Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 11 **WS 03/04 Abgabetermin: 13.1.04**

[H31] Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld (2 Punkte)

Die relativistische Wirkung für ein Punktteilchen der Ladung e und der Masse m im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch:

$$S_m[x] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \; \{-mc\sqrt{\dot{x}^2} - \tfrac{e}{c}A^\mu(x)\dot{x}_\mu\} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \; L(x,\dot{x}) \quad .$$

Hierbei ist τ die Eigenzeit des Teilchens und $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ dessen Vierergeschwindigkeit. Aus dem Viererpotential A^μ ergibt sich der Feldstärke-Tensor als $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Leiten Sie aus den zugehörigen Lagrange-Gleichungen die Viererkraft $F^\mu = m\ddot{x}^\mu$ als Funktion von $F^{\mu\nu}$ und $\dot{x}^\nu$ ab. Drücken Sie die räumliche Komponente der Viererkraft, F^i $(i = 1,2,3)$, durch das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ aus. Identifizieren Sie somit die Lorentzkraft $\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}\vec{F}$.
Hinweis: Nachdem Sie alle Differentiationen ausgeführt haben, können Sie $\sqrt{\dot{x}^2} = c$ verwenden[1].

[H32] Massive Photonen (2+3 Punkte)

Wenn Photonen eine nichtverschwindende Ruhemasse m hätten, würde bei vorgegebener divergenzfreier Quelldichte j^μ $(\partial_\mu j^\mu = 0)$ die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes folgende Form haben:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \tfrac{1}{c}j_\mu A^\mu \quad ,$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß die Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

auf folgende Gleichungen führen:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{und} \quad (\Box + m^2)A^\mu = \tfrac{1}{c}j^\mu$$

Hinweis: $\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta$.

(b) Zeigen Sie, daß sich damit für das Potential $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ einer im Ursprung ruhenden Punktladung q statt des Coulomb-Potentials das Yukawa-Potential ergibt:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r} \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad .$$

[1] Dies ist die selbe Situation wie bei den Lagrange-Gleichungen 1. Art für Systeme mit Zwangsbedingungen. Vergleichen Sie dazu das entsprechende Kapitel der Vorlesung. Die Gleichung $\sqrt{\dot{x}^2} = c$ erscheint hier als Zwangsbedingung, die eine bestimmte Parametrisierung der Weltlinie, nämlich durch die Eigenzeit τ, festlegt.

Was ist der qualitative Unterschied zwischen Yukawa- und Coulomb-Potential bezüglich der Reichweite der Potentiale?
Hinweise: Die Viererstromdichte j^μ für eine Punktladung hat die Anteile $j^0 = cq\,\delta^3(\vec{r})$ und $\vec{j} = 0$. Lösen die statische Differentialgleichung für ϕ mittels Fourier-Transformation. Die Fourier-Darstellung der δ-Funktion lautet $\delta^3(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Verwenden Sie

$$\int_0^\infty dk\, \frac{k\sin(kr)}{k^2+m^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-mr}.$$

[H33] Feldstärken und Eichinvarianz (1+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Lorentz-invariante Wirkung $S_0 + S_1$ mit $(c = 1)$

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4x\, \{-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{\theta}{32\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}\} \quad , \\ S_1 &= \int d^4x\, \{-j_\mu A^\mu\} \quad . \end{aligned}$$

(a) Drücken Sie die Wirkung S_0 durch das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ aus.

(b) Zeigen Sie, daß die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ und somit die Wirkung S_0 invariant unter den *Eichtransformationen*

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda$$

sind, wobei λ eine beliebige (differenzierbare) Funktion ist. Welche Bedingung ergibt sich für die Viererstromdichte j^μ, wenn man auch für die Wirkung S_1 Eichinvarianz fordert?
Hinweis: Vernachlässigen Sie Oberflächenterme.

(c) Zeigen Sie, daß der θ-Term in S_0 nicht zu den Lagrange-Gleichungen (siehe **[H32]**) beiträgt.