FOURIER-REIHEN & FOURIER-TRANSFORMATION

[P9] *Fourier-Reihen*

Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ lässt sich gemäß Vorlesung darstellen als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,x} \qquad \text{wobei} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_I \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,x}\,f(x)$$

und I ein beliebiges Intervall der Länge 2π (ein Periodenintervall) bezeichnet.

(a) *Sägezahn*: Wir wählen $I = [-\pi, +\pi)$ und setzen die Funktion $f(x) = x$ außerhalb des Intervalls mit $f(x + 2\pi) = f(x)$ periodisch fort. Berechnen Sie die c_n und leiten Sie aus der Fourier-Reihe am Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ die Leibniz-Formel für $\frac{\pi}{4}$ her.
Hinweis: Werten Sie die Integrale mit partieller Integration aus. Es gilt

$$\int_I \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,x} = 2\pi\,\delta_{n,0} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\pi/2} = \mathrm{i}^n\,.$$

(b) *Parabel-Zahn*: Wir nehmen $I = [0, 2\pi)$ und setzen die Funktion x^2 außerhalb des Intervalls mit $f(x + 2\pi) = f(x)$ periodisch fort. Bestimmen Sie wiederum die c_n und stellen Sie x^2 durch seine Fourier-Reihe dar. Man kann zeigen, dass Fourier-Reihen an Sprungstellen x_s gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}\big(f(x_x + \epsilon) + f(x_s - \epsilon)\big)$ konvergieren. Verwenden Sie diese Kenntnis, um mit $x = 0$ die Euler-Formel für $\frac{\pi^2}{6}$ herzuleiten.
Hinweis: Gleiches Vorgehen wie in (a). Allerdings ist c_0 speziell zu behandeln.

[P10] *Übergang zum Integral*

Wir betrachten die Rechteckfunktion, definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } -a \le x \le a \\ 0 & \text{wenn } |x| > a \end{cases}\,.$$

(a) Beginnen Sie mit dem vollständigen orthonormalen System $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\,n\,x/L}$, wobei n über die ganzen Zahlen läuft, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit dem Sie periodische Funktionen im Intervall $x \in [-L, L)$ entwickeln können. Bestimmen Sie die Koeffizienten f_n in der Fourier-Reihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\,e_n(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Fourier-Transformierte

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\,x}$$

der Rechteckfunktion $f(x)$. Damit können Sie die ursprüngliche Funktion schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\tilde{f}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x}\,.$$

(c) Vergleichen Sie nun die Fourier-Reihe mit der Fourier-Transformation. Führen Sie dazu in der Fourier-Reihe in geeigneter Weise eine Größe k_n ein. Zeigen Sie dann, dass die Fourier-Reihe für unendlich große Intervalllängen $L \to \infty$ in die Fourier-Transformation übergeht.