KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

[P13] *Ebene Wellen & Kugelwellen*

Der räumliche Teil $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ einer ebenen Welle genügt der Helmholtz-Gleichung. Also sollte er sich auch nach dem in $\mathbb{R}^3$ vollständigen Funktionssatz der Kugelwellen, $\{j_\ell(k\,r)\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)\;:\;\ell\in\mathbb{Z}_+, m=-\ell,\ldots,+\ell\}$ entwickeln lassen. Wegen $\vec{k}\cdot\vec{r}=k\,r\,\cos\gamma$ ist nur ein Winkel im Spiel. Bei Wahl der z-Achse in $\vec{k}$-Richtung ist dann $\vartheta=\gamma$ und nichts hängt von φ ab. Wir benötigen daher nur die $Y_{\ell 0}(\vartheta,\varphi)\sim P_\ell(\cos\vartheta)$ in der Entwicklung

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=\sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell\,(2\ell+1)\,j_\ell(k\,r)\,P_\ell(\cos\gamma) \qquad \text{für} \qquad \gamma=\sphericalangle(\vec{k},\vec{r})\,.$$

Beweisen Sie diese Formel, indem Sie zunächst statt i^ℓ noch unbestimmte Koeffizienten a_ℓ schreiben, und wie folgt vorgehen:

(a) Entwickeln Sie die linke Seite in eine Potenzreihe mit den Abkürzungen $k\,r=\rho$ und $\cos\gamma=z$. Wenden Sie anschließend auf beiden Seiten $\int_{-1}^{1}dz\,P_n(z)\cdot$ für beliebiges n an.

(b) Verwenden Sie auf der rechten Seite die Orthogonalität $(2\ell+1)\int_{-1}^{1}dz\,P_n(z)\,P_\ell(z)=2\,\delta_{n\ell}$, sowie die asymptotische Form der sphärischen Besselfunktionen $j_\ell(\rho)=\frac{2^\ell\,\ell!}{(2\ell+1)!}\,\rho^\ell+\mathcal{O}(\rho^{\ell+1})$ für $\rho\to 0$.

(c) Schreiben Sie auf der linken Seite $z^\ell=c_{\ell,0}\,P_\ell+c_{\ell,1}\,P_{\ell-1}+\ldots$ mit $c_{\ell,0}=2^\ell\,(\ell!)^2/(2\ell)!$, und nutzen Sie wiederum die Orthogonalität der Legendre-Polynome.

(d) Vergleichen Sie auf beiden Seiten die ρ^n Terme der niedrigsten Potenz, und lesen so die a_n ab.

[P14] *Harmonische homogene Polynome & Kugelflächenfunktionen*

Jede ausreichend gutartige Funktion $f(\vec{r})$ lässt sich, eingeschränkt auf die Kugeloberfläche $\vec{r}^{\,2}=1$, also $f(\vec{r})\big|_{\vec{r}^{\,2}=1}=g(\vartheta,\varphi)$, in eine abzählbare Basis entwickeln, da die Kugeloberfläche S^2 kompakt ist. Hierbei ist $\vec{r}\doteq(x,y,z)=r\,(\sin\vartheta\,\cos\varphi,\sin\vartheta\,\sin\varphi,\cos\vartheta)$. Eine sehr nützliche Basis ist durch die folgenden drei Eigenschaften definiert:

1. **Homogenität** Die Funktion hat eine Entwicklung $f=\sum_{\ell=0}^{\infty}f_\ell$ mit $f_\ell(\lambda\,\vec{r})=\lambda^\ell\,f_\ell(\vec{r})$ für alle $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$. Entsprechend lässt sich $g(\vartheta,\varphi)$ außerhalb der Kugeloberfläche S^2 fortsetzen, $g(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}r^\ell\,g_\ell(\vartheta,\varphi)$.
2. **Harmonizität** Alle f_ℓ erfüllen die Laplace-Gleichung $\Delta\,f_\ell=0$. In sphärischen Koordinaten bedeutet das
$$\Delta\,(r^\ell\,g_\ell)=\left(\tfrac{1}{r}\,\partial_r^2\,r+\tfrac{1}{r^2}\,\Delta_\Omega\right)r^\ell\,g_\ell=r^{\ell-2}\left(\ell\,(\ell+1)+\Delta_\Omega\right)g_\ell=0\,. \tag{1}$$
Man sagt auch, die Funktionen g_ℓ sind Eigenfunktionen zu Δ_Ω mit Eigenwert $-\ell\,(\ell+1)$.
3. **Orientierung** Die Funktionen f_ℓ bzw. g_ℓ lassen sich noch nach Eigenfunktionen von $M=\frac{1}{i}\,(x\,\partial_y-y\,\partial_x)=\frac{1}{i}\,\partial_\varphi$ unterteilen, also $M\,f_{\ell m}=m\,f_{\ell m}$ und analog für $g_{\ell m}$. Dies entspricht einer festen Wahl der z-Achse.

Nach Normierung werden die Eigenfunktionen $g_{\ell m}$ mit $Y_{\ell m}$ bezeichnet. Jede Funktion auf der Sphäre lässt sich dann entwickeln als $g(\vartheta,\varphi)=\sum_{\ell,m}a_{\ell m}\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)$ mit $a_{\ell m}\in\mathbb{C}$.

(a) Rechnen Sie Gleichung (1) nach.

(b) Konstruieren Sie in kartesischen Koordinaten die Polynome $Y_{\ell m}(x,y,z)$ für $\ell=1$ und $\ell=2$. Sortieren Sie dazu um: $f_1=a_x\,x+a_y\,y+a_z\,z=a_{11}\,(x+i\,y)+a_{10}\,z+a_{1-1}\,(x-i\,y)$ und berechnen Sie die M-Eigenwerte für diese Terme. Wiederholen Sie diese Strategie für $f_2=\ldots+a_{20}\left[(x+i\,y)(x-i\,y)+\lambda\,z^2\right]+\ldots$ und fixieren Sie λ mit der Forderung nach Harmonizität, $\Delta\,f_2=0$.

(c) Rechnen Sie nun in sphärische Koordinaten um und lesen Sie so die unnormierten $Y_{\ell m}$ ab.

(d*) Ein besseres Verfahren geht so: Setzen Sie $f_{\ell\ell}=(x+i\,y)^\ell$ bzw. $g_{\ell\ell}=\sin^\ell\vartheta\,e^{i\,\ell\,\varphi}$. Der Differentialoperator $L_-=(x-i\,y)\,\partial_z-z\,(\partial_x-i\,\partial_y)=e^{-i\,\varphi}\,(-\partial_\vartheta+i\,\cot\vartheta\,\partial_\varphi)$ erlaubt es, in den $f_{\ell m}$ abzusteigen, $L_-\,f_{\ell m}=f_{\ell\,m-1}$ und analog für $g_{\ell m}$. Daraus folgt eine Kette $f_{\ell\ell}\xrightarrow{L_-}f_{\ell\,\ell-1}\xrightarrow{L_-}\ldots\xrightarrow{L_-}f_{\ell 0}\xrightarrow{L_-}\ldots\xrightarrow{L_-}f_{\ell\,-\ell}\xrightarrow{L_-}0$. Wegen $f^*_{\ell m}=f_{\ell\,-m}$ ist also $m\in\{-\ell,\ldots,\ell\}$. Finden Sie so die Y_{3m}.