WS 2014/2015

Ergänzungen zur klassischen Physik: Solitonen, Monopole, Instantonen

Olaf Lechtenfeld

31.10.2014

Präsenzübung 1

P1: Der ϕ^4-Kink

Die ϕ^4-Theorie in 1+1 Dimensionen ist gegeben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi), \tag{1}$$

mit

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 = \frac{m^4}{4\lambda} - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{2}$$

für ein skalares Feld $\phi(x,t)$. Wir suchen nach statischen Lösungen $\phi(x)$ der Bewegungsgleichung, $\phi'' = \frac{\partial U}{\partial \phi}$, mit endlicher Energie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \left\{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi)\right\} \geq E_{st} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \left\{\frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi)\right\} < \infty. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass die Größe $G(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi)$ nicht von x abhängt.

b) Welche Randbedingungen $\phi(x \to \pm\infty) = \phi_\pm$ impliziert $E_{st} < \infty$? Argumentieren Sie, dass $G(x) = 0$, also

$$\phi' = \pm\sqrt{2U(\phi)}. \tag{4}$$

c) Beweisen Sie, dass an Punkten mit $\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 = U$ alle Ableitungen von $\phi(x)$ verschwinden und diese somit Randwerte $\phi_\pm$ darstellen.

d) Skizzieren Sie das Potential (2) und den erwarteten Verlauf einer Trajektorie $\phi(x)$, die die beiden Minima verbindet.

e) Integrieren Sie für diese Randbedingungen Gleichung (4) explizit.
Hinweise: Es ist nützlich, $\phi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}y$ und $x - x_0 = \frac{\sqrt{2}}{m}\xi$ zu reskalieren. Setzen Sie $\phi(x_0) = 0$.

f) Prüfen Sie durch Nachrechnen, dass $y(\xi) = \pm\tanh(\xi)$ Gleichung (4) löst.

g) Berechnen Sie die Energiedichte $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi)$. Skizze!

h) Integrieren Sie zu $E_{kin} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \varepsilon(x)$. *Hinweis*: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \; \cosh^{-4}\xi = \frac{4}{3}$.

i) Warum kann man den Kink nicht durch Störungstheorie im Parameter λ erhalten?

P2: Die Bogomolny-Schranke

Wir betrachten wiederum eine skalare Feldtheorie in 1+1 Dimensionen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi). \tag{5}$$

Für $U \geq 0$ können wir ein Superpotential $W(\phi)$ einführen über

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2. \tag{6}$$

a) Multiplizieren Sie die offensichtliche Ungleichung

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi' \pm \sqrt{U(\phi)}\right)^2 \tag{7}$$

aus und beweisen Sie die Bogomolny-Schranke

$$E \geq E_{st} \geq |W(\phi_+) - W(\phi_-)|. \tag{8}$$

b) Bestimmen Sie das Superpotential $W(\phi)$ für die ϕ^4-Theorie (P1) und skizzieren Sie U, W' und W.

c) Berechnen Sie die Bogomolny-Schranke für die Randbedingungen des ϕ^4-Kinks. Vergleichen Sie mit P1 h).

d) Beweisen Sie, dass der Gradientenfluss

$$\phi' = \pm \frac{\partial W}{\partial \phi} \tag{9}$$

die Bewegungsgleichung $\phi'' = \frac{\partial U}{\partial \phi}$ für statische Konfigurationen nach sich zieht.

e) Argumentieren Sie, warum der ϕ^4-Kink nahezu stabil ist gegenüber Störungen $\phi + \delta\phi$. Welche spezielle Störung $\delta\phi$ kostet keine Energie, und wie verändert sie das Kink-Profil?