

---

---

VEKTORANALYSIS

Die Präsenzübungen am ersten Mai entfallen, da dies ein gesetzlicher Feiertag ist. Die hier aufgeführten kleinen Übungen sind demnach freiwillige Ergänzungen, die Sie machen können, um Ihre Praxis in der Vektoranalysis zu erhöhen. Versuchen Sie, sich zuerst klar zu machen, was zu tun ist, schauen Sie dann in der Vorlesung nach, und lösen Sie anschließend die Aufgaben möglichst ohne weiteres Nachschauen.

**[P3]** *Nabla-Kalkül*

Üben Sie den Umgang mit Divergenz, Rotation und Gradient.

(a) Formen Sie folgende Ausdrücke um:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}), \\ \vec{\nabla} \cdot (f \vec{B}), \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \\ \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

Hierbei sind  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  beliebige Vektorfelder, und  $f$  eine beliebige skalare Funktion.

(b) Berechnen Sie explizit die folgenden Ausdrücke::

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} r, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_r, \\ \vec{\nabla} \times \vec{e}_r.\end{aligned}$$

(c) Das elektrische Feld einer Metallkugel mit Gesamtladung  $Q$  und Radius  $R$  ist gegeben als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \vec{e}_r \frac{1}{r^2} \theta(r - R).$$

Hierbei ist  $\theta(x)$  die Stufenfunktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}.$$

Berechnen Sie  $\partial_x E(\vec{r})$ . Was ergibt sich demnach für  $\text{div } \vec{E}(\vec{r})$ ?

*Hinweis:* Beachten Sie, dass  $\frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x)$  gilt.

(d) Beweisen Sie die Aussage aus dem Hinweis in (c), indem Sie die Behauptung mit einer Testfunktion unter dem Integral betrachten.

**[P4]** *Laplace in parabolischen Koordinaten*

Wir verwenden die parabolischen Koordinaten aus [H2](c). Geben Sie den Laplace-Operator einmal mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen Formel für allgemeine krummlinige Koordinaten an, und einmal, indem Sie  $\Delta = \text{div grad}$  explizit ausrechnen, und dafür den Gradienten in parabolischen Koordinaten aus [H2](d) verwenden.