu zusätzlich in Richtung $\vec{v}$ bewegten Ladung. Sie können also mit diesen Formeln die Felder einer Punktladung in beliebigen, relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegten, Inertialsystemen berechnen.