FOURIER-TRANSFORMATION

[P11] *Parsevalsches Theorem*

Der Spannungsabfall $U(t)$ am Widerstand $R = 1$ eines sich entladenden Kondensators sei gegeben durch

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-\gamma t} & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$

wobei $1/\gamma > 0$ die Zeitkonstante ist.

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{U}(\omega)$ entsprechend dem zusammenhang

$$U(t) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t}\, \tilde{U}(\omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{U}(\omega) = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\, t}\, U(t)\,.$$

(b) Die momentan am Widerstand in Wärme umgesetzte Leistung ist $|U(t)|^2$, die über die gesamte Zeit umgewandelte Wärmemenge damit

$$Q = \int \mathrm{d}t\, |U(t)|^2 = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, |\tilde{U}(\omega)|^2\,,$$

wobei die letzte Gleichheit das Parsevalsche Theorem ist. Man kann also $|\tilde{U}(\omega)|^2$ als im Frequenzintervall $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$ umgesetzte Wärmemenge interpretieren und für Q anstatt über die Zeit über alle Frequenzen integrieren. Verifizieren Sie das Parsevalsche Theorem explizit an diesem Beispiel. Alle Integral laufen von $-\infty$ bis $+\infty$.

[P12] *Lösung einer Differentialgleichung durch Fourier-Transformation*

Eine Spannungsquelle $U(t)$ lädt über einen Widerstand R einen Kondensator der Kapazität C auf. Die Ladung $q(t)$ auf dem Kondensator genügt damit der Differentialgleichung

$$\dot{q}(t) + \frac{1}{R\,C}\, q(t) = \frac{1}{R}\, U(t)\,.$$

Die Spannungsquelle erzeuge die Spannung $U(t) = U_0\, \theta(-t)\, \mathrm{e}^{\Omega\, t}$ mit $\Omega > 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung mittels Fourier-Transformation in den folgenden Schritten:

(a) Welche Gleichung ergibt sich für $\tilde{q}(\omega)$?

(b) Berechnen Sie eine spezielle Lösung $q_s(t)$ der Differentialgleichung, indem Sie die Rücktransformation durchführen mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\,\mathrm{i}}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega}}{\omega \mp \mathrm{i}\,\alpha} = \pm \mathrm{e}^{\mp\alpha\, t}\, \theta(\pm t) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0\,.$$

(c) Die Lösung der Differentialgleichung ist die Summe der erhaltenen speziellen Lösung $q_s(t)$ und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bestimmen Sie die konkrete Lösung zu der Randbedingung $q(-\infty) = 0$.