Tutorium VIII zur Vorlesung THEORETISCHE ELEKTRODYNAMIK — SoSe 2020
Probe-Test — Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
PÜ 19. Juni 2020 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

PROBE-TEST

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen eine Vorstellung davon geben, welche Art von Problemen Sie im abschließenden Test für den Erhalt der Studienleistung bearbeiten müssen.

[P15] *Bestimmung eines Vektorfeldes aus Quellen und Wirbeln*
Für ein quellenfreies Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = g(\vec{r})\,\vec{e}_z$ mit $\vec{v}(\vec{0}) = \vec{0}$ seien seine Wirbel bekannt, d.h. es sei $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) \doteq 2\alpha\,(y, x, 0)$. Bestimmen Sie $\vec{v}(\vec{r})$.

[P16] *Vektoranalysis*
Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \big(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{r}\big) = \vec{\nabla} \times \big(\overset{\downarrow}{\vec{A}}(\vec{r}) \times \vec{r}\big) + \vec{\nabla} \times \big(\vec{A}(\vec{r}) \times \overset{\downarrow}{\vec{r}}\big) = ?$ Was ergibt sich für den Fall, dass $\vec{A}$ konstant ist?

[P17] *Energie des elektrischen Feldes*
Die Energie des elektrischen Feldes ist durch $W = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3r\,\vec{E}\cdot\vec{E}$ gegeben. Schreiben Sie für einen der beiden Faktoren $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Welche zwei Terme ergeben sich daraus vermittels einer partiellen Integration? Welcher Term verschwindet aufgrund des Gaußschen Integralssatzes, wenn man annimmt, dass im Unendlichen kein elektrisches Feld herrscht? Verwenden Sie für den verbleibenden Term eine Maxwellgleichung, um W durch ein Integral über ϱ und ϕ auszudrücken.

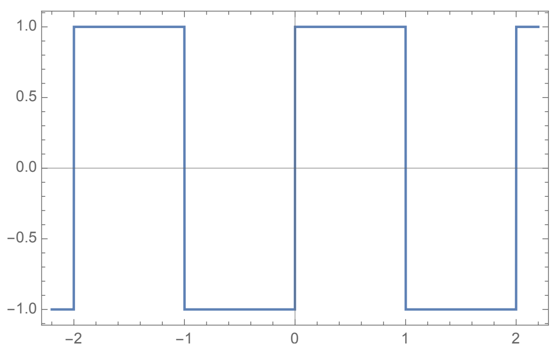
[P18] *Stokesscher Integralsatz*
Eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäß mit Radius R und Höhe H werde so umgerührt, dass das Geschwindigkeitsfeld die Gestalt $\vec{v}(\vec{r}) = \omega\,\vec{e}_z \times \vec{r}$ annimmt. Skizzieren Sie die Strömung in der Draufsicht. Überprüfen Sie den Stokesschen Integralsatz $\int \mathrm{d}\vec{f}\cdot\big(\vec{\nabla}\times\vec{v}\big) = \oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}$, indem Sie beide Seiten explizit für eine Kreisscheibe mit Radius R bzw. für deren Rand auswerten, die sich auf halber Höhe des Zylinders über der xy-Ebene befindet.

[P19] *Energiestromdichte*
Drücken Sie die Divergenz des Poyntingvektors $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{B}$ mittels $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ und $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ aus. Verwenden Sie die Maxwellgleichungen im Vakuum, um den resultierenden Ausdruck als Zeitableitung $\partial_t(\ldots)$ zu schreiben. Mit welcher Energiedichte w erfüllt $\vec{S}$ demnach eine Kontinuitätsgleichung?

[P20] *Fourierreihe*
Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der nebenstehend abgebildeten periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 2n < x < (2n+1) \\ -1 & (2n+1) < x < (2n+2) \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Legen Sie bei der Integration das Intervall $I = [-1, +1]$ zu Grunde. Lesen Sie aus dem Parsevalschen Theorem eine Summenformel ab.



[P21] *Bestimmtes Integral per Fouriertransformation*
Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{v}(t) = \alpha\,(\delta(t) - \delta(t - t_0))$ mit einem konstanten α und $t_0 > 0$. Es gelte $v(t < 0) \equiv 0$. Geben Sie zunächst eine Lösung $v(t)$ durch direkte Integration an. Welche Gleichung erfüllt die Fouriertransformierte $\tilde{v}(\omega)$? Geben Sie $v(t)$ als Fourier-Integral an. Warum darf das Integral nicht von t_0 abhaengen? Wenn Sie beide Seiten für $t = t_0/2$ auswerten und den bekannten Wert von $v(t_0/2)$ aus ihrer Lösung verwenden, können Sie den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\,\frac{\sin(\omega\,t_0/2)}{\omega}$ ablesen.