Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 12 **WS 03/04 Abgabetermin: 20.01.04**

[H34] Wellengleichung **(3+1+2 Punkte)**

Wir betrachten die Wellengleichung für masselose Vektorfelder in einem Raum ohne Randflächen ($c = 1$)

$$\Box A^\mu = j^\mu \tag{1}$$

und setzen $\vec{A} \equiv 0$ und $\vec{j} \equiv 0$, d.h. wir erhalten

$$\triangle\phi(\vec{r},t) - \partial_t^2\phi(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t)\ . \tag{2}$$

(a) Überführen Sie zunächst die obige Wellengleichung mittels Fourier-Transformation bzgl. t auf die Helmholtz-Gleichung

$$(\triangle + \omega^2)\tilde{\phi}(\vec{r},\omega) = -\tilde{\rho}(\vec{r},\omega)\ . \tag{3}$$

Zeigen Sie dann (z.B. mit Hilfe des Gaußschen Satzes), daß man für die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung die folgenden beiden Lösungen hat:

$$G_\omega^{(\pm)}(\vec{r}) = -\frac{e^{\pm i\omega r}}{4\pi r} \qquad \text{mit} \qquad r = |\vec{r}|\ . \tag{4}$$

(b) Leiten Sie aus dem Ergebnis a) die retardierten und avancierten Greenschen Funktionen

$$G^{(\pm)}(\vec{r},t) = -\frac{\delta(t \mp r)}{4\pi r} \tag{5}$$

ab und geben Sie die Lösung für $\phi(\vec{r},t)$ an. Hierbei ist $\delta(t)$ die Diracsche Deltadistribution.

(c) Nun seien $\vec{A}$ und $\vec{j}$ nicht identisch Null. Wie lautet die Beziehung für das Vektorpotential $\vec{A}$ ausgedrückt durch die Stromdichte $\vec{j}$? Verifizieren Sie nun explizit, daß die Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{6}$$

impliziert.

[H35] Liénard-Wiechart-Potentiale **(2+2 Punkte)**

In der Vorlesung wurden die Liénard-Wiechart-Potentiale für bewegte Ladungen hergeleitet, welche sich auf vorgegebenen Trajektorien durch die Raumzeit bewegen.

(a) Gegenstand dieser Teilaufgabe ist der Spezialfall einer geradlinig gleichförmig bewegten Punktladung. Wählen Sie hierzu ein geeignetes Koordinatensystem, so daß die Bewegung entlang der x-Achse mit der (konstanten) Geschwindigkeit v erfolgt und nehmen Sie an, daß sich die Punktladung zur Zeit $t = 0$ im Ursprung befindet. Zeigen Sie, daß dann gilt ($c = 1$)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{[\gamma(x - vt)]^2 + y^2 + z^2}} , \tag{7}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{v}\,\phi(\vec{r}, t) \tag{8}$$

mit $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2}$. Leiten Sie daraus die Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ab.

(b) Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$t_{\text{ret}} = t - |\vec{r} - \vec{r}(t_{\text{ret}})| \tag{9}$$

zur Bestimmung der retardierten Zeit t_{ret} maximal eine Lösung besitzen kann. Hierbei ist $\vec{r}(t_{\text{ret}})$ der Ort der bewegten Ladung zur Zeit t_{ret}.
Hinweis: Gehen Sie zunächst graphisch vor und dann in Formeln.

Klausurtermin: 31. Januar, 10:00-13:00 Uhr, Appelstraße 9A, Hörsaal MZ1